Regras de Dedução natural

ϕ_1

$\vdots$

ϕ_m

Premissas

ψ_1 — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\vdots$ — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\vdots$

ψ_s — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\boxed{\psi^*}$ — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

Conclusão desejada

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi$

Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

Regras de Dedução Natural

Símbolos lógicos

$\wedge$

$\vee$

$\neg$

$\rightarrow$

Conjunção

$\wedge$-introdução: Conclui $\phi \wedge \psi$ se já sabemos ϕ e ψ

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

↳ Códificação da regra

$\wedge$-eliminação: Conclui ϕ e ψ se já sabemos $\phi \wedge \psi$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

Ex: Prove que $p \wedge q,\ r \vdash q \wedge r$

Premissa: $p \wedge q$, r , Conclusão: $q \wedge r$

Índice	Fórmulas	Justificativas
1	$p \wedge q$	Premissa
2	r	Premissa
3	q	$\wedge E_2$ 1
	$\cancel{r \wedge q}$ $q \wedge r$	$\wedge i$ $\cancel{2,3}$ 3,2

Eliminação do $\wedge$ aplicado na fórmula 1 extraindo o segundo argumento

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1$$

EX: PROVE QUE $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	PREM.
2	$s \wedge t$	PREM.
3	$p \wedge q$	$\wedge E_1$ 1
4	q	$\wedge E_2$ 3
5	s	$\wedge E_1$ 2
6	$q \wedge s$	$\wedge i$ 4,5

NEGAÇÃO DUPLA

EX: NÃO É VERDADE QUE NÃO ESTÁ CHOVENDO = ESTÁ CHOVENDO

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e \qquad\qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

EX: $p, \neg\neg(q\wedge r) \vdash (\neg\neg p)\wedge r$

1	p	PREMISSA
2	$\neg(\neg(q\wedge r))$	PREMISSA
3	$q\wedge r$	$\neg\neg e$ 2
4	r	$\wedge e_2$ 3
5	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
6	$(\neg\neg p)\wedge r$	$\wedge i$ 5,4

Implicação

Símbolos lógicos

$\wedge$ Conjunção

$\vee$ Disjunção

$\neg$ Negação

$\rightarrow$ Implicação

EX: p = CHOVE

$p \rightarrow q$ = SE CHOVE, ENTÃO FICA MOLHADO

DADO ϕ E $\phi \rightarrow \psi$, TEMOS ψ

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow e$$

(MODUS PONENS)

EX: PROVE QUE $p,\ p \rightarrow q,\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q$

EX: PROVE QUE $p,\ p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash r$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

1	p	PREM
2	$p \to q$	PREM
3	$p \to (q \to r)$	PREM
4	q	$\to e$ 1, 2
5	$q \to r$	$\to e$ 1, 3
6	r	$\to e$ 4, 5

EX:
SE CHOVER, A RUA FICA MOLHADA. A RUA ESTÁ SECA.

$p \to q$ $\neg q$

LOGO, NÃO CHOVEU

$\neg p$

p = CHOVEU

q = A ESTÁ MOLHADA

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ \text{M.T.}$$

MODUS TOLLENS

EX: $p \to (q \to r),\ p,\ \neg r \ \vdash\ \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	PREMISSA
2	p	
3	$\neg r$	
4	$q \to r$	$\to e$ 2, 1
5	$\neg q$	M.T. 4, 3

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}$$

EX: SE VOCÊ É FRANCÊS, ENTÃO VOCÊ É EUROPEU

É VERDADE (NO MUNDO REAL), MAS
NÃO DEPENDE DE VOCÊ SER OU NÃO FRANCÊS

SUPOSIÇÃO : ELEMENTO FORMAL

- M.T. DIZ QUE $p \to q, \neg q \vdash \neg p$
- UMA OUTRA FÓRMULA $p \to q \vdash (\neg q \to \neg p)$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$\neg q$	SUPOSIÇÃO
3	$\neg p$	M.T. 1, 2
4	$\neg q \to \neg p$	$\to i$, 2, 3

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

SUPOSIÇÃO

Introdução da Implicação

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

- Para provar $\phi \to \psi$, precisamos supor (temporariamente) que vale ϕ
- Dentro da caixa podemos usar ϕ e tudo que foi provado antes
- Podemos abrir várias caixas separadas ou aninhadas

