REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL

ϕ_1

$\vdots$

ϕ_m } PREMISSAS

ψ_1 — JUSTIFICATIVA (REGRA UTILIZADA PARA OBTER ψ_i A PARTIR DE ALGUMAS FÓRMULAS OBTIDO ANTERIORMENTE

JUSTIFICATIVA (REGRA UTILIZADA PARA OBTER ψ_i A PARTIR DE ALGUMAS FÓRMULAS OBTIDO ANTERIORMENTE

$\vdots$

ψ_s — JUSTIFICATIVA (REGRA UTILIZADA PARA OBTER ψ_i A PARTIR DE ALGUMAS FÓRMULAS OBTIDO ANTERIORMENTE

$\boxed{\psi^*}$ — JUSTIFICATIVA (REGRA UTILIZADA PARA OBTER ψ_i A PARTIR DE ALGUMAS FÓRMULAS OBTIDO ANTERIORMENTE

CONCLUSÃO DESEJADA

JUSTIFICATIVA (REGRA UTILIZADA PARA OBTER ψ_i A PARTIR DE ALGUMAS FÓRMULAS OBTIDO ANTERIORMENTE

$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi$

Regras de Dedução Natural

Símbolos lógicos

$\wedge$

$\vee$

$\neg$

$\rightarrow$

Conjunção

$\wedge$-introdução : Conclui $\phi \wedge \psi$ se já sabemos ϕ e ψ

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

↳ Codificação da regra

$\wedge$-eliminação : Conclui ϕ e ψ se já sabemos $\phi \wedge \psi$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

Ex: Prove que $p \wedge q,\ r \vdash q \wedge r$

Premissa: $p \wedge q$, r , Conclusão: $q \wedge r$

Índice	Fórmulas	Justificativas
1	$p \wedge q$	Premissa
2	r	Premissa
3	q	$\wedge E_2$ 1
	$\cancel{r \wedge q}$	$\wedge i$ $\cancel{2,3}$
	$q \wedge r$	3,2

Eliminação do $\wedge$ aplicado na fórmula 1 extraindo o segundo argumento

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge E_2$$

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge E_1$$

Ex: PROVE QUE $(p\wedge q)\wedge r,\ s\wedge t \vdash q\wedge s$

1	$(p\wedge q)\wedge r$	PREM.
2	$s\wedge t$	PREM.
3	$p\wedge q$	$\wedge E_1$ 1
4	q	$\wedge E_2$ 3
5	s	$\wedge E_1$ 2
6	$q\wedge s$	$\wedge i$ 4,5

NEGAÇÃO DUPLA

EX: NÃO É VERDADE QUE NÃO ESTÁ CHOVENDO = ESTÁ CHOVENDO

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e \qquad\qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

EX: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash (\neg\neg p) \wedge r$

1	p	PREMISSA
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	PREMISSA
3	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 2
4	r	$\wedge e_2$ 3
5	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
6	$(\neg\neg p) \wedge r$	$\wedge i$ 5, 4

Implicação

Ex: p = chove

$p \to q$ = se chove, então fica molhado

Dado ϕ e $\phi \to \psi$, temos ψ

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

(Modus Ponens)

Ex: Prove que $p,\ p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash q$

Símbolos lógicos

$\wedge$ Conjunção

$\vee$ Disjunção

$\neg$ Negação

$\to$ Implicação

<u>EX</u>: PROVE QUE $p,\ p \to q,\ p \to (q \to r) \vdash r$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

1	p	PREM
2	$p \to q$	PREM
3	$p \to (q \to r)$	PREM
4	q	$\to e$ 1, 2
5	$q \to r$	$\to e$ 1, 3
6	r	$\to e$ 4, 5

EX:

SE CHOVER, A RUA FICA MOLHADA. A RUA ESTÁ SECA.

$p \to q$ $\neg q$

LOGO, NÃO CHOVEU

$\neg p$

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg \psi}{\neg \phi} \text{ M.T.}$$

MODUS TOLLENS

p = CHOVEU

q = A ESTÁ MOLHADA

EX: $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	PREMISSA
2	p	
3	$\neg r$	
4	$q \to r$	$\to e$ 2, 1
5	$\neg q$	M.T. 4, 3

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}$$

EX: SE VOCÊ É FRANCÊS, ENTÃO VOCÊ É EUROPEU
É VERDADE (NO MUNDO REAL), MAS
NÃO DEPENDE DE VOCÊ SER OU NÃO FRANCÊS

SUPOSIÇÃO : ELEMENTO FORMAL

- M.T. DIZ QUE $p \to q, \neg q \vdash \neg p$
- UMA OUTRA FÓRMULA $p \to q \vdash (\neg q \to \neg p)$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$\neg q$	SUPOSIÇÃO
3	$\neg p$	M.T. 1,2
4	$\neg q \to \neg p$	$\to i$, 2,3

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

SUPOSIÇÃO

INTRODUÇÃO DA IMPLICAÇÃO

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

- PARA PROVAR $\phi \to \psi$, PRECISAMOS SUPOR (TEMPORARIAMENTE) QUE vale ϕ
- DENTRO DA CAIXA PODEMOS USAR ϕ E TUDO QUE FOI PROVADO ANTES
- PODEMOS ABRIR VÁRIAS CAIXAS SEPARADAS OU ANINHADAS

Ex: Prove $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	p	Suposição
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	M.T. 1, 3
	$p \to \neg\neg q$	$\to i$ linhas

$$\frac{\neg q \to \neg p \qquad \neg\neg p}{\neg\neg q}\ \text{M.T}$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\frac{\overset{\neg q \to \neg p}{\phi \to \psi} \qquad \overset{\neg\neg p}{\neg\psi}}{\underset{\neg q}{\neg\phi}}\ \text{M.T.}$$

Ex: Prove $\neg q \to \neg p \vdash p \to \neg\neg q$

EXEMPLO ERRADO

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	Se $\neg\neg q \wedge p$	Suposição
3	p	$\neg\neg i$ 2
4	Então $\neg\neg q$	M.T. 1, 3
	$(\neg\neg q \wedge p) \to \neg\neg q$	$\to i$ linhas

$p \to \neg\neg q$

$$\frac{\neg q \to \neg p \qquad \neg\neg p}{\neg\neg q}\ \text{M.T.}$$

$\sqrt{-1} = i$

$$\frac{\underset{\phi \to \psi}{\neg q \to \neg p} \qquad \underset{\neg\psi}{\neg\neg p}}{\underset{\neg q}{\neg\phi}}\ \text{M.T.}$$

EX: PROVE QUE $\vdash p \to p$

1	p	SUPOSIÇÃO
2	p	REPETIR 1

$p \to p$

1	$p \to p$	SUPOSIÇÃO
2	$p \to p$	REPETIÇÃO 1

$(p \to p) \to (p \to p)$

DEF: Fórmulas lógicas ϕ com sequente válido $\vdash \phi$ (sem premissa) são chamados de TEOREMAS

EX:

1	$q \to r$	SUPOSIÇÃO
2	$\neg q \to \neg p$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	M.T. 2, 4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\to e$ M.P 6, 1
8	$p \to r$	$\to i$ 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to i$ 2-8
10	$(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$	$\to i$ 1-9

Ex: Prove $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \text{ M.P.}$$

1	$p \to q$	Premissa
2	$p \wedge r$	Suposição
3	p	$\wedge e_1$ 2
4	q	$\to e$ 3, 1
5	r	$\wedge e_2$ 2
??	$q \wedge r$	$\wedge i$ 4,5
??	$(p \wedge r) \to (q \wedge r)$	$\to i$ 2-??

$r \to (p \wedge q)$

$\cancel{p \to q}$

$\cancel{q}$

DISJUNÇÃO $\vee$

$\vee$-INTRODUÇÃO

→ SE TEMOS ϕ, ENTÃO $\phi \vee \psi$ É VÁLIDO MESMO QUE ψ SEJA FALSO

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi} \vee i_2$$

$\vee$-REMOÇÃO

$\phi \vee \psi$ → PRECISAMOS ENCONTRAR UMA CONSEQUÊNCIA COMUM DE ϕ E DE ψ

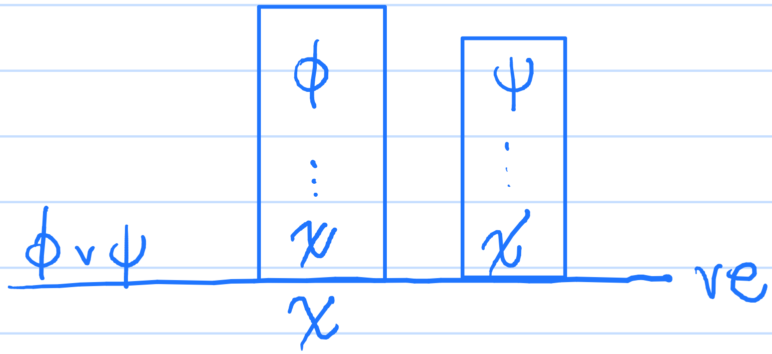
$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c} \phi \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} \vee e$$

χ CHI

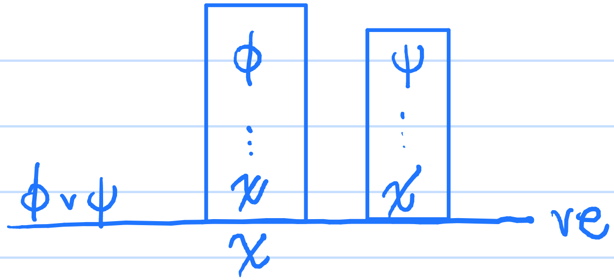
EX: $p \vee q \vdash q \vee p$ (COMUTATIVIDADE)

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p = \chi$	$\vee i_2$ 2
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$q \vee p = \chi$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p = \chi$	$\vee e$ 1, 2-3, 4-5



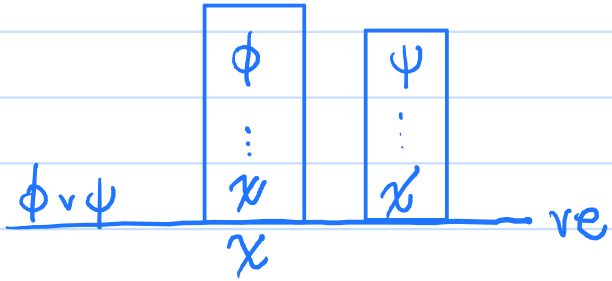
ASSOCIATIVIDADE $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$ $\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\,\vee i_1$ $\dfrac{\phi}{\psi \vee \phi}\,\vee i_2$



1	$(p \vee q) \vee r$	PREMISSA
2	$p \vee q$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_1$ 3
5	q	SUPOSIÇÃO
6	$q \vee r$	$\vee i_1$ 5
7	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_2$ 6
8	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-7
9	r	SUPOSIÇÃO
10	$q \vee r$	$\vee i_2$ 9
11	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_2$ 10
12	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 1, 2-8, 9-11

DISTRIBUTIVIDADE : $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \frac{\phi}{\psi \vee \phi}\ \vee i_2$$



1	$p \wedge (q \vee r)$	PREMISSA
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$q \vee r$	$\wedge e_2$ 1
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2, 4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_1$ 5
7	r	SUPOSIÇÃO
8	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2, 7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_2$ 8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

Ex: $\vdash p \to (q \to p)$

p = CHOVEU

q = TODO ELEFANTE É ROSA

1	p	SUPOSIÇÃO
2	q	SUPOSIÇÃO
3	p	CÓPIA 1
4	$q \to p$	$\to$i 2-3
5	$p \to (q \to p)$	$\to$i 1-4

Regras da Negação

símbolo da contradição

DEF: Uma contradição é uma fórmula da forma $\phi \wedge (\neg \phi)$ ou $(\neg \phi) \wedge \phi$

$$\frac{\perp}{\phi}\ \perp e \qquad\qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\perp}\ \neg e$$

