Regras de Dedução natural

ϕ_1

$\vdots$

ϕ_m — Premissas

ψ_1 — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\vdots$ — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\vdots$

ψ_s — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

$\boxed{\psi^*}$ — Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

Conclusão desejada

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi$

Justificativa (Regra utilizada para obter ψ_i a partir de algumas fórmulas obtido anteriormente

Regras de Dedução Natural

Símbolos lógicos

$\wedge$

$\vee$

$\neg$

$\rightarrow$

Conjunção

$\wedge$-introdução: Conclui $\phi \wedge \psi$ se já sabemos ϕ e ψ

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

↳ Codificação da regra

$\wedge$-eliminação: Conclui ϕ e ψ se já sabemos $\phi \wedge \psi$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

Ex: Prove que $p \land q, r \vdash q \land r$

Premissa: $p \land q$, r , Conclusão: $q \land r$

Índice	Fórmulas	Justificativas
1	$p \land q$	Premissa
2	r	Premissa
3	q	$\land E_2$ 1
	~~$r \land q$~~ $q \land r$	$\land i$ ~~2, 3~~ 3, 2

Eliminação do $\land$ aplicado na fórmula 1 extraindo o segundo argumento

$$\frac{\phi \land \psi}{\psi} \land E_2$$

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \land \psi} \land i$$

$$\frac{\phi \land \psi}{\phi} \land E_1$$

Ex: PROVE QUE $(p \land q) \land r,\ s \land t \vdash q \land s$

1	$(p \land q) \land r$	PREM.
2	$s \land t$	PREM.
3	$p \land q$	$\land E_1$ 1
4	q	$\land E_2$ 3
5	s	$\land E_1$ 2
6	$q \land s$	$\land i$ 4,5

NEGAÇÃO DUPLA

Ex: NÃO É VERDADE QUE NÃO ESTÁ CHOVENDO = ESTÁ CHOVENDO

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e \qquad\qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

Ex: $p,\ \neg\neg(q\wedge r) \vdash (\neg\neg p)\wedge r$

1	p	PREMISSA
2	$\neg\neg(q\wedge r)$	PREMISSA
3	$q\wedge r$	$\neg\neg e$ 2
4	r	$\wedge e_2$ 3
5	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
6	$(\neg\neg p)\wedge r$	$\wedge i$ 5,4

Implicação

Símbolos lógicos

$\wedge$ Conjunção

$\vee$ Disjunção

$\neg$ Negação

$\to$ Implicação

EX: p = chove

$p \to q$ = se chove, então fica molhado

Dado ϕ e $\phi \to \psi$, temos ψ

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

(Modus Ponens)

EX: Prove que $p,\ p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash q$

EX: PROVE QUE $p,\ p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash r$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

1	p	PREM
2	$p \to q$	PREM
3	$p \to (q \to r)$	PREM
4	q	$\to e$ 1, 2
5	$q \to r$	$\to e$ 1, 3
6	r	$\to e$ 4, 5

EX:

SE CHOVER, A RUA FICA MOLHADA. A RUA ESTÁ SECA.

$p \to q$ $\neg q$

LOGO, NÃO CHOVEU

$\neg p$

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg \psi}{\neg \phi}\ \text{M.T.}$$

MODUS TOLLENS

p = CHOVEU

q = A ESTÁ MOLHADA

EX: $p \to (q \to r),\ p,\ \neg r \ \vdash \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	PREMISSA
2	p	
3	$\neg r$	
4	$q \to r$	$\to e$ 2, 1
5	$\neg q$	M.T. 4, 3

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}$$

EX: SE VOCÊ É FRANCÊS, ENTÃO VOCÊ É EUROPEU

É VERDADE (NO MUNDO REAL), MAS
NÃO DEPENDE DE VOCÊ SER OU NÃO FRANCÊS

SUPOSIÇÃO : ELEMENTO FORMAL

- M.T. DIZ QUE $p \to q, \neg q \vdash \neg p$
- UMA OUTRA FÓRMULA $p \to q \vdash (\neg q \to \neg p)$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$\neg q$	SUPOSIÇÃO
3	$\neg p$	M.T. 1, 2
4	$\neg q \to \neg p$	$\to$i, 2, 3

$$\frac{\boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}}{\phi \to \psi} \to i$$