EX: PROVE $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

1	$\neg q \to \neg p$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	M.T. 1, 3
	$p \to \neg\neg q$	$\to i$ LINHAS

$$\frac{\neg q \to \neg p \qquad \neg\neg p}{\neg\neg q}\ \text{M.T.}$$

$\sqrt{-1} = i$

$$\frac{\underset{\neg q \to \neg p}{\phi \to \psi} \qquad \underset{\neg\neg p}{\neg\psi}}{\underset{\neg q}{\neg\phi}}\ \text{M.T.}$$

Ex: Prove $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

~~Exemplo errado~~

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	Se $\neg\neg q \wedge p$	Suposição
3	p	$\neg\neg i$ 2
4	Então $\neg\neg q$	M.T. 1, 3
	$(\neg\neg q \wedge p) \to \neg\neg q$	$\to i$ linhas

$p \to \neg\neg q$

$$\frac{\neg q \to \neg p \qquad \neg\neg p}{\neg\neg q}\ \text{M.T.}$$

$\sqrt{-1} = i$

$$\frac{\overset{\neg q \to \neg p}{\phi \to \psi} \qquad \overset{\neg\neg p}{\neg \psi}}{\underset{\neg q}{\neg \phi}}\ \text{M.T.}$$

EX: PROVE QUE $\vdash p \to p$

1	p	SUPOSIÇÃO
2	p	REPETIR 1

$p \to p$

1	$p \to p$	SUPOSIÇÃO
2	$p \to p$	REPETIÇÃO 1

$(p \to p) \to (p \to p)$

DEF: Fórmulas lógicas ϕ com sequente válido $\vdash \phi$ (sem premissa) são chamados de Teoremas

Ex:

1	$q \to r$	suposição
2	$\neg q \to \neg p$	suposição
3	p	suposição
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\to e$ M.P 6, 1
8	$p \to r$	$\to i$ 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 2-8
10	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to i$ 1-9

Ex: Prove $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \text{ M.P.}$$

1	$p \to q$	Premissa	
2	$p \wedge r$	Suposição	
3	p	$\wedge e_1$	2
4	q	$\to e$	3, 1
5	r	$\wedge e_2$	2
??	$q \wedge r$	$\wedge i$	4,5
??	$(p \wedge r) \to (q \wedge r)$	$\to i$	2 - ??

$r \to (p \wedge q)$

$$\cancel{\frac{p \to q}{q}\ \to e_2}$$

DISJUNÇÃO $\vee$

$\vee$-INTRODUÇÃO

→ SE TEMOS ϕ, ENTÃO $\phi \vee \psi$ É VÁLIDO MESMO QUE ψ SEJA FALSO

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

$\vee$-REMOÇÃO

$\phi \vee \psi$ → PRECISAMOS ENCONTRAR UMA CONSEQUÊNCIA COMUM DE ϕ E DE ψ

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{array}{|c|}\hline \phi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \psi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline\end{array}}{\chi}\ \vee e$$

χ CHI

EX: $p \vee q \vdash q \vee p$ (COMUTATIVIDADE)

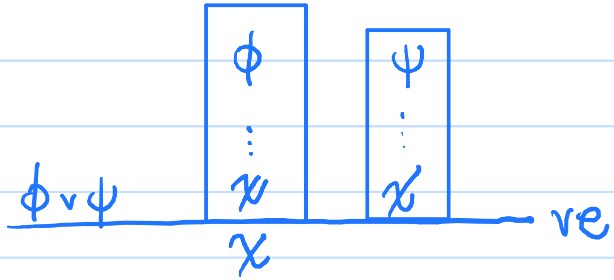
$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p = \chi$	$\vee i_2$ 2
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$q \vee p = \chi$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p = \chi$	$\vee e$ 1, 2-3, 4-5

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e$$

ASSOCIATIVIDADE $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\,\text{vi}_1$ $\qquad$ $\dfrac{\phi}{\psi \vee \phi}\,\text{vi}_2$