EX: $(\neg p) \vee q \vdash p \to q$

1 $(\neg p) \vee q$ Premissa

2 $\neg p$ suposição

3 p suposição

4 $\perp$ $\neg e$ 3, 2

5 q $\perp e$ 4

6 $p \to q$ $\to i$ 3–5

q suposição

p suposição

q cópia 2

$p \to q$ $\to i$ 3–4

7 $p \to q$ $\vee e$ 1, 2–6, 2–5

Introdução da Negação

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

EX: $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \to \neg q$	PREMISSA
3	p	SUPOSIÇÃO
4	q	$\to e$ 3, 1
5	$\neg q$	$\to e$ 3, 2
6	$\bot$	$\neg e$ 4, 5
7	$\neg p$	$\neg i$

(± PROVA POR CONTRADIÇÃO)

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg\phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}}$$
$$\phi$$

REGRAS DERIVADAS

MODUS TOLLENS : $\phi \to \psi , \neg\psi \vdash \neg\phi$

1	$\phi \to \psi$	PREM.
2	$\neg\psi$	PREM.
3	ϕ	SUPOS.
4	ψ	$\to$e 3,1
5	$\bot$	$\neg$e 4,2
6	$\neg\phi$	$\neg$i 3-5

Lei do terceiro excluído (Tertium non datur)

$\vdash \phi \vee \neg\phi$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	suposição
2	ϕ	suposição
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4	$\bot$	$\neg e$ 3, 1
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2–4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7	$\bot$	$\neg e$ 6, 1
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg i$ 1–7
9	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg e$ 8

Fórmulas equivalentes

DEF: Sejam ϕ e ψ fórmulas da lógica proposicional

Dizemos que ϕ e ψ são **equivalentes** se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$

Notação $\phi \dashv\vdash \psi$

Ex: $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg(p \vee q) \dashv\vdash (\neg p) \wedge (\neg q)$

$p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$

$p \to q \dashv\vdash (\neg p) \vee q$

$(p \wedge q) \to p \dashv\vdash r \vee (\neg r)$

$(p \wedge q) \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$

DEF: UM NÚMERO É RACIONAL SE PODE SER ESCRITO COMO UMA FRAÇÃO a/b, E IRRACIONAL CASO CONTRÁRIO

OBS: SE p É UM NÚMERO PRIMO, ENTÃO $\sqrt{p}$ É IRRACIONAL.

TEO: EXISTEM NÚMEROS IRRACIONAIS a E b T.q. a^b É RACIONAL

PROVA: TOME $b = \sqrt{2}$. IRRACIONAL

SABEMOS QUE b^b É RACIONAL OU b^b É IRRACIONAL.

(i) SE b^b É RACIONAL, TOME $a = b$ E TEMOS OS DOIS NÚMEROS DESEJADOS

(ii) ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE b^b É IRRACIONAL

NESTE CASO TOMAMOS $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = b^b$ QUE É IRRACIONAL

MAS $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ É RACIONAL $\square$

LÓGICA PROPOSICIONAL COMO UMA LINGUAGEM FORMAL

→ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL DEVEM SER EXPRESSÕES ESCRITAS COM O ALFABETO $\{p, q, r, \ldots\} \cup \{p_1, p_2, \ldots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$

→ NÃO É SÓ ISSO

EX: $(\neg)()\vee pq$ → É UMA EXPRESSÃO NO ALFABETO, MAS NÃO FAZ SENTIDO

→ PRECISAMOS DEFINIR FÓRMULAS BEM FORMADAS

DEF: AS FÓRMULAS BEM FORMADAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL SÃO AS FÓRMULAS QUE OBTEMOS USANDO AS REGRAS ABAIXO UM NÚMERO FINITO DE VEZES

ÁTOMO: TODO ÁTOMO PROPOSICIONAL $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ É UMA FÓRMULA BEM FORMADA

SE ϕ E ψ SÃO FÓRMULAS BEM FORMADAS, ENTÃO

$\neg$: $(\neg\phi)$ TAMBÉM É
$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ TAMBÉM É
$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ TAMBÉM É
$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ TAMBÉM É

OBS: SE UMA FÓRMULA NÃO PODE SER CONSTRUÍDA ASSIM, ENTÃO ELA NÃO É BEM FORMADA

→ MODELO INDUTIVO

BACKUS NAUR FORM

$$\phi ::= p \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi)$$

$\neg$: $(\neg \phi)$ TAMBÉM É

$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ TAMBÉM É

$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ TAMBÉM É

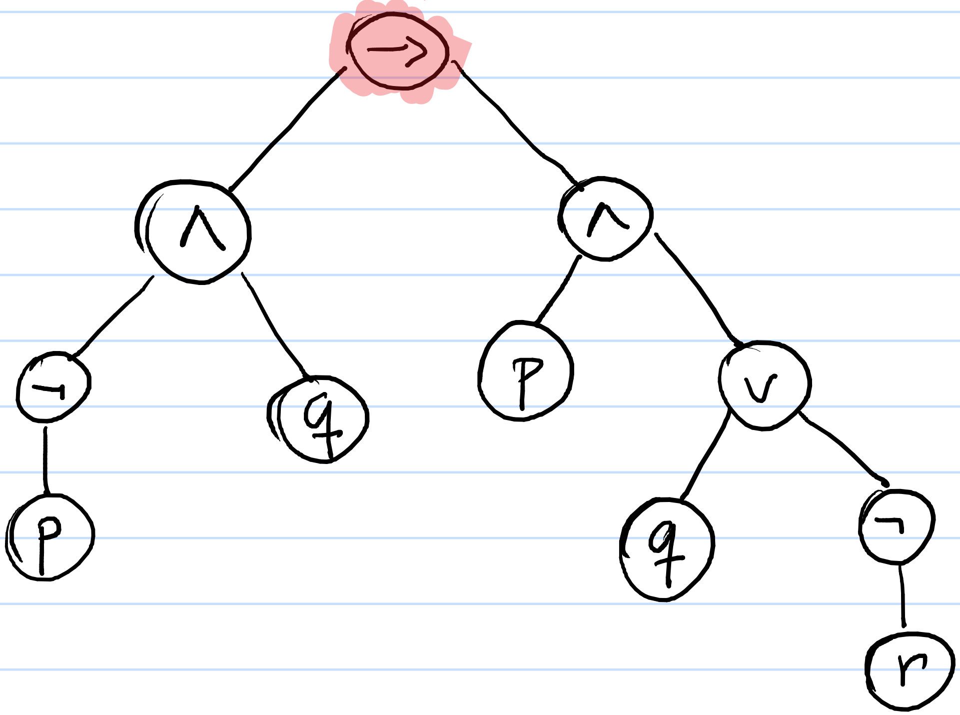
$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ TAMBÉM É

COMO DECIDIR QUE UMA FÓRMULA É BEM FORMADA?

PRINCÍPIO DA INVERSÃO: PODEMOS INVERTER O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO:

POR MAIS QUE TENHAMOS CINCO REGRAS DE CONSTRUÇÃO, HÁ UMA ÚNICA REGRA QUE FOI A ÚLTIMA A SER USADA.

EX: $(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



ÁRVORE DE PARSE

→ PRECISAMOS DOS PARÊNTESES PRA REMOVER AMBIGUIDADES

→ OS PARÊNTESES CODIFICAM A ÁRVORE

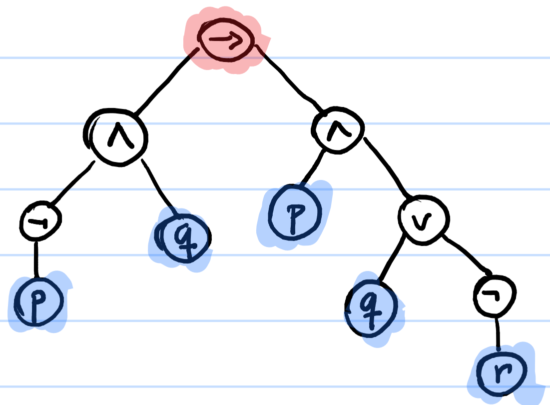
→ PARA MOSTRAR QUE UMA FÓRMULA NÃO É BEM FORMADA, PRECISAMOS TENTAR DESENHAR SUA ÁRVORE DE PARSE

OBS: AS FOLHAS SÃO ÁTOMOS

OS NÓS INTERNOS SÃO OS CONECTORES LÓGICOS: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

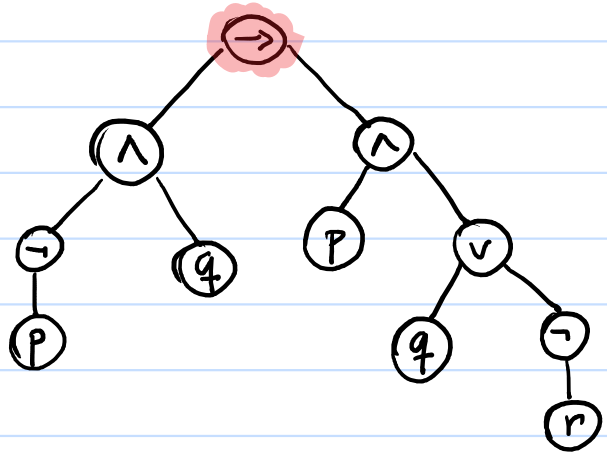
OS NÓS DO TIPO $\neg$ POSSUEM EXATAMENTE UM FILHO

OS NÓS DO TIPO $\wedge, \vee, \rightarrow$ POSSUEM EXATAMENTE DOIS FILHOS



→ DADA UMA FÓRMULA, UMA **SUBFÓRMULA** É UMA FÓRMULA CORRESPONDENTE A UMA SUBÁRVORE DA ÁRVORE DE PARSE

Ex.: $(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



$((\neg p) \wedge q)$

$(p \wedge (q \vee (\neg r)))$

$(q \vee (\neg r))$

$(\neg r)$

$(\neg p)$

r

p

q

$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$

$$(c \wedge m) \to t,\ h \wedge \neg s,\ \big(h \wedge (\neg(s \vee c))\big) \to p \ \vdash\ (m \wedge \neg t) \to p$$

1	$(c \wedge m) \to t$	Premissas
2	$h \wedge \neg s$	
3	$\big(h \wedge (\neg(s \vee c))\big) \to p$	
4	h	$\wedge e_1$ 2
5	$\neg s$	$\wedge e_2$ 2
6	$m \wedge \neg t$	suposição
7	m	$\wedge e_1$ 6
8	$\neg t$	$\wedge e_2$ 6
9	c	suposição
10	$c \wedge m$	$\wedge i$ 9, 7
11	t	$\to e$ 10, 1
12	$\bot$	$\neg e$ 11, 8
13	$\neg c$	
14	$(\neg s) \wedge (\neg c)$	$\wedge i$ 5, 12
15	$\neg(s \vee c)$	EQUIV 13
16	$h \wedge \neg(s \vee c)$	$\wedge$ 4,
17	p	$\to e$ x, 3
18	$(m \wedge \neg t) \to p$	

$h \wedge \neg(s \vee c) \to p$

$h \wedge \big(\neg(s \vee c) \to p\big)$

$h \wedge \neg\big((s \vee c) \to p\big)$

$(\neg s) \wedge (\neg c)$

$(s \to p) \vee (t \to q) \vdash (s \to q) \vee (t \to p)$ $\qquad A \to B \dashv\vdash$

$p \vdash q \to p$

$A \to (B \to C)$

1 $(s \to p) \vee (t \to q)$ PREMISSA $\quad (\neg A) \vee (B \to C)$

2 $(s \to p)$

3 $s \vee \neg s$ LTE

4 s sup.

5 p $\to e$ 2, 4

6 t supos.

7 p cópia

8 $t \to p$ $\to i$ 6-7

$(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee i_2$ 8

$\neg s$ supos

s sup.

$\perp$ $\neg e$

q

$s \to q$

? $(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee i$

$(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee e$

$(t \to q)$

$t \vee \neg t$ LTE

⋮

$(s \to q) \vee (t \to p)$ $\vee e$

$\vee e$ 1, 2-?, 2-?