SUPOSIÇÃO

INTRODUÇÃO DA IMPLICAÇÃO

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

- PARA PROVAR $\phi \to \psi$, PRECISAMOS SUPOR (TEMPORARIAMENTE) QUE vale ϕ
- DENTRO DA CAIXA PODEMOS USAR ϕ E TUDO QUE FOI PROVADO ANTES
- PODEMOS ABRIR VÁRIAS CAIXAS SEPARADAS OU ANINHADAS

Ex: Prove $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	p	Suposição
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	M.T. 1, 3
	$p \to \neg\neg q$	$\to i$ linhas

$$\frac{\neg q \to \neg p \qquad \neg\neg p}{\neg\neg q}\ \text{M.T.}$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\frac{\overset{\neg q \to \neg p}{\phi \to \psi} \qquad \overset{\neg\neg p}{\neg \psi}}{\underset{\neg q}{\neg \phi}}\ \text{M.T.}$$

Ex: Prove $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	Se $\neg\neg q \wedge p$	Suposição
3	p	$\neg\neg i$ 2
4	Então $\neg\neg q$	M.T. 1, 3
	$(\neg\neg q \wedge p) \to \neg\neg q$	$\to i$ linhas

$p \to \neg\neg q$

Exemplo errado

$$\frac{\neg q \to \neg p \qquad \neg\neg p}{\neg\neg q}\ \text{M.T.}$$

$\sqrt{-1} = i$

$$\frac{\overset{\neg q \to \neg p}{\phi \to \psi} \qquad \overset{\neg\neg p}{\neg\psi}}{\underset{\neg q}{\neg\phi}}\ \text{M.T.}$$

EX: PROVE QUE $\vdash p \to p$

1	p	SUPOSIÇÃO
2	p	REPETIR 1

$p \to p$

1	$p \to p$	SUPOSIÇÃO
2	$p \to p$	REPETIÇÃO 1

$(p \to p) \to (p \to p)$

DEF: Fórmulas lógicas ϕ com sequente válido $\vdash \phi$ (sem premissa) são chamados de Teoremas

EX:

1	$q \to r$	Suposição
2	$\neg q \to \neg p$	Suposição
3	p	Suposição
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\to e$ M.P 6, 1
8	$p \to r$	$\to i$ 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 2-8
10	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to i$ 1-9

Ex: Prove $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \text{M.P.}$$

1	$p \to q$	Premissa
2	$p \wedge r$	Suposição
3	p	$\wedge e_1$ 2
4	q	$\to e$ 3, 1
5	r	$\wedge e_2$ 2
??	$q \wedge r$	$\wedge i$ 4, 5
??	$(p \wedge r) \to (q \wedge r)$	$\to i$ 2 - ??

$r \to (p \wedge q)$

$\cancel{p \to q}$

$\cancel{\to e_2}$

$\cancel{q}$

DISJUNÇÃO $\vee$

$\vee$-INTRODUÇÃO

→ SE TEMOS ϕ, ENTÃO $\phi \vee \psi$ É VÁLIDO MESMO QUE ψ SEJA FALSO

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ vi_1 \qquad\qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ vi_2$$

$\vee$-REMOÇÃO

$\phi \vee \psi$ → PRECISAMOS ENCONTRAR UMA CONSEQUÊNCIA COMUM DE ϕ E DE ψ

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ ve$$

χ CHI

EX: $p \vee q \vdash q \vee p$ (COMUTATIVIDADE)

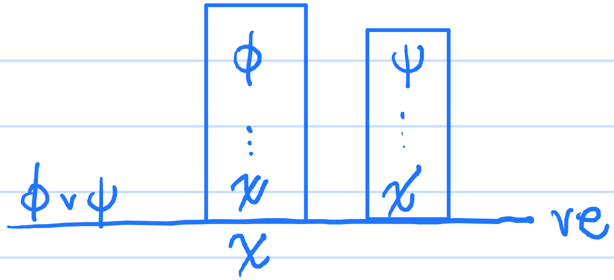
$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\, vi_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\, vi_2$$

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p = \chi$	vi_2 2
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$q \vee p = \chi$	vi_1 4
6	$q \vee p = \chi$	ve 1, 2-3, 4-5

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}}{\chi}\, ve$$

ASSOCIATIVIDADE $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}$ vi₁ $\qquad \dfrac{\phi}{\psi \vee \phi}$ vi₂