1	$(p \vee q) \vee r$	PREMISSA
2	$p \vee q$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$p \vee (q \vee r)$	vi$_1$ 3
5	q	SUPOSIÇÃO
6	$q \vee r$	vi$_1$ 5
7	$p \vee (q \vee r)$	vi$_2$ 6
8	$p \vee (q \vee r)$	ve 2, 3-4, 5-7
9	r	SUPOSIÇÃO
10	$q \vee r$	vi$_2$ 9
11	$p \vee (q \vee r)$	vi$_2$ 10
12	$p \vee (q \vee r)$	ve 1, 2-8, 9-11

DISTRIBUTIVIDADE : $p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$

$$\frac{\phi}{\phi \lor \psi}\ \lor i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \lor \phi}\ \lor i_2$$

$$\frac{\phi \lor \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \lor e$$

1	$p \land (q \lor r)$	PREMISSA
2	p	$\land e_1$ 1
3	$q \lor r$	$\land e_2$ 1
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$p \land q$	$\land i$ 2, 4
6	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$\lor i_1$ 5
7	r	SUPOSIÇÃO
8	$p \land r$	$\land i$ 2, 7
9	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$\lor i_2$ 8
10	$(p \land q) \lor (p \land r)$	$\lor e$ 3, 4-6, 7-9

Ex: $\vdash p \to (q \to p)$

p = CHOVEU

q = TODO ELEFANTE É ROSA

1	p	SUPOSIÇÃO
2	q	SUPOSIÇÃO
3	p	CÓPIA 1
4	$q \to p$	$\to i$ 2-3
5	$p \to (q \to p)$	$\to i$ 1-4

Regras da Negação

símbolo da contradição

DEF: Uma contradição é uma fórmula da forma $\phi \wedge (\neg \phi)$ ou $(\neg \phi) \wedge \phi$

$$\frac{\perp}{\phi}\ \perp e \qquad\qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp}\ \neg e$$

EX: $(\neg p) \vee q \vdash p \to q$

1 $(\neg p) \vee q$ — Premissa

2 $\neg p$ — Suposição

3 p — Suposição

4 $\perp$ — $\neg e$ 3, 2

5 q — $\perp e$ 4

6 $p \to q$ — $\to i$ 3–5

q — Suposição

p — Suposição

q — Cópia 2

$p \to q$ — $\to i$ 3–4

7 $p \to q$ — $\vee e$ 1, 2–6, 2–5

Introdução da Negação

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

Ex: $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

1	$p \to q$	Premissa
2	$p \to \neg q$	Premissa
3	p	Suposição
4	q	$\to e$ 3, 1
5	$\neg q$	$\to e$ 3, 2
6	$\bot$	$\neg e$ 4, 5
7	$\neg p$	$\neg i$ (± Prova por contradição)

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} \neg \phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}} \\ \phi \end{array}$$

REGRAS DERIVADAS

Modus Tollens : $\phi \to \psi , \neg\psi \vdash \neg\phi$

1	$\phi \to \psi$	Prem.
2	$\neg\psi$	Prem.
3	ϕ	Supos.
4	ψ	$\to$e 3,1
5	$\bot$	$\neg$e 4,2
6	$\neg\phi$	$\neg$i 3-5

Lei do Terceiro Excluído (Tertium Non Datur)

$\vdash \phi \vee \neg\phi$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	Suposição
2	ϕ	Suposição
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4	$\bot$	$\neg e$ 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2–4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7	$\bot$	$\neg e$ 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg i$ 1–7
9	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg e$ 8

Fórmulas equivalentes

Def: Sejam ϕ e ψ fórmulas da lógica proposicional

Dizemos que ϕ e ψ são equivalentes se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$

Notação $\phi \dashv\vdash \psi$

Ex: $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg(p \vee q) \dashv\vdash (\neg p) \wedge (\neg q)$

$p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$

$p \to q \dashv\vdash (\neg p) \vee q$

$(p \wedge q) \to p \dashv\vdash r \vee (\neg r)$

$(p \wedge q) \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$

DEF: Um número é racional se pode ser escrito como uma fração a/b, e irracional caso contrário

OBS: Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

TEO: Existem números irracionais a e b t.q. a^b é racional

Prova: Tome $b = \sqrt{2}$. → irracional

Sabemos que b^b é racional ou b^b é irracional.