$(s \to p) \vee (t \to q)$ PREMISSA

$(s \to p)$

$(t \to q)$

$\vee e$

ϕ

ψ

$\phi \vee \psi$ $\vee e$

$\vdash (s \to q) \vee (t \to p)$

SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

→ JÁ DESENVOLVEMOS UM "CÁLCULO" PARA VERIFICAR SE A PARTIR DAS FÓRMULAS $\phi_1, \dots, \phi_n$ PODEMOS CONCLUIR UMA FÓRMULA ψ.

$$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$$

→ VAMOS DESENVOLVER UMA OUTRA RELAÇÃO ENTRE AS PREMISSAS E A CONCLUSÃO QUE REPRESENTAMOS POR

$$\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$$

→ VAMOS ESTUDAR VALORES VERDADE DAS FÓRMULAS ATÔMICAS NA PREMISSA E NA CONCLUSÃO, E COMO OS CONECTIVOS LÓGICOS MANIPULAM ELES

EX: O VALOR VERDADE DE $p \wedge q$ É DETERMINADO PELO VALOR VERDADE DE p, DE q, E PELO SENTIDO DE $\wedge$.

$p \wedge q$ É VERDADE SE E SOMENTE SE p E q SÃO VERDADE

OBS: $\wedge$ PRECISA SABER SE p E q SÃO VERDADE, MAS NÃO PRECISA SABER O QUE p E q DIZEM SOBRE A REALIDADE.

DEF: 1. Conjunto de valores verdade contém dois elementos T e F

$T \rightarrow$ verdade, $F \rightarrow$ falso

2. Uma avaliação ou modelo de uma fórmula ϕ é uma atribuição de cada átomo proposicional em ϕ a um valor verdade

Ex: $q \leftarrow T$ e $p \leftarrow F$ é uma avaliação de $\underbrace{p \vee \neg q}_{\phi}$

$q \leftarrow F$ e $p \leftarrow T$

$q \leftarrow F$ e $p \leftarrow F$

$q \leftarrow T$ e $p \leftarrow T$

O SIGNIFICADO DE $\wedge$ É UMA FUNÇÃO DE DOIS ARGUMENTOS

CADA ARGUMENTO É UM VALOR VERDADE E O RESULTADO É OUTRO VALOR VERDADE

→ TABELA VERDADE DE $\wedge$ / OUTROS CONECTIVOS

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

$$\frac{\top}{T} \qquad \frac{\bot}{F}$$

ϕ	ψ	$\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\phi \vee \psi$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

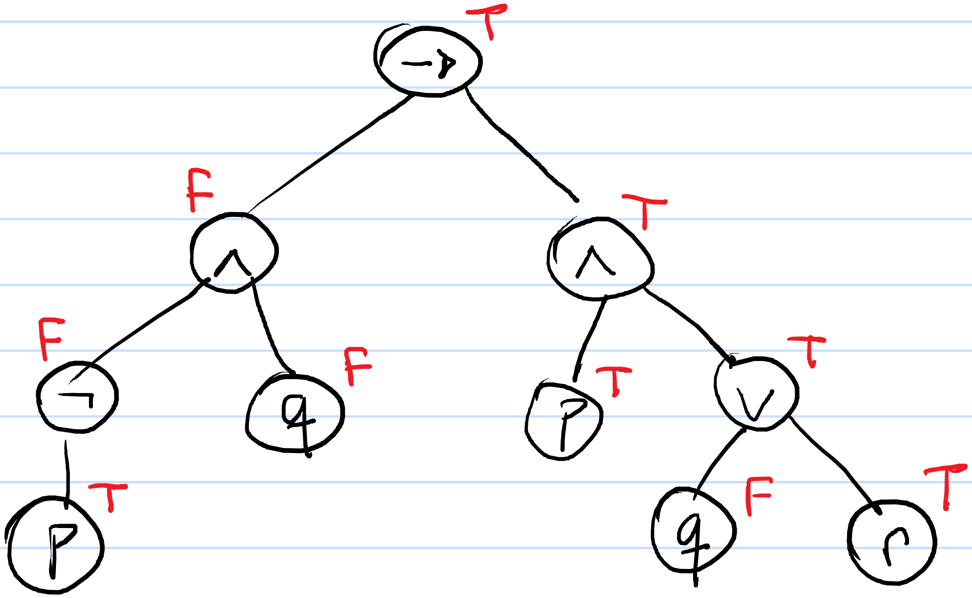
$\sim$

ϕ	ψ	$\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

→ DADA FÓRMULA ϕ COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $P_1, \dots, P_n$,
PODEMOS CONSTRUIR UMA TABELA VERDADE PARA ϕ.
TEREMOS 2^n LINHAS, CADA LINHA COM UMA DAS POSSÍVEIS COMBINAÇÕES
DE T E F PARA $P_1, \dots, P_n$

→ QUANDO n É MUITO GRANDE, CONSTRUIR ESSA TABELA É IMPOSSÍVEL
COMPUTACIONALMENTE

Ex $((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$ $\quad p = T,\ q = F,\ r = T$



p

q

r

$\neg p$

$(\neg p) \wedge q$

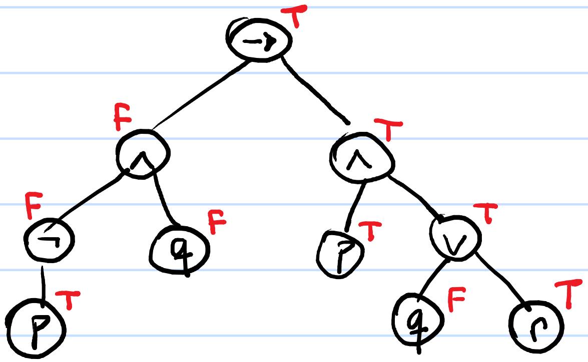
$q \vee r$

$p \wedge (q \vee r)$

$((\neg p) \wedge q) \to (p \wedge (q \vee r))$

Ex: Tabela

Ex $((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$ $p = T,\ q = F,\ r = T$



p

q

r

$\neg p$

$(\neg p) \wedge q$

$q \vee r$

$p \wedge (q \vee r)$

$((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$

<u>Ex</u>: Tabela

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p) \wedge q$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	F	F	T

INDUÇÃO MATEMÁTICA

EX: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

COMO PROVAMOS?

→ SUPONHA QUE QUEIRAMOS PROVAR UMA PROPRIEDADE M QUE ACREDITA SER VERDADE PARA TODO NÚMERO NATURAL

→ ESCREVEMOS $M(5)$ PARA DIZER QUE A PROPRIEDADE M VALE P/ 5

→ SUPONHA QUE SAIBAMOS

1 CASO BASE: M VALE PARA 1

2 PASSO INDUTIVO: SE M VALE PARA n, ENTÃO M VALE PARA $n+1$.

HIPÓTESE DE INDUÇÃO

DEF: O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA DIZ QUE DADAS ESSAS DUAS INFORMAÇÕES, M VALE PARA TODO NÚMERO NATURAL.

TEOREMA: $1+2+\dots+n$ É IGUAL A $\frac{n(n+1)}{2}$ PARA TODO NATURAL n

PROVA: ESCREVEMOS LHS_n PARA $1+2+\dots+n$ E

RHS_n PARA $\frac{n(n+1)}{2}$ $M(n)$

QUEREMOS MOSTRAR QUE $LHS_n = RHS_n$ PARA TODO NATURAL n
PRECISO MOSTRAR DUAS COISAS

1) $LHS_1 = RHS_1$

DE FATO, $LHS_1 = 1 = \frac{1(2)}{2} = RHS_1$

2) SE $LHS_n = RHS_n$, ENTÃO $LHS_{n+1} = RHS_{n+1}$

SUPONHA QUE $LHS_n = RHS_n$

NOTE QUE $LHS_{n+1} = 1+\dots+n+(n+1) = LHS_n + (n+1)$

$$= RHS_n + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = RHS_{n+1}$$

LOGO, PELO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO, $LHS_n = RHS_n$ PARA TODO n.

Ex: Nas fórmulas bem formadas temos $\#(= \#)$

DEF: Dada uma fórmula bem formada ϕ, a altura de ϕ é $1 +$ o comprimento de um maior caminho em sua árvore de parse

$M(i)$ = "Todas as fórmulas de altura no máximo i possuem o memo número de (e)"

Seja ϕ uma fórmula bem formada

Caso base $(M(1))$: Se ϕ é uma fórmula de altura 1, então ϕ é um átomo proposicional, que não possui (nem).

Passo indutivo: $n > 1$. A raiz da árvore de parse de ϕ deve ser $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, pois ϕ é bem formada

Suponha $M(n-1)$. Assuma que a raiz é $\rightarrow$
então $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ onde ϕ_1 e ϕ_2 são fórmulas com altura no máximo $n-1$.
Como vale $M(n-1)$, temos que $\#(_{\phi_1} = \#)_{\phi_1}$ e $\#(_{\phi_2} = \#)_{\phi_2}$.
Portanto

DEF: DADA UMA FÓRMULA BEM FORMADA ϕ, A ALTURA DE ϕ É 1 + O COMPRIMENTO DE UM MAIOR CAMINHO EM SUA ÁRVORE DE PARSE

$M(i)$ = "TODAS AS FÓRMULAS DE ALTURA NO MÁXIMO i POSSUEM O MEMO NÚMERO DE (E)"

SEJA ϕ UMA FÓRMULA BEM FORMADA

CASO BASE $(M(1))$: SE ϕ É UMA FÓRMULA DE ALTURA 1, ENTÃO ϕ É UM ÁTOMO PROPOSICIONAL, QUE NÃO POSSUI (NEM).

PASSO INDUTIVO: $m > 1$. A RAÍZ DA ÁRVORE DE PARSE DE ϕ DEVE SER $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, POIS ϕ É BEM FORMADA

SUPONHA $M(m-1)$. ASSUMA QUE A RAÍZ É $\rightarrow$ ENTÃO $\phi = \phi_1 \rightarrow \phi_2$ ONDE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO FÓRMULAS COM ALTURA NO MÁXIMO $m-1$.
COMO VALE $M(m-1)$, TEMOS QUE $\#(_{\phi_1} = \#)_{\phi_1}$ E $\#(_{\phi_2} = \#)_{\phi_2}$.

PORTANTO, $\#(_{\phi} = \#(_{\phi_1} + \#(_{\phi_2} + 1 = \#)_{\phi_1} + \#)_{\phi_2} + 1 = \#)_{\phi}$

SOLIDEZ DA LÓGICA PROPOSICIONAL

DEF: SE PARA TODAS AVALIAÇÕES EM QUE $\phi_1, \ldots, \phi_n$ SÃO AVALIADOS EM T TEMOS QUE ψ É AVALIADO EM T, DIZEMOS QUE VALE

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

↳ VINCULAÇÃO SEMÂNTICA
CONSEQUÊNCIA LÓGICA

EX 1: $p \wedge q \vDash p$? SIM

p	q	$p \wedge q$	p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

EX 2: $p \vee q \vDash p$? NÃO

p	q	$p \vee q$	p
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

2. UMA AVALIAÇÃO OU MODELO DE UMA FÓRMULA ϕ É UMA ATRIBUIÇÃO DE CADA ÁTOMO PROPOSICIONAL EM ϕ A UM VALOR VERDADE

OBJETIVO: MOSTRAR QUE $\phi_1, \dots, \phi_m \vdash \psi$ SE E SOMENTE SE $\phi_1, \dots, \phi_m \models \psi$

TEO: SEJAM $\phi_1, \dots, \phi_m$ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.
SE $\phi_1, \dots, \phi_m \vdash \psi$, ENTÃO $\phi_1, \dots, \phi_m \models \psi$

PROVA: COMO $\phi_1, \dots, \phi_m \vdash \psi$, EXISTE UMA PROVA DE ψ, A PARTIR DAS PREMISSAS $\phi_1, \dots, \phi_m$.