1	$(p \vee q) \vee r$	PREMISSA
2	$p \vee q$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$p \vee (q \vee r)$	vi₁ 3
5	q	SUPOSIÇÃO
6	$q \vee r$	vi₁ 5
7	$p \vee (q \vee r)$	vi₂ 6
8	$p \vee (q \vee r)$	ve 2, 3-4, 5-7
9	r	SUPOSIÇÃO
10	$q \vee r$	vi₂ 9
11	$p \vee (q \vee r)$	vi₂ 10
12	$p \vee (q \vee r)$	ve 1, 2-8, 9-11

DISTRIBUTIVIDADE : $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e$$

1	$p \wedge (q \vee r)$	PREMISSA
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$q \vee r$	$\wedge e_2$ 1
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2, 4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_1$ 5
7	r	SUPOSIÇÃO
8	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2, 7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_2$ 8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

Ex: $\vdash p \to (q \to p)$

p = CHOVEU

q = TODO ELEFANTE É ROSA

1	p	SUPOSIÇÃO
2	q	SUPOSIÇÃO
3	p	CÓPIA 1
4	$q \to p$	$\to$i 2-3
5	$p \to (q \to p)$	$\to$i 1-4

Regras da Negação

símbolo da contradição

Def: Uma contradição é uma fórmula da forma $\phi \wedge (\neg\phi)$ ou $(\neg\phi) \wedge \phi$

$$\frac{\perp}{\phi}\ \perp e \qquad\qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\perp}\ \neg e$$

Ex: $(\neg p) \vee q \vdash p \to q$

1	$(\neg p) \vee q$	premissa		
2	$\neg p$	suposição	q	suposição
3	p	suposição	p	suposição
4	$\perp$	$\neg e$ 3, 2	q	cópia 2
5	q	$\perp e$ 4	$p \to q$	$\to i$ 3 - 4
6	$p \to q$	$\to i$ 3 - 5		
7	$p \to q$	$\vee e$ 1, 2-6, 2-5		

INTRODUÇÃO DA NEGAÇÃO

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

Ex: $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \to \neg q$	PREMISSA
3	p	SUPOSIÇÃO
4	q	$\to e$ 3, 1
5	$\neg q$	$\to e$ 3, 2
6	$\bot$	$\neg e$ 4,5
7	$\neg p$	$\neg i$ (± PROVA POR CONTRADIÇÃO)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg \phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\phi}$$

REGRAS DERIVADAS

MODUS TOLLENS : $\phi \rightarrow \psi , \neg \psi \vdash \neg \phi$

1	$\phi \rightarrow \psi$	PREM.
2	$\neg \psi$	PREM.
3	ϕ	SUPOS.
4	ψ	$\rightarrow e$ 3, 1
5	$\perp$	$\neg e$ 4, 2
6	$\neg \phi$	$\neg i$ 3–5

LEI DO TERCEIRO EXCLUÍDO (TERTIUM NON DATUR)

$\vdash \phi \lor \neg\phi$

1	$\neg(\phi \lor \neg\phi)$	SUPOSIÇÃO
2	ϕ	SUPOSIÇÃO
3	$\phi \lor \neg\phi$	$\lor i_1$ 2
4	$\bot$	$\neg e$ 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2–4
6	$\phi \lor \neg\phi$	$\lor i_2$ 5
7	$\bot$	$\neg e$ 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \lor \neg\phi)$	$\neg i$ 1–7
9	$\phi \lor \neg\phi$	$\neg\neg e$ 8

Fórmulas equivalentes

DEF: Sejam ϕ e ψ fórmulas da lógica proposicional

Dizemos que ϕ e ψ são equivalentes se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$

Notação $\phi \dashv\vdash \psi$

Ex: $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg(p \vee q) \dashv\vdash (\neg p) \wedge (\neg q)$

$p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$

$p \to q \dashv\vdash (\neg p) \vee q$

$(p \wedge q) \to p \dashv\vdash r \vee (\neg r)$

$(p \wedge q) \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$

DEF: UM NÚMERO É RACIONAL SE PODE SER ESCRITO COMO UMA FRAÇÃO a/b, E IRRACIONAL CASO CONTRÁRIO

OBS: SE p É UM NÚMERO PRIMO, ENTÃO $\sqrt{p}$ É IRRACIONAL.