(i) Se b^b é racional, tome $a = b$ e temos os dois números desejados

(ii) Então podemos supor que b^b é irracional

Neste caso tomamos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = b^b$ que é irracional

Mas $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ é racional $\square$

LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UMA LINGUAGEM FORMAL

→ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL DEVEM SER EXPRESSÕES ESCRITAS COM O ALFABETO $\{p, q, r, \ldots\} \cup \{p_1, p_2, \ldots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$

→ NÃO É SÓ ISSO

EX: $(\neg)()\vee pq$ → É UMA EXPRESSÃO NO ALFABETO, MAS NÃO FAZ SENTIDO

→ PRECISAMOS DEFINIR FÓRMULAS BEM FORMADAS

DEF: AS FÓRMULAS BEM FORMADAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL SÃO AS FÓRMULAS QUE OBTEMOS USANDO AS REGRAS ABAIXO UM NÚMERO FINITO DE VEZES

ÁTOMO: TODO ÁTOMO PROPOSICIONAL $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$ É UMA FÓRMULA BEM FORMADA

SE ϕ E ψ SÃO FÓRMULAS BEM FORMADAS, ENTÃO

$\neg$: $(\neg \phi)$ TAMBÉM É
$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ TAMBÉM É
$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ TAMBÉM É
$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ TAMBÉM É

OBS: SE UMA FÓRMULA NÃO PODE SER CONSTRUÍDA ASSIM, ENTÃO ELA NÃO É BEM FORMADA

→ Modelo indutivo

BACKUS NAUR FORM

$$\phi ::= p \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi)$$

$\neg$: $(\neg \phi)$ TAMBÉM É

$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ TAMBÉM É

$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ TAMBÉM É

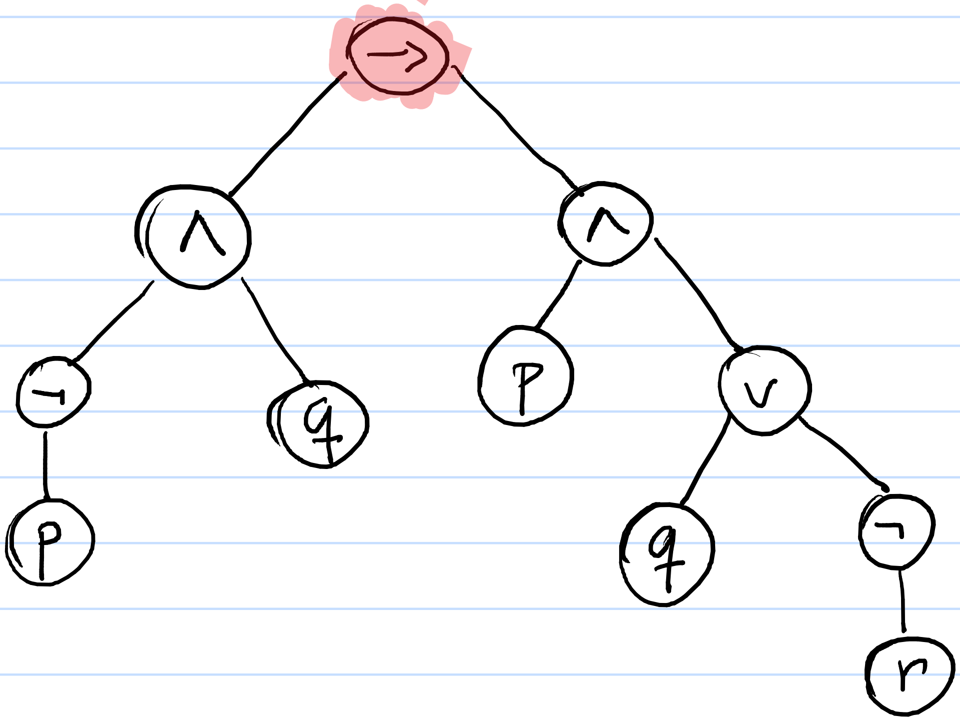
$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ TAMBÉM É

COMO DECIDIR QUE UMA FÓRMULA É BEM FORMADA?

PRINCÍPIO DA INVERSÃO: PODEMOS INVERTER O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO:

POR MAIS QUE TENHAMOS CINCO REGRAS DE CONSTRUÇÃO, HÁ UMA ÚNICA REGRA QUE FOI A ÚLTIMA A SER USADA.