INDUÇÃO NO COMPRIMENTO DA PROVA

$M(k)$ = "PARA TODO SEQUENTE $\phi_1', \dots, \phi_m' \vdash \psi'$ QUE TÊM UMA PROVA DE COMPRIMENTO ATÉ k, TEMOS $\phi_1', \dots, \phi_m' \models \psi'$"

CASO BASE: PROVAS DE UMA LINHA

1 ϕ_1 PREMISSA

ENTÃO ϕ_1' E ψ' SÃO IGUAIS: $\phi_1' \vdash \phi_1'$

MAS SE ϕ_1' RECEBE T, ENTÃO ψ RECEBE T. LOGO, $\phi_1' \models \phi_1'$

PASSO INDUTIVO: A PROVA POSSUI K LINHAS

1	ϕ_1	PREMISSA
$\vdots$		
n	ϕ_n	PREMISSA
$\vdots$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	
k	ψ	JUSTIFICATIVA

OBSERVE QUE

$k_1, k_2 < k$

1. SUPONHA QUE A JUSTIFICATIVA É $\wedge i$

ENTÃO TEMOS $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$

$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$

1	ϕ_1	PREMISSA
$\vdots$		
n	ϕ_n	PREMISSA
$\vdots$	$\vdots$	
k_1	ψ_1	JUSTIFICATIA 1
$\vdots$		
k_2	ψ_2	JUSTIFICATIVA 2
$\vdots$	$\vdots$	
k	$\psi_1 \wedge \psi_2$	$\wedge i$ k_1, k_2

$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1$

$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_2$

1. SUPONHA QUE A JUSTIFICATIVA É $\wedge i$

ENTÃO TEMOS $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ $\qquad \phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1 \wedge \psi_2$

1	ϕ_1	PREMISSA
$\vdots$		
n	ϕ_n	PREMISSA
$\vdots$	$\vdots$	
k_1	ψ_1	JUSTIFICATIVA 1
$\vdots$		
k_2	ψ_2	JUSTIFICATIVA 2
$\vdots$	$\vdots$	
k	$\psi_1 \wedge \psi_2$	$\wedge i$ k_1, k_2

$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1$

$\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_2$

ENTÃO TEMOS QUE $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1$ E $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_2$ POSSUEM PROVAS DE COMPRIMENTO MENOR QUE k.

PELA H.I. TEMOS $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi_1$ E $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi_2$

ϕ_1	...	ϕ_n		ψ_1
T	T	T		T
		...	...	

ϕ_1	...	ϕ_n		ψ_2
T	T	T	...	T

Ex: $p, p \to q, p \vee q \vdash q \wedge (p \vee q)$

	1	p	Premissa
	2	$p \to q$	Premissa
k_2	3	$p \vee q$	Premissa
k_1	4	q	$\to e$ 1, 2
	5	$q \wedge (p \vee q)$	$\wedge i$ 4, 3

$p, p \to q, p \vee q \vdash q$

$p, p \to q, p \vee q \vdash p \vee q$

$p, p \to q, p \vee q \vDash q$

$p, p \to q, p \vee q \vDash p \vee q$

p	q	$p \to q$	$p \vee q$	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

p	q	$p \to q$	$p \vee q$	$p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

p	q	$p \to q$	$p \vee q$	q	$p \vee q$	$q \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F	F

Logo, $p, p \to q, p \vee q \vDash q \wedge (p \vee q)$

$\phi_1, \dots, \phi_m \models \psi_1$ e $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi_2$

ϕ_1	…	ϕ_m		ψ_1
T	T	T		T
		…	…	

ϕ_1	…	ϕ_n		ψ_2
T	T	T	…	T

atómos	ϕ_1	…	ϕ_m		ψ_1	ψ_2	$\overset{\psi}{\psi_1 \wedge \psi_2}$
TFTF	T	T	T		T	T	T
TFTF			…	…			
⋮	T	T	T		T	T	T
⋮							

$\Longrightarrow \phi_1, \dots, \phi_m \models \psi$

COMPLETUDE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

→ OBJETIVO: MOSTRAR QUE AS REGRAS DE DEDUÇÃO SÃO COMPLETAS

- QUEREMOS PROVAR QUE SE $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, ENTÃO EXISTE UMA PROVA POR DEDUÇÃO NATURAL DE $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

DEF: UMA FÓRMULA DE LÓGICA PROP. ϕ É UMA TAUTOLOGIA SE TODAS SUAS AVALIAÇÕES SÃO T, i.e., SE $\models \phi$

EX: $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Ex: $p -$

p	p	$p \to p$
T	T	T
F	F	T

- VAMOS ASSUMIR E $\boxed{\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi}$ E QUERO CONSTRUIR UMA PROVA

ESTRATÉ :

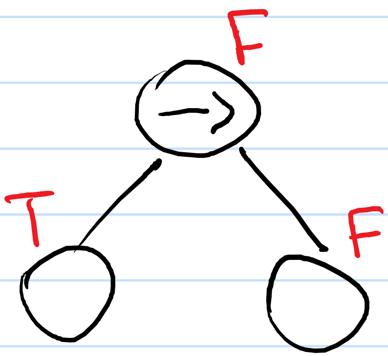
1) MOSTRAR QUE $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_n \to \psi) \cdots)$

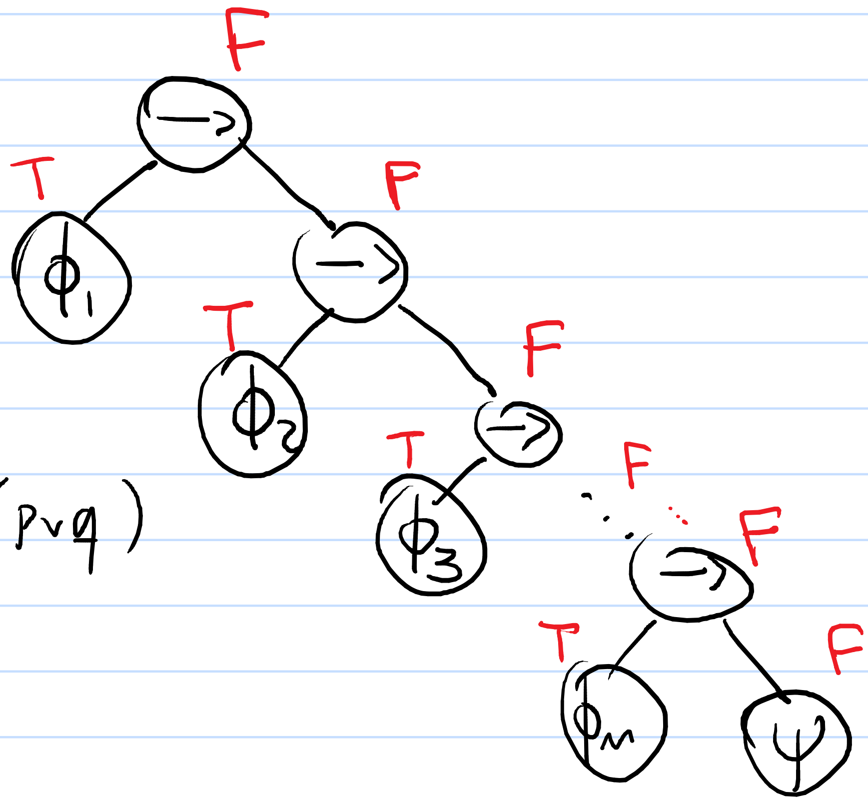
1) Mostrar que $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_m \to \psi) \cdots))$

Suponha que $\phi_1, \dots, \phi_m \models \psi$

Como $\phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_m \to \psi) \cdots))$ é um conjunto de implicações aninhadas, só será avaliado em F se

$$\phi_1 = \dots = \phi_m = T \quad e \quad \psi = F$$





$p \models p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$\models p \to (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

$p \vDash p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$\vDash p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

$p \vdash p \vee q$

1. p PREMISSA
2. $p \vee q$ vi_1 1

$\vdash p \rightarrow (p \vee q)$

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1. & p & \text{SUPOSIÇÃO} \\ 2. & p \vee q & vi_1 \ 1 \end{array}}$$

$p \rightarrow (p \vee q)$

DEF Uma avaliação ou modelo de uma fórmula ϕ é uma atribuição de cada átomo proposicional em ϕ a um valor verdade

DEF: Se para todas avaliações em que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são avaliados em T temos que ψ é avaliado em T, dizemos que vale

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

vinculação semântica
consequência lógica

Em particular $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ não vale se existe pelo menos uma avaliação na qual todos os ϕ_i são avaliados em T mas ψ é avaliado em F.

TEO: $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ se e somente se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$

Equivalência entre dedução natural e semântica da tabela verdade

TEO: $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ SE E SOMENTE SE $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$

ROBUSTEZ: TUDO QUE PUDERMOS PROVAR É VERDADE, BASEADO NA TABELA VERDADE

PODEMOS USAR ISSO PRA MOSTRAR QUE UM DETERMINADO SEQUENTE NÃO PODE SER PROVADO

EX: $p \vee q \vdash p$ NÃO PODE SER PROVADO POIS

avaliação

SE TOMARMOS $p \leftarrow F$ E $q \leftarrow T$, OBTEMOS

$p \vee q \leftarrow T$, MAS $p \leftarrow F$

LOGO NÃO VALE $p \vee q \vDash p$ E PORTANTO

COMPLETUDE: NÃO IMPORTA O QUE FOR UM FATO, É POSSÍVEL PROVÁ-LO POR DEDUÇÃO NATURAL.

EQUIVALÊNCIA SEMÂNTICA

- DUAS FÓRMULAS SÃO EQUIVALENTES SE ELAS TÊM O MESMO SIGNIFICADO

EX. $p \to q$ E $\neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$

FORMAS NORMAIS

- EQUIVALÊNCIA SEMÂNTICA

DEF: DIZEMOS QUE AS FÓRMULAS ϕ E ψ SÃO SEMANTICAMENTE EQUIVALENTES SE $\phi \models \psi$ E $\psi \models \phi$.

ESCREVEMOS $\phi \equiv \psi$

EX: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

$(p \vee q) \to p \equiv \neg r \vee r$

$(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

DEF: UMA TAUTOLOGIA É UMA FÓRMULA ϕ T.Q. $\models \phi$

Forma normal conjuntiva (CNF)

$$(\vee \cdots \vee) \wedge (\vee \cdots \vee) \wedge \cdots \wedge (\vee \cdots \vee)$$

Def:

- Um literal é um átomo (p) ou a negação de um átomo ($\neg p$)

  Ex: $p, \neg p, q, q_1, q_2, \ldots, \neg q_1, \ldots$

- Uma cláusula é a disjunção ($\vee$) de literais

  Ex: $(p \vee q_1 \vee \neg q_2)$, $(q_1 \vee q_2 \vee \neg q_1)$, ...

- Uma fórmula C está na forma normal conjuntiva se C é a conjunção de cláusulas

$$(p \vee q_1 \vee \neg q_2) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \neg q_1)$$

Forma compacta

$$L = p \mid \neg p$$
$$D = L \mid L \vee D$$
$$C = D \mid D \wedge C$$

• POR QUE GOSTAMOS DA CNF?

⇝ FÁCIL DE CHECAR A SUA VALIDADE $(\models \phi)$

EX. $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ É UMA TAUTOLOGIA SE E SOMENTE SE (SSE)

$\models (\neg q \vee p \vee r)$ E $\models (\neg p \vee r)$ E $\models q$

<u>LEMA</u>: UMA DISJUNÇÃO DE LITERAIS $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_m$ É UMA TAUTOLOGIA SSE EXISTEM $1 \leqslant i, j \leqslant m$ T.Q. $L_i = \neg L_j$.

<u>PROVA</u>: SE $L_i = \neg L_j$, ENTÃO $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_m$ É SEMPRE AVALIADA EM T PORQUE SEMPRE L_i

AGORA, SUPONHA QUE NÃO EXISTE i, j T.Q. $L_i = \neg L_j$. PRECISAMOS ENCONTRAR UMA AVALIAÇÃO NA QUAL $L_1 \vee \cdots \vee L_m$ SEJA F.

PARA $i = 1, \ldots, m$, FAÇA
SE $L_i = P_i$, ENTÃO COLOCO $P_i \leftarrow F$
SE $L_i = \neg P_i$, ENTÃO COLOCO $P_i \leftarrow T$
LOGO $L_1 \vee \cdots \vee L_m$ É F ∎

DEF: DADA UMA FÓRMULA ϕ EM LÓGICA PROPOSICIONAL, DIZEMOS QUE ϕ É SATISFATÍVEL / SATISFAZÍVEL SE É POSSÍVEL AVALIAR ϕ EM T.