TEO: EXISTEM NÚMEROS IRRACIONAIS a E b T.Q. a^b É RACIONAL

PROVA: TOME $b = \sqrt{2}$. → IRRACIONAL

SABEMOS QUE b^b É RACIONAL OU b^b É IRRACIONAL.

(i) SE b^b É RACIONAL, TOME $a=b$ E TEMOS OS DOIS NÚMEROS DESEJADOS

(ii) ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE b^b É IRRACIONAL

NESTE CASO TOMAMOS $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = b^b$ QUE É IRRACIONAL

MAS $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ É RACIONAL $\square$

LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UMA LINGUAGEM FORMAL

→ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL DEVEM SER EXPRESSÕES ESCRITAS COM O ALFABETO $\{p, q, r, \ldots\} \cup \{p_1, p_2, \ldots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$

→ NÃO É SÓ ISSO

EX: $(\neg)()\vee pq$ → É UMA EXPRESSÃO NO ALFABETO, MAS NÃO FAZ SENTIDO

→ PRECISAMOS DEFINIR FÓRMULAS BEM FORMADAS

DEF: As fórmulas bem formadas da lógica proposicional são as fórmulas que obtemos usando as regras abaixo um número finito de vezes

ÁTOMO: Todo átomo proposicional $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ é uma fórmula bem formada

Se ϕ e ψ são fórmulas bem formadas, então

$\neg$: $(\neg \phi)$ também é
$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ também é
$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ também é
$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ também é

OBS: Se uma fórmula não pode ser construída assim, então ela não é bem formada

→ Modelo indutivo

BACKUS NAUR FORM

$$\phi ::= p \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \to \phi)$$

$\neg$: $(\neg\phi)$ TAMBÉM É

$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ TAMBÉM É

$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ TAMBEM É

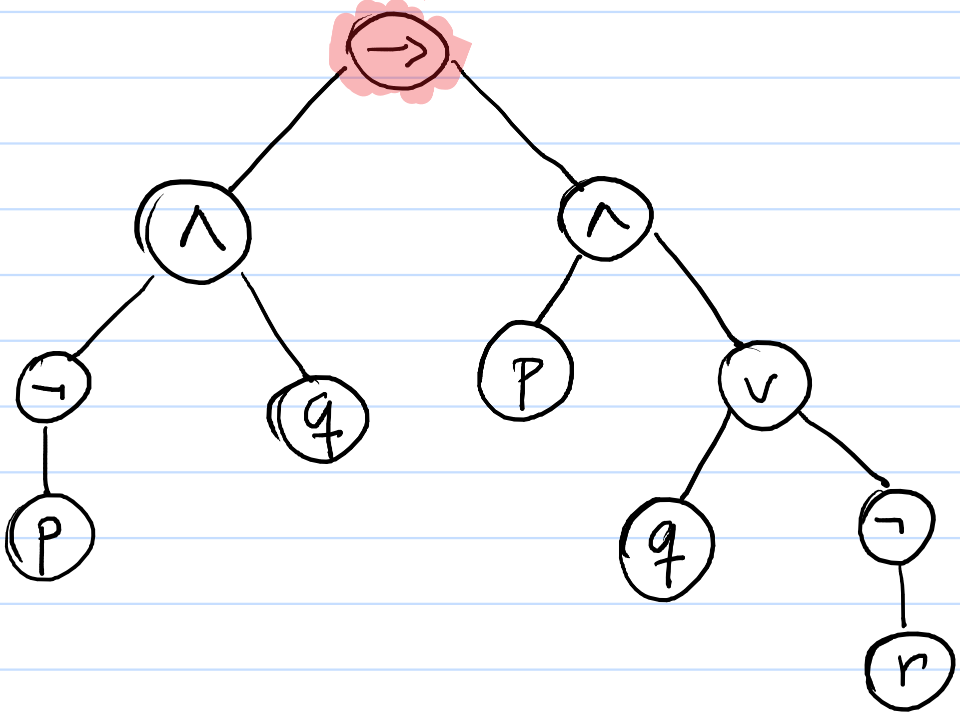
$\to$: $(\phi \to \psi)$ TAMBÉM É

COMO DECIDIR QUE UMA FÓRMULA É BEM FORMADA?

PRINCÍPIO DA INVERSÃO: PODEMOS INVERTER O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO:

POR MAIS QUE TENHAMOS CINCO REGRAS DE CONSTRUÇÃO, HÁ UMA ÚNICA REGRA QUE FOI A ÚLTIMA A SER USADA.