EX: $(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



ÁRVORE DE PARSE

→ PRECISAMOS DOS PARÊNTESES PRA REMOVER AMBIGUIDADES

→ OS PARÊNTESES CODIFICAM A ÁRVORE

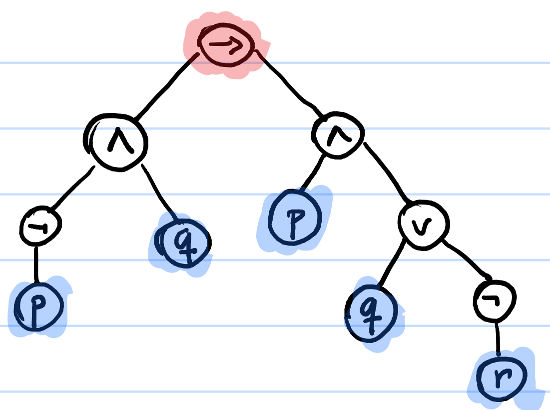
→ PARA MOSTRAR QUE UMA FÓRMULA NÃO É BEM FORMADA, PRECISAMOS TENTAR DESENHAR SUA ÁRVORE DE PARSE

OBS: AS FOLHAS SÃO ÁTOMOS

OS NÓS INTERNOS SÃO OS CONECTORES LÓGICOS: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

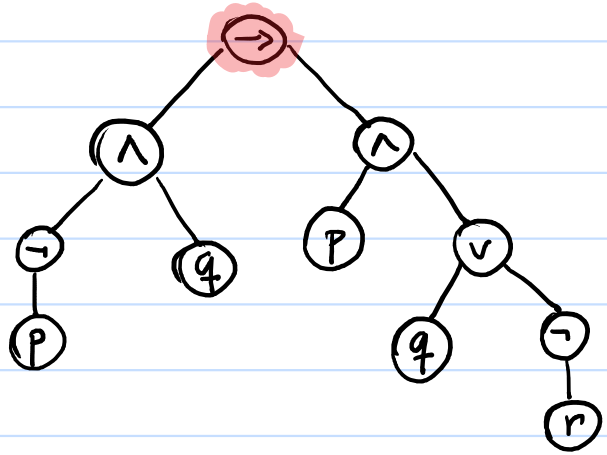
OS NÓS DO TIPO $\neg$ POSSUEM EXATAMENTE UM FILHO

OS NÓS DO TIPO $\wedge, \vee, \rightarrow$ POSSUEM EXATAMENTE DOIS FILHOS



→ DADA UMA FÓRMULA, UMA SUBFÓRMULA É UMA FÓRMULA CORRESPONDENTE A UMA SUBÁRVORE DA ÁRVORE DE PARSE

EX.: $(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



$((\neg p) \wedge q)$

$(p \wedge (q \vee (\neg r)))$

$(q \vee (\neg r))$

$(\neg r)$

$(\neg p)$

r

p

q

$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$

$$(c\wedge m)\to t,\ h\wedge\neg s,\ (h\wedge(\neg(s\vee c)))\to p \ \vdash\ (m\wedge\neg t)\to p$$

1	$(c\wedge m)\to t$	
2	$h\wedge\neg s$	Premissas
3	$(h\wedge(\neg(s\vee c)))\to p$	
4	h	$\wedge e_1$ 2
5	$\neg s$	$\wedge e_2$ 2
6	$m\wedge\neg t$	suposição
7	m	$\wedge e_1$ 6
8	$\neg t$	$\wedge e_2$ 6
9	c	suposição
10	$c\wedge m$	$\wedge i$ 9, 7
11	t	$\to e$ 10, 1
12	$\bot$	$\neg e$ 11, 8
13	$\neg c$	
14	$(\neg s)\wedge(\neg c)$	$\wedge i$ 5, 12
15	$\neg(s\vee c)$	EQUIV 13
16	$h\wedge\neg(s\vee c)$	$\wedge$ 4,
17	p	$\to e$ x, 3
18	$(m\wedge\neg t)\to p$	

$h\wedge\neg(s\vee c)\to p$

$h\wedge(\neg(s\vee c)\to p)$

$h\wedge\neg((s\vee c)\to p)$

$(\neg s)\wedge(\neg c)$

$(s \to p) \vee (t \to q) \vdash (s \to q) \vee (t \to p)$ $A \to B \dashv\vdash$

$p \vdash q \to p$

$A \to (B \to C)$

1 $(s \to p) \vee (t \to q)$ PREMISSA $(\neg A) \vee (B \to C)$

2 $(s \to p)$

3 $s \vee \neg s$ LTE

4 s SUP.