SAT

- BUSCAR UMA ATRIBUIÇÃO DOS SEUS ÁTOMOS (BASTA UMA!)
- $\underbrace{\text{SATISFATIBILIDADE}}_{\text{EXISTE PELO MENOS UMA ATRIBUIÇÃO...}}$ É UM CONCEITO MAIS FRACO QUE $\underbrace{\text{VALIDADE}}_{\text{TODA ATRIBUIÇÃO...}}$ (TAUTOLOGIA)

PROP: ϕ É SATISFAZÍVEL SSE $\neg\phi$ NÃO É UMA TAUTOLOGIA

PROP: ϕ NÃO É SATISFAZÍVEL SSE $\neg\phi$ É UMA TAUTOLOGIA

OBS: É FÁCIL DECIDIR SE UMA FÓRMULA ϕ É UMA TAUTOLOGIA SE ϕ ESTÁ CNF.

LOGO, É FÁCIL DECIDIR SE ϕ É SATISFAZÍVEL SE $\neg\phi$ ESTÁ NA CNF.

COMO OBTER FÓRMULAS NA CNF?

EX: $(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p) = \phi$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \vee \neg p$	ϕ
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

//

LEMBRE-SE: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

EX:

	p	q	r	ϕ
	T	T	T	T
a	T	T	F	F
	T	F	T	T
	T	F	F	T
b	F	T	T	F
c	F	T	F	F
d	F	F	T	F
	F	F	F	T

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

HÁ OUTRA FORMA DE OBTERMOS UMA FÓRMULA EQUIVALENTE NA CNF?

$\rightsquigarrow$ HÁ MAIS DE UMA CNF EQUIVALENTE

EX: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \equiv (p \vee \neg q) \wedge \top$

COMO?

- PRÉ-PROCESSAMENTO: TRADUZIMOS TODAS AS IMPLICAÇÕES USANDO

$$\psi \rightarrow \eta \equiv \neg \psi \vee \eta$$

$$\phi \leftrightarrow \psi$$

QUE QUER DIZER $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\phi \to \psi} \leftrightarrow e \qquad \qquad \frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\psi \to \phi} \leftrightarrow e$$

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \psi \to \phi}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow i$$

$$\frac{\begin{array}{|c|}\hline \phi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \psi \\ \vdots \\ \phi \\ \hline\end{array}}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow i$$

LISTA 1, Q1d

$$(s \to p) \lor (t \to q) \vdash (s \to q) \lor (t \to p)$$

$\phi \lor \psi$ $\phi \; \vdots \; \chi$ $\psi \; \vdots \; \chi$

$$\frac{\phi \lor \psi \qquad \boxed{\phi \; \vdots \; \chi} \qquad \boxed{\psi \; \vdots \; \chi}}{\chi} \; \lor e$$

1 $(s \to p) \lor (t \to q)$

2 $s \to p$ SUPOSIÇÃO

3 $s \lor \neg s$ LTE

4 s SUP

5 p $\to e$ 2,4

6 t SUP

7 p CÓPIA 5

$t \to p$ $\to i$ 6,7

$(s \to q) \lor (t \to p)$ $\lor i$

$\neg s$ SUP

s SUP

$\bot$ $\neg e$ 4,5

q

$s \to q$ $\to i$

$(s \to q) \lor (t \to p)$

$(s \to q) \lor (t \to p)$

$(s \to q) \lor (t \to p)$

PREMISSA

$t \to q$ SUPOSIÇÃO

$(\neg t) \lor q$ EQUIV

$\neg t$ SUP

t

$\bot$

p

$t \to p$ $\to i$

$(s \to q) \lor (t \to p)$ $\lor i$

q SUP

s SUP

q CÓPIA

$s \to q$ $\to i$

$(s \to q) \lor (t \to p)$ $\lor i$

$(s \to q) \lor (t \to p)$

$t \to q$ PREMISSA

$t \lor \neg t$ LTE

t	SUP
q	$\to e$
$\neg t \lor q$	$\lor i$

$\neg t$	SUP
$\neg t \lor q$	$\lor i$

$\neg t \lor q$

$p \to q,\ r \to s \vdash (p \lor r) \to (q \lor s)$

1 $p \to q$

2 $r \to s$

3 $p \lor r$ sup

4 p	sup	r	sup
5 q	$\to e$ 1, 4	s	$\to e$ 2, 4
6 $q \lor s$		$q \lor s$	

$q \lor s$ $\lor e$ 3, 4-6

$(p \lor r) \to (q \lor s)$

$p \to q$ $\vdash q \lor r$

p

q $\to e$ 1, 2

$q \lor r$ $\lor i$

$\vdash ((p \to t) \to p) \to p$

$(p \to t) \to p$	SUP
$\neg p$	SUP
$\neg(p \to t)$	M.T.
$\neg t \wedge p$	EQUIV
p	
$\bot$	
p	PPC

$((p \to t) \to p) \to p$

$p \to t \qquad t \vee \neg p$

$\neg(p \to t) \equiv \neg(t \vee \neg p)$

$\equiv \neg t \wedge p$

t	p	$t \to p$	$(t \to p) \to p$	$((t \to p) \to p) \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

$\vee$

Equivalência

Notação $\phi \dashv\vdash \psi$ ~a $\phi \vdash \psi$ $\psi \vdash \phi$

1 $p \to t$
2 $t \vee \neg t$ LTE
3 t sup
4 $t \vee \neg p$ vi
5

- $\neg t$ sup
- $\neg p$ M.T
- $t \vee \neg p$ vi

$t \vee \neg p$ ve 2, 3-4, 3-5

$p \to t \vdash t \vee \neg p$

$\vdots$
$p \to t$
$t \vee \neg p$

EQUIV

$t \vee \neg p$

- t sup
  - p sup
  - t cópia
- $p \to t$

- $\neg p$ sup
  - p sup
  - $\bot$ $\neg e$
  - t
- $p \to t$

$p \to t$ ve

$t \vee \neg p \vdash p \to t$

$p \to t$ $t \vee \neg p$

$\neg(p \to t) \equiv \neg(t \vee \neg p)$

$\equiv \neg t \wedge p$

$\neg(p \to t) \dashv\vdash \neg(t \vee \neg p)$

JÁ TENHO
$t \vee \neg p \vdash p \to t$

$\neg(p \to t)$

$t \vee \neg p$	SUP
$p \to t$	EQUIV
$\bot$	$\neg e1,3$

$\neg(t \vee \neg p)$

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

1	$\neg(A \vee B)$	PREMISSA
2	A	SUP
3	$A \vee B$	$\vee i$
4	$\bot$	$\neg e1,3$
5	$\neg A$	PPC 2-4
6	B	SUP
7	$A \vee B$	$\vee i$
8	$\bot$	$\neg e1,7$
9	$\neg B$	PPC 6-8
10	$\neg A \wedge \neg B$	$\wedge i$ 5,9

$\neg(p \to t)$

$\neg(t \vee \neg p)$ EQUIV

$\neg t \wedge p$ DISTRIBUTIV

$\neg(p \to t) \equiv \neg(t \vee \neg p) \equiv \neg t \wedge p$

$\neg(p \to t) \vdash \neg(t \vee \neg p) \vdash (\neg t) \wedge p$

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

$p \to q,\ \neg p \to r,\ \neg q \to \neg r \vdash q$

1	$p \to q$	Prem
2	$\neg p \to r$	Prem
3	$\neg q \to \neg r$	Prem
4	$p \vee \neg p$	LTE

5	p	sup	$\neg p$	sup	$\neg q$	sup
6	q	$\to$e 1,5	r	$\to$e 2,5	$\neg r$	$\to$e 3,5
7			$\neg\neg r$	$\neg\neg$i 6	$\neg\neg p$	M.T. 2,6
8			$\neg\neg q$	M.T. 3,7	p	$\neg\neg$ 7
9			q	$\neg\neg$e 8	q	$\to$
					$\bot$	
	q		ve 4, 5-6, 5-9		q	

LÓGICA DE PREDICADOS (LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM)

• LÓGICA PROPOSICIONAL

1) TEORIA DA PROVA (CÁLCULO DE DEDUÇÃO NATURAL)

2) SINTAXE (A NATUREZA ARBÓREA DAS FÓRMULAS)

3) SEMÂNTICA (O QUE AS FÓRMULAS SIGNIFICAM, TABELA VERDADE)

- ESTUDAMOS SENTENÇAS DECLARATIVAS: AFIRMAÇÕES SOBRE O MUNDO QUE PODEM SER DADAS NUMA TABELA
- LIDAMOS COM COMPONENTES COMO "NÃO", "E", "OU", "SE ... ENTÃO"

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

- HÁ MAIS COMPONENTES, COMO "EXISTE", "TODO", "DENTRE" E "SÓ"

EX: TODO ESTUDANTE É MAIS JOVEM DO QUE ALGUM PROFESSOR
→ PODÍAMOS IDENTIFICAR TAL AFIRMAÇÃO COM UMA FÓRMULA ATÔMICA

→ ISSO IGNORA O SENTIDO DESSA FRASE QUE LIDA COM "SER UM ESTUDANTE", "SER PROFESSOR", "SER MAIS JOVEM QUE"

EX: TODO ESTUDANTE É MAIS JOVEM DO QUE ALGUM PROFESSOR

- PODEMOS USAR O SEGUINTE

$S(\text{ANDY})$ PARA INDICAR QUE "ANDY É UM ESTUDANTE"

$I(\text{PAUL})$ PARA INDICAR QUE "PAUL É UM PROFESSOR"

$Y(\text{ANDY}, \text{PAUL})$ PARA INDICAR QUE "ANDY É MAIS JOVEM QUE PAUL"

- S, I, Y SÃO CHAMADOS DE PREDICADOS

<u>DEF</u>: UM PREDICADO EM X É UMA FUNÇÃO BOOLEANA

↳ QUE VAI EM {VERDADEIRO, FALSO}

$$P: X \longrightarrow \{\text{VERDADEIRO}, \text{FALSO}\}$$

- NÃO QUERO LISTAR A MESMA FÓRMULA COM TODOS OS ELEMENTOS DO UNIVERSO

→ PARA ISSO PRECISAMOS DE VARIÁVEIS

- SÃO "GUARDADOR DE LUGAR" PARA VALORES CONCRETOS (COMO UM ESTUDANTE)

EX: $S(x)$: X É UM ESTUDANTE
$I(x)$: X É UM PROFESSOR
$Y(x,y)$: X É MAIS NOVO QUE Y

→ TAMBÉM PRECISAMOS DE QUANTIFICADORES

$\forall$: PARA TODO
$\exists$: EXISTE OU PARA ALGUM

→ SEMPRE VEM ANEXADO A UMA VARIÁVEL

$\forall x \quad , \quad \exists z$

EX: $\forall x \left(S(x) \rightarrow \left(\exists y \left(I(y) \wedge Y(x,y) \right) \right) \right)$

EX: $\forall x\,(S(x) \to (\exists y\,(I(y) \wedge Y(x,y))))$

PARA TODO X, SE X É UM ESTUDANTE, ENTÃO EXISTE Y QUE É UM INSTRUTOR E QUE X É MAIS NOVO QUE Y

- PREDICADOS PODEM TER VÁRIAS VARIÁVEIS
  - → S, I SÃO PREDICADOS UNÁRIOS
  - → Y É UM PREDICADO BINÁRIO
- O NÚMERO DE VARIÁVEIS TEM QUE SER FINITO

EX: NEM TODO PASSÁRO PODE VOAR

$B(x)$: x É UM PÁSSARO

$F(x)$: X PODE VOAR

NÃO É VERDADE QUE TODO PÁSSARO PODE VOAR

$$\neg(\forall x(B(x) \to F(x)))$$

$$\exists x(B(x) \land \neg F(x))$$

EXISTE ALGO QUE É PÁSSARO E NÃO PODE VOAR

- VAMOS ESTENDER O CÁLCULO DE DEDUÇÃO NATURAL DE LÓGICA PROPOSICIONAL PARA LÓGICA DE PREDICADOS
- É GENERALIZAR O CONCEITO DE AVALIAÇÃO PARA UMA NOÇÃO ADEQUADA DE MODELO
- NÃO VAMOS PROVAR, MAS DE FATO DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA DE PREDICADOS É ROBUSTA E COMPLETA COM RESPEITO A IMPLICAÇÃO SEMÂNTICA

