Lista 4 - Lógica Matemática - 2022.1

COS351/COS230

Data de entrega: 19 de julho de 2022

1. Seja ϕ a sentença $\forall x \forall y \exists z(R(x,y) \rightarrow R(y,z))$ onde R é um predicado de aridade 2.

   a) Seja $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b,c,d\}$ e $R^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b,c),(b,b),(b,a)\}$. Temos que $\mathcal{M} \vDash \phi$? Justifique sua resposta.

   b) Seja $A' \stackrel{\text{def}}{=} \{a,b,c\}$ e $R^{\mathcal{M}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b,c),(a,b),(c,b)\}$. Temos que $\mathcal{M}' \vDash \phi$? Justifique sua resposta.

2. Considere a sentença $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists y \exists z(P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge (P(x,z) \rightarrow P(z,x)))$. Quais dos seguintes modelos satisfazem ϕ ?

   a) O modelo $\mathcal{M}$ consistindo do conjunto dos números naturais e $P^{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m,n) | m < n\}$.

   b) O modelo $\mathcal{M}'$ consistindo do conjunto dos números naturais e $P^{\mathcal{M}'} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, 2*m) | m \in \mathbb{N}\}$.

   c) O modelo $\mathcal{M}''$ consistindo do conjunto dos números naturais e $P^{\mathcal{M}''} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m,n) | m < n+1\}$

3. Considere a fórmula $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \forall y Q(g(x, y), g(y, y), z)$ onde Q e g têm aridade 3 e 2 respectivamente. Encontre dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ com ambientes l e l', respectivamente, tal que $\mathcal{M} \vDash_l \phi$ e $\mathcal{M}' \nvDash_{l'} \phi$.

4. Seja P um predicado de aridade 2, encontre um modelo que satisfaça a sentença $\forall x \neg P(x, x)$ e outro que não a satisfaça.

5. Mostre que a vinculação semântica $\forall x \neg\phi \vDash \neg\exists x \phi$ é válida. Para isso, você deve argumentar que qualquer modelo que satisfaça $\forall x \neg\phi$ também deve satisfazer $\neg\exists x\phi$.

6. (Questão opcional vale um ponto extra no quizz 4) Argumente, como na questão anterior, que a vinculação semântica $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vDash \forall x(P(x) \vee Q(x))$ é válida.