5 p $\to e$ 2, 4

6 t SUPOS.

7 p CÓPIA

8 $t \to p$ $\to i$ 6-7

$(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee i_2$ 8

$\neg s$ SUPOS

s SUP.

$\perp$ $\neg e$

q

$s \to q$

? $(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee i$

$(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee e$

$(t \to q)$

$t \vee \neg t$ LTE

$\vdots$

$(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee e$

$\vee e$ 1, 2-?, 2-?

$(s \to p) \lor (t \to q)$ PREMISSA

$(s \to p)$

$(t \to q)$

ve

ϕ

ψ

$\phi \lor \psi$ ve

$\vdash (s \to q) \lor (t \to p)$

SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

→ JÁ DESENVOLVEMOS UM "CÁLCULO" PARA VERIFICAR SE A PARTIR DAS FÓRMULAS $\phi_1, \ldots, \phi_n$ PODEMOS CONCLUIR UMA FÓRMULA ψ.

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

→ VAMOS DESENVOLVER UMA OUTRA RELAÇÃO ENTRE AS PREMISSAS E A CONCLUSÃO QUE REPRESENTAMOS POR

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$$

→ VAMOS ESTUDAR VALORES VERDADE DAS FÓRMULAS ATÔMICAS NA PREMISSA E NA CONCLUSÃO, E COMO OS CONECTIVOS LÓGICOS MANIPULAM ELES

EX: O VALOR VERDADE DE $p \wedge q$ É DETERMINADO PELO VALOR VERDADE DE p, DE q, E PELO SENTIDO DE $\wedge$.

$p \wedge q$ É VERDADE SE E SOMENTE SE p E q SÃO VERDADE

OBS: $\wedge$ PRECISA SABER SE p E q SÃO VERDADE, MAS NÃO PRECISA SABER O QUE p E q DIZEM SOBRE A REALIDADE.

DEF: 1. CONJUNTO DE VALORES VERDADE CONTÉM DOIS ELEMENTOS T E F

$T \rightarrow$ VERDADE

$F \rightarrow$ FALSO

2. UMA AVALIAÇÃO OU MODELO DE UMA FÓRMULA ϕ É UMA ATRIBUIÇÃO DE CADA ÁTOMO PROPOSICIONAL EM ϕ A UM VALOR VERDADE

EX: $q \leftarrow T$ E $p \leftarrow F$ É UMA AVALIAÇÃO DE $\underbrace{p \vee \neg q}_{\phi}$

$q \leftarrow F$ E $p \leftarrow T$

$q \leftarrow F$ E $p \leftarrow F$

$q \leftarrow T$ E $p \leftarrow T$

O SIGNIFICADO DE $\wedge$ É UMA FUNÇÃO DE DOIS ARGUMENTOS

CADA ARGUMENTO É UM VALOR VERDADE E O RESULTADO É OUTRO VALOR VERDADE

→ TABELA VERDADE DE $\wedge$ / OUTROS CONECTIVOS

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

$$\frac{\top}{T} \qquad \frac{\bot}{F}$$

ϕ	ψ	$\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\phi \vee \psi$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$\sim$