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi \qquad \text{SSE} \qquad \phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

EX: NENHUM LIVRO É GASOSO; DICIONÁRIOS SÃO LIVROS.
ENTÃO NENHUM DICIONÁRIO É GASOSO

$B(x)$: X É UM LIVRO , $G(x)$: X É GASOSO, $D(x)$: X É DICIONÁRIO

→ QUEREMOS DESENVOLVER UMA TEORIA DA PROVA E SEMÂNTICA QUE NOS PERMITA CONCLUIR:

$$\neg \exists x (B(x) \wedge G(x)), \forall x (D(x) \to B(x)) \vdash \neg \exists x (D(x) \wedge G(x))$$

$$\neg \exists x (B(x) \wedge G(x)), \forall x (D(x) \to B(x)) \models \neg \exists x (D(x) \wedge G(x))$$

FUNÇÕES

EX: TODO FILHO É MAIS JOVEM DO QUE SUA MÃE

$C(x)$: x É FILHO, $M(x,y)$: x É A MÃE DE y, $Y(x,y)$: x É MAIS JOVEM QUE y

$$\forall x \forall y \left(\left(C(x) \land M(y,x) \right) \rightarrow Y(x,y) \right)$$

EX: ANDRÉ E PAULO TÊM A MESMA AVÓ MATERNA =

$\overset{\text{ANDRÉ}}{\underset{a}{\shortparallel}}$ $\overset{\text{PAULO}}{\underset{p}{\shortparallel}}$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \left(M(x,y) \land M(y,a) \land M(u,v) \land M(v,p) \rightarrow \underbrace{x = u}_{\text{PREDICADO ESPECIAL}} \right)$$

→ FUNÇÕES NOS DÃO UMA FORMA DE EVITAR ESSA GROSSERIA

→ NO LUGAR DE $M(x,y)$, VAMOS USAR $m(x)$ PARA INDICAR A MÃE DE x

Ex: André e Paulo têm a mesma avó materna =
$\overset{\shortparallel}{a}$ $\overset{\shortparallel}{p}$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \left(M(x,y) \wedge M(y,a) \wedge M(u,v) \wedge M(v,p) \rightarrow \underbrace{x = u}_{\text{Predicado especial}} \right)$$

→ Funções nos dão uma forma de evitar essa grosseria

→ No lugar de $M(x,y)$, vamos usar $m(x)$ para indicar a mãe de x

→ Usando m podemos escrever

$$\forall x \left(C(x) \rightarrow Y(x, m(x)) \right)$$

$$m(m(a)) = m(m(p))$$

- Uma função é uma "máquina" que leva elementos do universo em elementos do universo

→ FUNÇÕES PODEM RECEBER MAIS DE UM ARGUMENTO

EX: $g(x,y)$: A NOTA DO ESTUDANTE x NO CURSO y

→ FUNÇÕES QUE RECEBEM ZERO VARIÁVEIS SÃO CHAMADAS DE CONSTANTES

LÓGICA DE PREDICADOS COMO UMA LINGUAGEM FORMAL

→ DAR REGRAS SINTÁTICAS PARA A FORMAÇÃO DE FÓRMULAS DE LÓGICA DE PREDICADOS

→ HÁ DOIS TIPOS DE COISAS ENVOLVIDAS

1. OBJETOS SOBRE OS QUAIS ESTAMOS FALANDO
   INDIVÍDUOS (ANDRÉ, PAULO), VARIÁVEL (x E y), $m(a)$, $g(x,y)$

   EXPRESSÕES EM L.P. QUE DENOTAM OBJETOS SÃO CHAMADOS DE TERMOS

2. COISAS QUE DENOTAM VALORES-VERDADE
   EXPRESSÕES DESSE TIPO SÃO FÓRMULAS

   $Y(x, m(x))$, $D(x)$, $B(x)$

→ UM VOCABULÁRIO DE LÓGICA DE PREDICADOS CONSISTE EM DUAS COISAS

- $\mathcal{P}$: CONJUNTO DE SÍMBOLOS DE PREDICADOS
- $\mathcal{F}$: CONJUNTO DE SÍMBOLOS DE FUNÇÕES

→ CADA SÍMBOLO (PRED. OU FUNC.) VEM COM UMA ARIDADE
I.E., O NÚMERO DE ARGUMENTOS QUE ELE ESPERA

TERMOS

- → VARIÁVEIS, CONSTANTES, FUNÇÕES APLICADOS A ELAS
- → FUNÇÕES PODEM SER ANINHADAS : $m(m(a))$

DEF : TERMOS SÃO DEFINIDOS COMO SEGUE

- TODA VARIÁVEL É UM TERMO
- SE c É UMA FUNÇÃO 0-ÁRIA, ENTÃO c É UM TERMO
- SE $t_1, \dots, t_n$ SÃO TERMOS E $f \in \mathcal{F}$ É UMA FUNÇÃO n-ÁRIA, ENTÃO $f(t_1, \dots, t_n)$ É UM TERMO
- NADA MAIS É TERMO

→ $t :: x \mid c \mid f(t_1 \dots t)$

EX: SE n, f, g SÃO FUNÇÕES, RESPECTIVAMENTE, 0-, 1-, 2-ÁRIA, ENTÃO

→ $g(f(n), n)$, $f(g(n, f(n)))$ SÃO TERMOS

→ $g(n)$, $f(f(n), n)$, $n(n)$ NÃO SÃO TERMOS

Fórmulas

DEF: O conjunto de fórmulas é definido como segue

- Se $P \in \mathcal{P}$ é um predicado n-ário, e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $P(t_1, \dots, t_n)$ é uma fórmula
- Se ϕ é fórmula, $(\neg \phi)$ é fórmula
- Se ϕ e ψ são fórmulas então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ são fórmulas
- Se ϕ é uma fórmula e x é uma variável, então

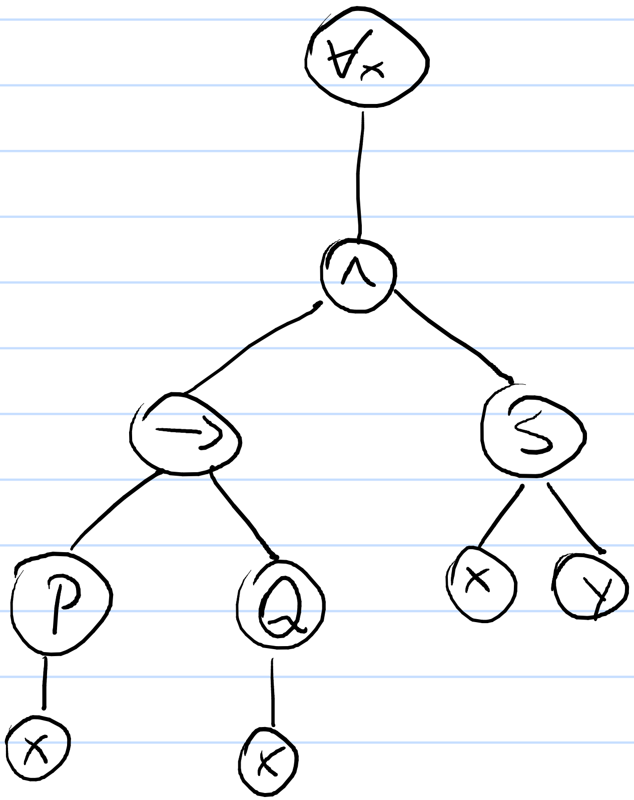
$$(\forall x \, \phi) \quad \text{e} \quad (\exists x \, \phi) \quad \text{são fórmulas}$$

- Nada mais é fórmula

$$\phi ::= P(t_1, \dots, t_n) \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \psi) \mid (\phi \vee \psi) \mid (\phi \to \psi) \mid (\forall x \phi) \mid (\exists x \, \phi)$$

ÁRVORE DE ANÁLISE

EX: $\forall x\big(\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \wedge S(x,y)\big)$



EX: TODO FILHO DO MEU PAI É MEU IRMÃO

→ A ESCOLHA DE "PAI" COMO PREDICADO OU FUNÇÃO DEPENDE DA CONVENIÊNCIA

1. PREDICADO $P = \{S, F, B\}$ PREDICADOS

$S(x,y)$: x É UM FILHO DE y
$F(x,y)$: x É PAI DE y
$B(x,y)$: x É IRMÃO DE y

m É CONSTANTE "EU"

$$\forall x \forall y \left(F(x,m) \wedge S(y,x) \rightarrow B(y,m)\right)$$

2. FUNÇÃO: m, S, B COMO ACIMA, E f A FUNÇÃO QUE DEVOLVE O PAI DE x

$$\forall x \left(S(x, f(m)) \rightarrow B(x,m)\right)$$

Variáveis livres e limitadas

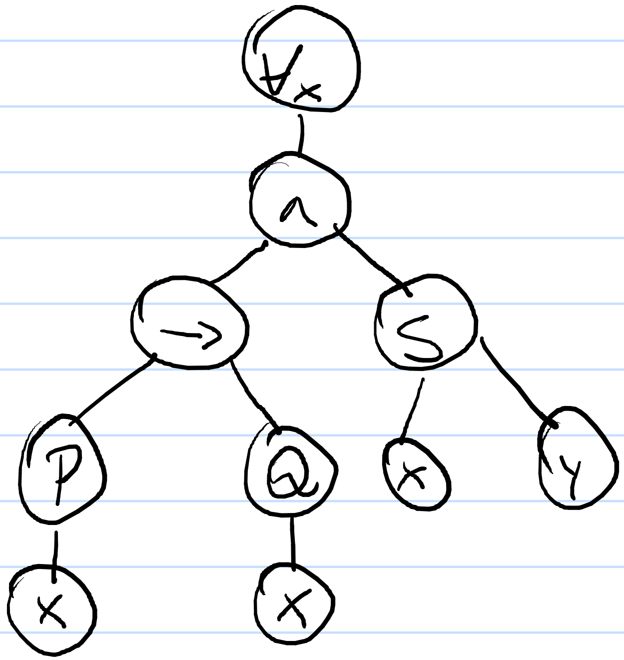
- Variáveis aparecem de diversas formas

→ Árvore de análise

- Nós $\forall x$ e $\exists y$ possuem apenas uma subárvore
- Predicados $P(t_1, \ldots, t_n)$: o nó P possui n subárvores

  as árvores dos termos $t_1, \ldots, t_n$

Ex: $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y))$



- Variáveis também aparecem como folhas

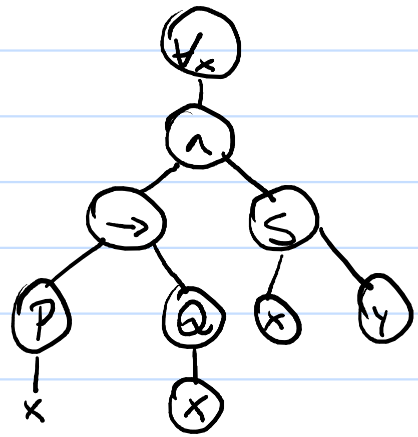
- VARIÁVEIS TAMBÉM APARECEM COMO FOLHAS

1. AO SUBIRMOS A ÁRVORE PARTINDO DE UM NÓ x, CHEGAMOS NO NÓ $\forall x$. ISSO SIGNIFICA QUE ESSAS OCORRÊNCIAS SÃO LIMITADAS POR $\forall x$, ENTÃO ELAS REPRESENTAM QUALQUER VALOR DE x

2. AO SUBIRMOS A ÁRVORE PARTINDO DE y, NÃO ESBARRAMOS EM NENHUM QUANTIFICADOR DE y, ENTÃO y É LIVRE

<u>DEF</u>: SEJA ϕ UMA FÓRMULA. UMA OCORRÊNCIA DE x É LIVRE EM ϕ SE É UM NÓ FOLHA PARA O QUAL NÃO EXISTE CAMINHO ACIMA DESSE NÓ ATÉ UM $\forall x$ OU $\exists x$. DO CONTRÁRIO x É LIMITADO.
PARA $\forall x \phi$ OU $\exists x \phi$, DIZEMOS QUE ϕ É O ESCOPO DE x