EX: $(((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



ÁRVORE DE PARSE

→ PRECISAMOS DOS PARÊNTESES PRA REMOVER AMBIGUIDADES

→ OS PARÊNTESES CODIFICAM A ÁRVORE

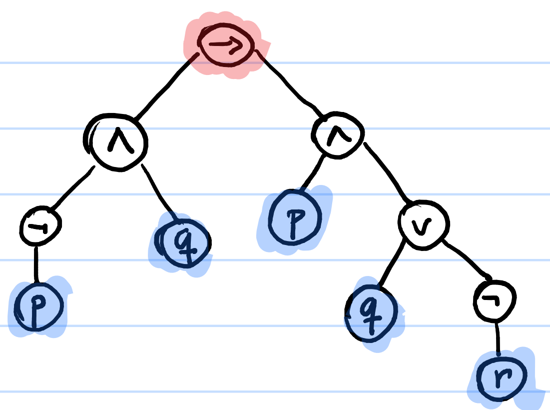
→ PARA MOSTRAR QUE UMA FÓRMULA NÃO É BEM FORMADA, PRECISAMOS TENTAR DESENHAR SUA ÁRVORE DE PARSE

OBS: AS FOLHAS SÃO ÁTOMOS

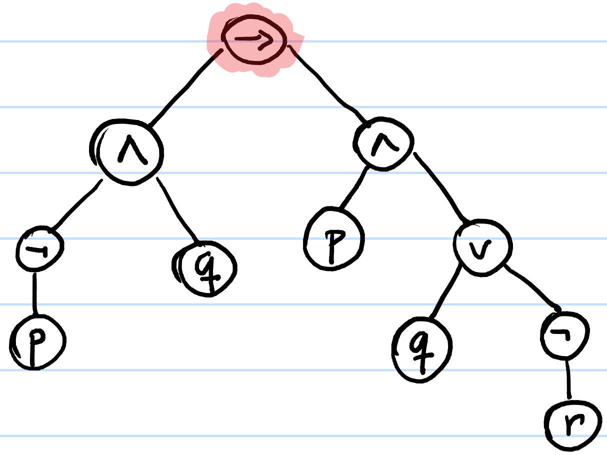
OS NÓS INTERNOS SÃO OS CONECTORES LÓGICOS: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

OS NÓS DO TIPO $\neg$ POSSUEM EXATAMENTE UM FILHO

OS NÓS DO TIPO $\wedge, \vee, \rightarrow$ POSSUEM EXATAMENTE DOIS FILHOS



→ DADA UMA FÓRMULA, UMA SUBFÓRMULA É UMA FÓRMULA CORRESPONDENTE A UMA SUBÁRVORE DA ÁRVORE DE PARSE



EX.: $(((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$

$((\neg p) \wedge q)$

$(p \wedge (q \vee (\neg r)))$

$(q \vee (\neg r))$

$(\neg r)$

$(\neg p)$

r

p

q

$(((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$

$(c \wedge m) \to t,\ h \wedge \neg s,\ (h \wedge (\neg(s \vee c))) \to p \quad \vdash \quad (m \wedge \neg t) \to p$

PREMISSAS

1	$(c \wedge m) \to t$	
2	$h \wedge \neg s$	
3	$(h \wedge (\neg(s \vee c))) \to p$	
4	h	$\wedge e_1$ 2
5	$\neg s$	$\wedge e_2$ 2
6	$m \wedge \neg t$	SUPOSIÇÃO
7	m	$\wedge e_1$ 6
8	$\neg t$	$\wedge e_2$ 6
9	c	SUPOSIÇÃO
10	$c \wedge m$	$\wedge i$ 9, 7
11	t	$\to e$ 10, 1
12	$\perp$	$\neg e$ 11, 8
13	$\neg c$	
14	$(\neg s) \wedge (\neg c)$	$\wedge i$ 5, 12
15	$\neg(s \vee c)$	EQUIV 13
16	$h \wedge \neg(s \vee c)$	$\wedge$ 4,
17	p	$\to e$ x, 3
18	$(m \wedge \neg t) \to p$	

$h \wedge \neg(s \vee c) \to p$

$h \wedge (\neg(s \vee c) \to p)$

$h \wedge \neg((s \vee c) \to p)$

$(\neg s) \wedge (\neg c)$