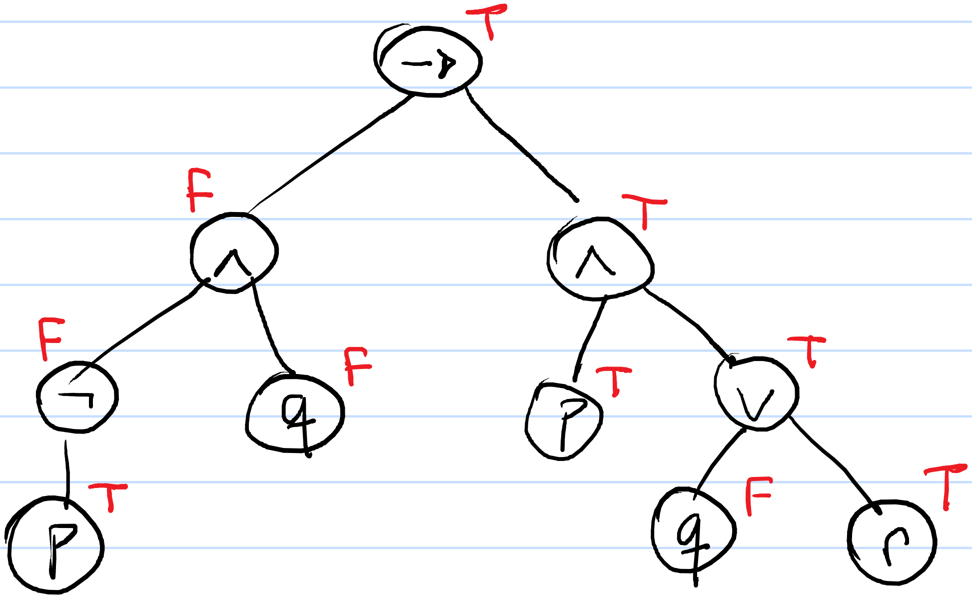
ϕ	ψ	$\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

→ DADA FÓRMULA ϕ COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $p_1, \dots, p_n$, PODEMOS CONSTRUIR UMA TABELA VERDADE PARA ϕ.

TEREMOS 2^n LINHAS, CADA LINHA COM UMA DAS POSSÍVEIS COMBINAÇÕES DE T E F PARA $p_1, \dots, p_n$

→ QUANDO n É MUITO GRANDE, CONSTRUIR ESSA TABELA É IMPOSSÍVEL COMPUTACIONALMENTE

Ex $((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$ $p = T,\ q = F,\ r = T$



p

q

r

$\neg p$

$(\neg p) \wedge q$

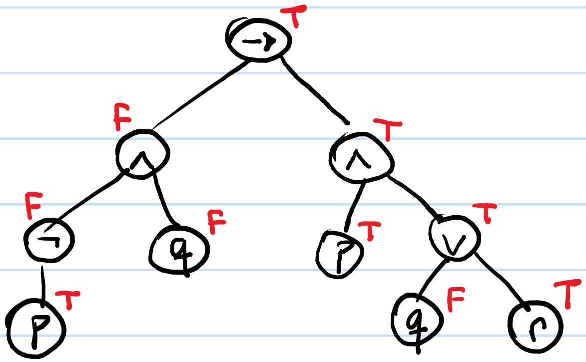
$q \vee r$

$p \wedge (q \vee r)$

$((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$

<u>Ex</u>: Tabela

Ex $((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$ $\quad p = T,\ q = F,\ r = T$



p

q

r

$\neg p$

$(\neg p) \wedge q$

$q \vee r$

$p \wedge (q \vee r)$

$((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$

Ex: Tabela

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p) \wedge q$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	F	F	T

INDUÇÃO MATEMÁTICA

EX: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

COMO PROVAMOS?

→ SUPONHA QUE QUEIRAMOS PROVAR UMA PROPRIEDADE M QUE ACREDITO SER VERDADE PARA TODO NÚMERO NATURAL

→ ESCREVEMOS M(5) PARA DIZER QUE A PROPRIEDADE M VALE P/ 5

→ SUPONHA QUE SAIBAMOS

1 CASO BASE: M VALE PARA 1

HIPÓTESE DE INDUÇÃO

2 PASSO INDUTIVO: SE M VALE PARA n, ENTÃO M VALE PARA $n+1$.

DEF: O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA DIZ QUE DADAS ESSAS DUAS INFORMAÇÕES, M VALE PARA TODO NÚMERO NATURAL.