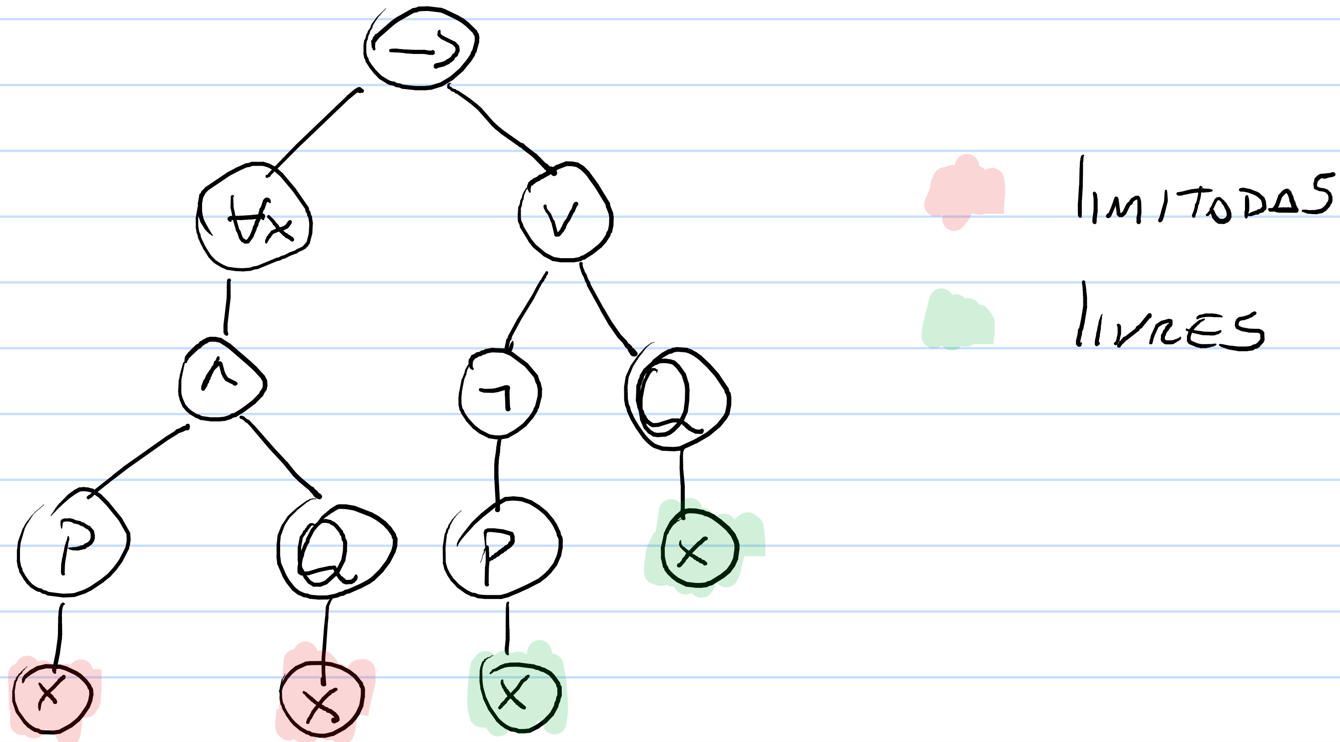
EX: $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))$



DEF: Seja ϕ uma fórmula. Uma ocorrência de x é livre em ϕ se é um nó folha para o qual não existe caminho acima desse nó até um $\forall x$ ou $\exists x$. Do contrário x é limitado.
Para $\forall x \phi$ ou $\exists x \phi$, dizemos que ϕ é o escopo de x

OBS: Uma variável pode ser livre e limitada em uma fórmula

$$(\forall x\,(P(x) \land Q(x))) \to (\neg P(x) \lor Q(x))$$



→ Mas cada ocorrência de x ou é livre ou é limitada, nunca ambos

SUBSTITUIÇÕES

→ VARIÁVEIS GUARDAM LUGAR.
DEVEMOS SUBSTITUÍ-LAS POR INFORMAÇÕES MAIS CONCRETAS

→ SÓ PODEMOS SUBSTITUIR VARIÁVEIS POR TERMOS

DEF: DADOS UMA VARIÁVEL x, UM TERMO t, E UMA FÓRMULA ϕ, DEFINIMOS $\phi[t/x]$ COMO A FÓRMULA OBTIDA DE ϕ AO SUBSTITUIRMOS TODA OCORRÊNCIA LIVRE DE x POR t.

EX: SE ϕ É $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y))$

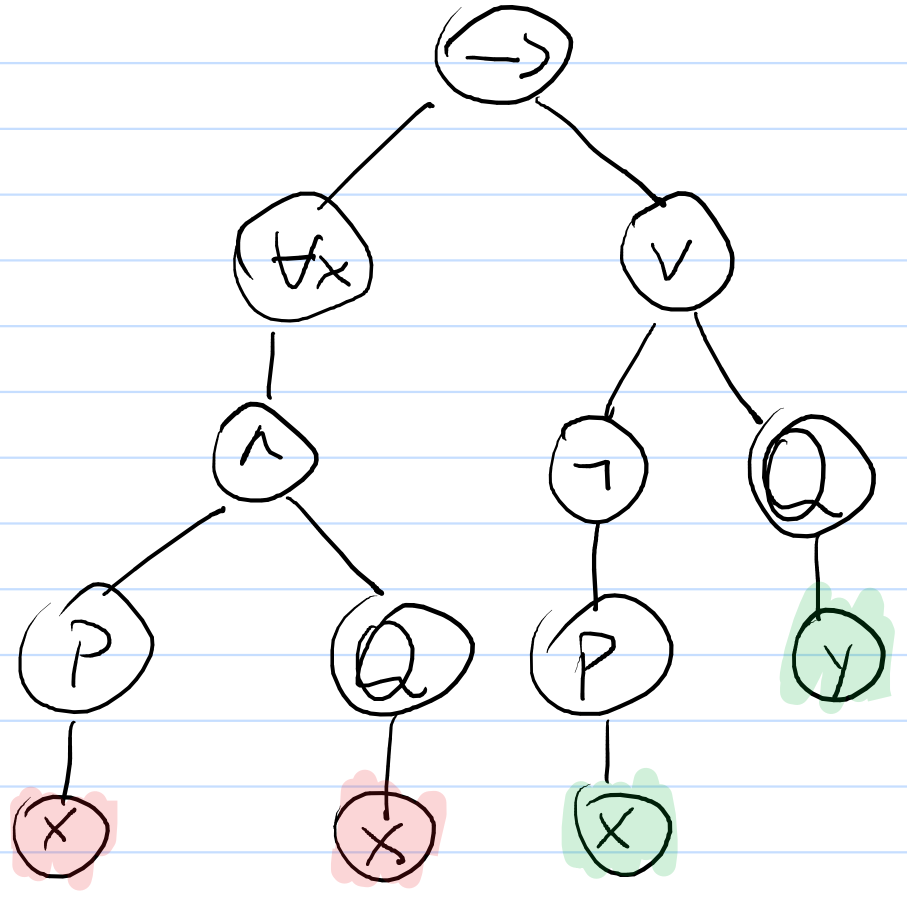
ENTÃO $\phi[t/x]$ É ϕ, POIS NENHUMA OCORRÊNCIA DE x É LIVRE

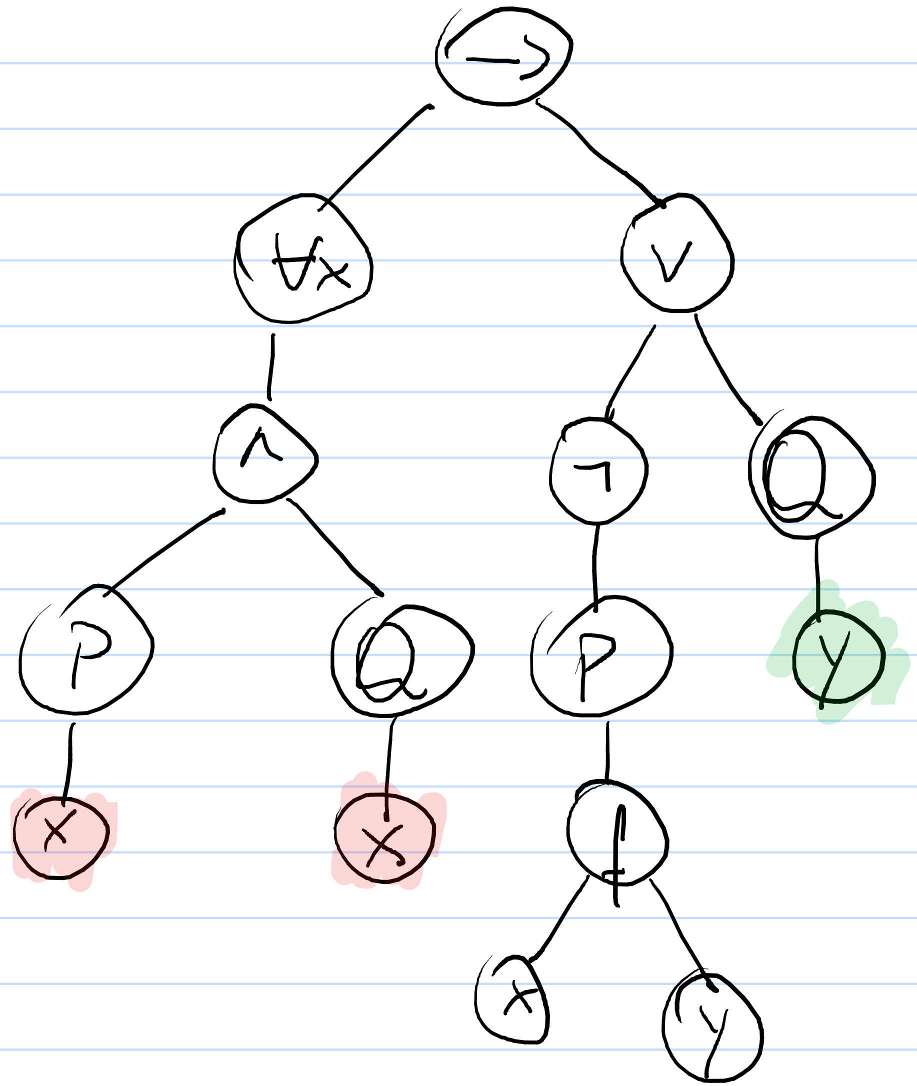
MAS $\phi[t/y]$ É $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,t))$

Ex:

$$\phi \qquad\qquad\qquad\qquad \phi[f(x,y)/x]$$

$$(\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))) \to (\neg P(x) \vee Q(y))$$

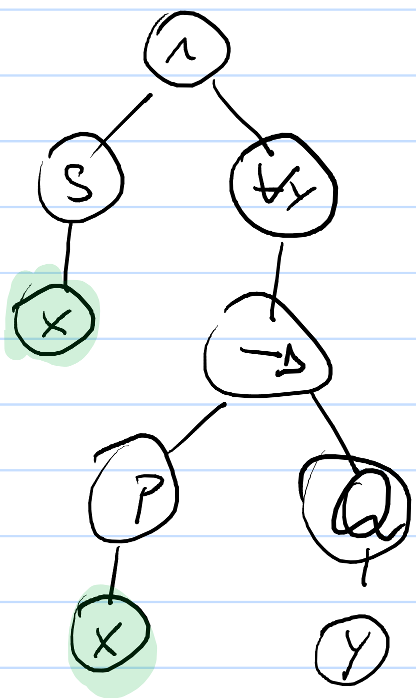


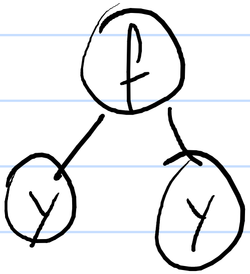


EFEITO COLATERAL: AO FAZER $\phi[t/x]$ O TERMO t PODE CONTER A VARIÁVEL y, MESMO QUE x ESTEJA NO ESCOPO DE $\exists y$ OU $\forall y$

