Regras de Dedução natural

ϕ_1

$\vdots$

ϕ_m

Premissas

ψ_1 — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\vdots$ — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\vdots$

ψ_s — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\boxed{\psi^*}$ — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

Conclusão desejada

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi$

Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL

Símbolos lógicos

$\wedge$

$\vee$

$\neg$

$\rightarrow$

CONJUNÇÃO

$\wedge$-INTRODUÇÃO : Conclui $\phi \wedge \psi$ se já sabemos ϕ e ψ

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

↳ CODIFICAÇÃO DA REGRA

$\wedge$-ELIMINAÇÃO : Conclui ϕ e ψ se já sabemos $\phi \wedge \psi$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

Ex: Prove que $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

Premissa: $p \wedge q$, r , Conclusão: $q \wedge r$

Índice	Fórmulas	Justificativas
1	$p \wedge q$	Premissa
2	r	Premissa
3	q	$\wedge E_2$ 1
	$\cancel{r \wedge q}$ $q \wedge r$	$\wedge i$ ~~2,3~~ 3,2

Eliminação do $\wedge$ aplicado na fórmula 1 extraindo o segundo argumento

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1$$

EX: PROVE QUE $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	PREM.
2	$s \wedge t$	PREM.
3	$p \wedge q$	$\wedge E_1$ 1
4	q	$\wedge E_2$ 3
5	s	$\wedge E_1$ 2
6	$q \wedge s$	$\wedge i$ 4,5

NEGAÇÃO DUPLA

EX: NÃO É VERDADE QUE NÃO ESTÁ CHOVENDO = ESTÁ CHOVENDO

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e \qquad\qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

EX: $p, \neg\neg(q\wedge r) \vdash (\neg\neg p)\wedge r$

1	p	PREMISSA
2	$\neg(\neg(q\wedge r))$	PREMISSA
3	$q\wedge r$	$\neg\neg e$ 2
4	r	$\wedge e_2$ 3
5	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
6	$(\neg\neg p)\wedge r$	$\wedge i$ 5,4

Implicação

Símbolos lógicos

$\wedge$ Conjunção

$\vee$ Disjunção

$\neg$ Negação

$\rightarrow$ Implicação

Ex: P = chove

$P \rightarrow q$ = se chove, então fica molhado

Dado ϕ e $\phi \rightarrow \psi$, temos ψ

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow e$$

(Modus Ponens)

Ex: Prove que $p,\ p \rightarrow q,\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q$

Ex: Prove que $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

1	p	Prem
2	$p \to q$	Prem
3	$p \to (q \to r)$	Prem
4	q	$\to e$ 1, 2
5	$q \to r$	$\to e$ 1, 3
6	r	$\to e$ 4, 5

Ex: Se chover, a rua fica molhada. A rua está seca.

$p \to q$ $\neg q$

Logo, não choveu

$\neg p$

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg \psi}{\neg \phi} \; \text{M.T.}$$

p = choveu

q = a está molhada

Modus Tollens

Ex: $p \to (q \to r),\ p,\ \neg r \ \vdash \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	Premissa
2	p	
3	$\neg r$	
4	$q \to r$	$\to e$ 2, 1
5	$\neg q$	M.T. 4, 3

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}$$

EX: SE VOCÊ É FRANCÊS, ENTÃO VOCÊ É EUROPEU

É VERDADE (NO MUNDO REAL), MAS
NÃO DEPENDE DE VOCÊ SER OU NÃO FRANCÊS

<u>SUPOSIÇÃO</u> : ELEMENTO FORMAL

- M.T. DIZ QUE $p \to q, \neg q \vdash \neg p$
- UMA OUTRA FÓRMULA $p \to q \vdash (\neg q \to \neg p)$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$\neg q$	SUPOSIÇÃO
3	$\neg p$	M.T. 1, 2
4	$\neg q \to \neg p$	$\to$i, 2,3

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

SUPOSIÇÃO