TEOREMA: $1+2+\dots+n$ É IGUAL A $\frac{n(n+1)}{2}$ PARA TODO NATURAL n

PROVA: ESCREVEMOS LHS_n PARA $1+2+\dots+n$ E

RHS_n PARA $\frac{n(n+1)}{2}$ — $M(n)$

QUEREMOS MOSTRAR QUE $LHS_n = RHS_n$ PARA TODO NATURAL n
PRECISO MOSTRAR DUAS COISAS

1) $LHS_1 = RHS_1$

DE FATO, $LHS_1 = 1 = \frac{1(2)}{2} = RHS_1$

2) SE $LHS_n = RHS_n$, ENTÃO $LHS_{n+1} = RHS_{n+1}$

SUPONHA QUE $LHS_n = RHS_n$

NOTE QUE $LHS_{n+1} = 1+\dots+n+(n+1) = LHS_n + (n+1)$

$$= RHS_n + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = RHS_{n+1}$$

LOGO, PELO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO, $LHS_n = RHS_n$ PARA TODO n.

EX: NAS FÓRMULAS BEM FORMADAS TEMOS $\#(= \#)$

<u>DEF</u>: DADA UMA FÓRMULA BEM FORMADA ϕ, A ALTURA DE ϕ É $1+$ O COMPRIMENTO DE UM MAIOR CAMINHO EM SUA ÁRVORE DE PARSE

$M(i)$ = "TODAS AS FÓRMULAS DE ALTURA NO MÁXIMO i POSSUEM O MEMO NÚMERO DE (E)"

SEJA ϕ UMA FÓRMULA BEM FORMADA

CASO BASE $(M(1))$: SE ϕ É UMA FÓRMULA DE ALTURA 1, ENTÃO ϕ É UM ÁTOMO PROPOSICIONAL, QUE NÃO POSSUI (NEM).

PASSO INDUTIVO: $n > 1$. A RAÍZ DA ÁRVORE DE PARSE DE ϕ DEVE SER $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, POIS ϕ É BEM FORMADA

SUPONHA $M(n-1)$. ASSUMA QUE A RAIZ É $\rightarrow$ ENTÃO $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ ONDE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO FÓRMULAS COM ALTURA NO MÁXIMO $n-1$.
COMO VALE $M(n-1)$, TEMOS QUE $\#(_{\phi_1} = \#)_{\phi_1}$ E $\#(_{\phi_2} = \#)_{\phi_2}$.
PORTANTO

DEF: DADA UMA FÓRMULA BEM FORMADA ϕ, A ALTURA DE ϕ É $1+$ O COMPRIMENTO DE UM MAIOR CAMINHO EM SUA ÁRVORE DE PARSE

$M(i)$ = "TODAS AS FÓRMULAS DE ALTURA NO MÁXIMO i POSSUEM O MEMO NÚMERO DE (E)"

SEJA ϕ UMA FÓRMULA BEM FORMADA

CASO BASE $(M(1))$: SE ϕ É UMA FÓRMULA DE ALTURA 1, ENTÃO ϕ É UM ÁTOMO PROPOSICIONAL, QUE NÃO POSSUI (NEM).

PASSO INDUTIVO: $m > 1$. A RAÍZ DA ÁRVORE DE PARSE DE ϕ DEVE SER $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, POIS ϕ É BEM FORMADA

SUPONHA $M(m-1)$. ASSUMA QUE A RAIZ É $\rightarrow$ ENTÃO $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ ONDE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO FÓRMULAS COM ALTURA NO MÁXIMO $m-1$.
COMO VALE $M(m-1)$, TEMOS QUE $\#(_{\phi_1} = \#)_{\phi_1}$ E $\#(_{\phi_2} = \#)_{\phi_2}$.

PORTANTO, $\#(_{\phi} = \#(_{\phi_1} + \#(_{\phi_2} + 1 = \#)_{\phi_1} + \#)_{\phi_2} + 1 = \#)_{\phi}$

SOLIDEZ DA LÓGICA PROPOSICIONAL

DEF: SE PARA TODAS AVALIAÇÕES EM QUE $\phi_1, \dots, \phi_n$ SÃO AVALIADOS EM T TEMOS QUE ψ É AVALIADO EM T, DIZEMOS QUE VALE

$$\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$$

↳ VINCULAÇÃO SEMÂNTICA

EX 1: $p \wedge q \models p$? SIM

p	q	$p \wedge q$	p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

EX 2: $p \vee q \models p$? NÃO

p	q	$p \vee q$	p
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

2. UMA AVALIAÇÃO OU MODELO DE UMA FÓRMULA ϕ É UMA ATRIBUIÇÃO DE CADA ÁTOMO PROPOSICIONAL EM ϕ A UM VALOR VERDADE