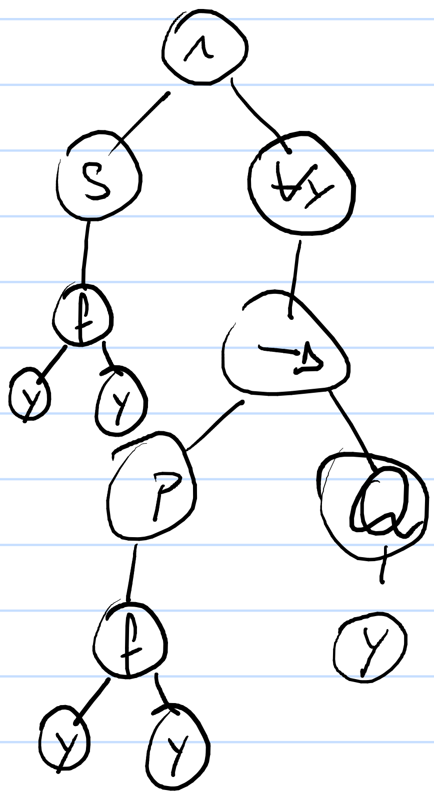
→ TEMOS QUE EVITAR ISSO

EX: ϕ





$\phi[f(y,y)/x]$



EX: ϕ é $\exists y(x<y)$ e t é y, $\phi[t/y]$ é $\exists y(y<y)$

$\forall x\,\phi$ é $\forall x\,\exists y\,(x<y)$

No gostaríamos de substituir x por t em ϕ

<u>DEF</u>: Dados um termo t, uma variável x, e uma fórmula ϕ, dizemos que t é livre para x em ϕ se nenhuma folha livre x ocorre no escopo de $\exists y$ ou $\forall y$ para toda variável y de t.

→ As variáveis de t não podem virar limitadas após a substituição

TEORIA DA PROVA PARA LÓGICA DE PREDICADOS

→ NOVAS REGRAS DE PROVA

→ TODAS AS REGRAS DE PROVA DE LÓGICA PROPOSICIONAL CONTINUAM VÁLIDAS

REGRA DA IGUALDADE

$$\frac{}{t = t} \; =i$$

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]} \; =E$$

OBS: t_1 E t_2 TÊM QUE SER LIVRES PARA x

EX:

	$t_1 \qquad\quad t_2$		
1	$(a+1) = (1+a)$	PREMISSA	
2	$(a+1 > 1) \to (a+1 > 0)$	PREMISSA	$\phi[a+1/x]$
3	$(1+a > 1) \to (1+a > 0)$	$=E$ 1, 2	$\phi[1+a/x]$

USAMOS t_1 COMO $a+1$, t_2 COMO $1+a$ E ϕ COMO $(x > 1) \to (x > 0)$

EX: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$ SIMETRIA

1	$t_1 = t_2$	PREMISSA	
2	$t_1 = t_1$	$=i$	(É PRECISAMENTE $\phi[t_1/x]$)
3	$t_2 = t_1$	$=E$ 1, 2	(É PRECISAMENTE $\phi[t_2/x]$)

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]} = E$$

ϕ COMO $x = t_1$

EX: $t_1 = t_2,\ t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1.	$t_1 = t_2$	PREMISSA	$\phi[t_2/x]$
2.	$t_2 = t_3$	PREMISSA	
3	$t_1 = t_3$	$=E$ 2, 1	$\phi[t_3/x]$

ϕ É $t_1 = x$

$$\frac{t_2 = t_3 \qquad \phi[t_2/x]}{\phi[t_3/x]}$$

REGRAS DA QUANTIFICAÇÃO UNIVERSAL $\forall$

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall x E$$

→ DIZ QUE SE $\forall x\, \phi$ É VERDADE, ENTÃO PODEMOS SUBSTITUIR x POR QUALQUER TERMO t

↳ t DEVE SER LIVRE PARA x EM ϕ

E CONCLUIR QUE $\phi[t/x]$ TAMBÉM É VERDADE

→ t É UMA INSTÂNCIA "MAIS CONCRETA" DE x

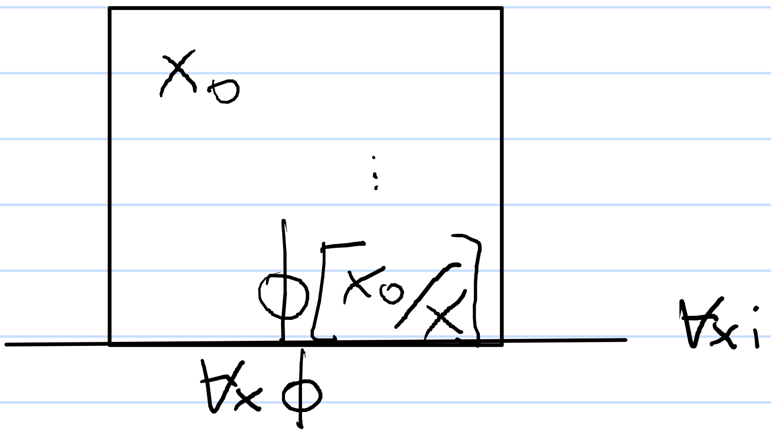
EX: SE ϕ É $\exists y\, (x<y)$

NOS NÚMEROS NATURAIS VALE $\forall x\, \exists y\, (x<y)$

SUPONHA QUE t É y $\phi[y/x]$ É $\exists y\, (y<y)$

→ A introdução é delicada

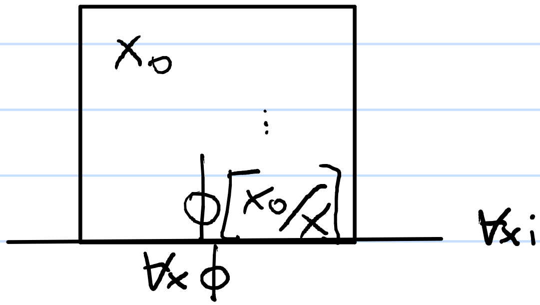
→ Precisa de uma variável fictícia (dummy) x_0



→ Diz que se começarmos com uma variável "fresca" x_0, e provarmos $\phi[x_0/x]$, então vale $\forall x\, \phi$

→ x_0 não pode ter sido usada antes

Ex: $\forall x\,(P(x) \to Q(x)),\ \forall x\,P(x) \vdash \forall x\,Q(x)$



1.	$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	PREMISSA
2.	$\forall x\,P(x)$	PREMISSA
3.	x_0	variável fresca
4	$P(x_0)$	$\forall x E$ 2
5	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x E$ 1
6	$Q(x_0)$	$\to E$ 4, 5
7	$\forall x\,Q(x)$	$\forall x i$ 3-6

$$\frac{\forall x\,\phi}{\phi[t/x]}\ \forall x E$$

Ex: $P(t), \forall x\, (P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1.	$P(t)$	Premissa
2	$\forall x\, (P(x) \to \neg Q(x))$	Premissa
3	$P(t) \to \neg Q(t)$	$\forall x\, e$ 2
4	$\neg Q(t)$	$\to e$ 1, 3

$$\frac{\boxed{\begin{matrix} x_0 \\ \vdots \\ \phi[x_0/x] \end{matrix}}}{\forall x\, \phi}\ \forall x\, i$$

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall x\, E$$

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$$

→ $\forall x$ é um esquema de regras

→ Podemos pensar em $\forall$ como uma generalização de $\wedge$

$$\forall x\, \phi \quad \text{"="} \quad \phi[t_1/x] \wedge \phi[t_2/x] \wedge \dots \wedge \phi[t_n/x]$$

→ Enquanto $\wedge i$ tem duas premissas, $\forall x$ tem uma premissa $\phi[x_0/x]$ para cada "valor" possível para x_0

→ $\forall x$ é um esquema de regras

→ Podemos pensar em $\forall$ como uma generalização de $\wedge$

$$\forall x\, \phi \quad \text{"="} \quad \phi[t_1/x] \wedge \phi[t_2/x] \wedge \dots \wedge \phi[t_n/x]$$

→ Enquanto $\wedge i$ tem duas premissas, $\forall x$ tem uma premissa $\phi[x_0/x]$ para cada "valor" possível para x_0

- Para provar $\forall x \phi$, você tem que provar $\phi[x_0/x]$ para todo valor x_0

$$\times$$

- Para provar $\phi_1 \wedge \phi_2$, você tem que provar ϕ_i para $i = 1, 2$

→ Enquanto $\wedge e$ permite deduzir ϕ ou ψ de $\phi \wedge \psi$,

$\forall x e$ permite deduzir $\phi[x_0/x]$ para o x_0 que você quiser

Regras da Quantificação Existencial

→ Lembre-se que $\forall$ "estende" o $\wedge$, então $\exists$ estende $\vee$

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2}\ \vee i \qquad\qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x\, \phi}$$

$\exists x \phi \sim \phi_1 \vee \phi_2 \vee \cdots \vee \phi_n$

$\forall x \phi \sim \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n$

→ $\phi[t/x]$ nos dá mais informação que $\exists x \phi$

t → testemunha

Exclusão

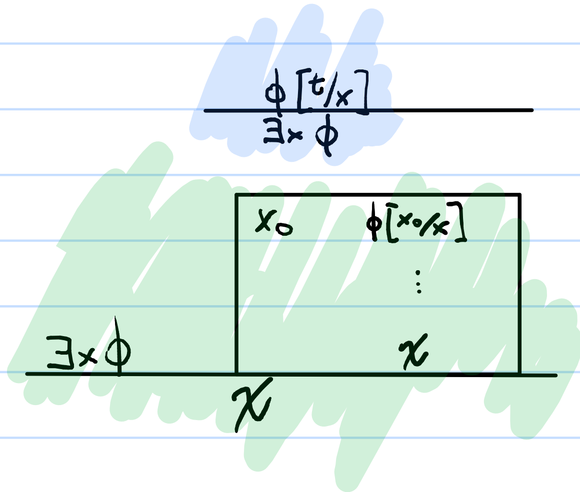
$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi} \qquad\qquad \frac{\exists x \phi \qquad \boxed{\begin{array}{cc} x_0 & \phi[x_0/x]\\ & \vdots\\ & \chi\end{array}}}{\chi}$$

→ x_0 não pode ocorrer fora da caixa, nem em χ

→ Da mesma forma que se quiser usar $\phi_1 \vee \phi_2$, você tem que estar preparado para usar tanto ϕ_1 quanto ϕ_2, se quiser usar $\exists x \phi$, você deve estar preparado para usar $\phi[x_0/x]$ para cada x_0.

Ex: $\forall x\, \phi \vdash \exists x\, \phi$ (supondo que o universo não é vazio)

1.	$\forall x\, \phi$	Premissa	
2.	$\phi[t/x]$	$\forall x$E 1	(onde $t \in$ Universo)
3.	$\exists x\, \phi$	$\exists x$i 2	



Ex: $\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ \exists x\, P(x) \vdash \exists x\, Q(x)$

1		$\forall x\, (P(x) \to Q(x))$	Premissa
2		$\exists x\, P(x)$	Premissa
3	x_0	$P(x_0)$	Suposição
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$E 1
5		$Q(x_0)$	$\to$e 3,4
6		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$i 5
7.		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$E 2, 3-6

Ex: $\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ \exists x\, (P(x) \land \neg Q(x))$ (vai chegar numa contradição)

Ex: $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$

1		$\exists x P(x)$	PREMISSA
2		$\forall x \underbrace{\forall y (P(x) \to Q(y))}_{\varphi}$	PREMISSA
3	y_0		SUPOSIÇÃO
4	x_0	$P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5		$\forall y (P(x_0) \to Q(y))$	$\forall x$ E 2
6		$P(x_0) \to Q(y_0)$	$\forall y$ E 5
		$Q(y_0)$	$\to$E 4, 6
		$Q(y_0)$	$\exists x$ E 1, ...
		$\forall y Q(y)$	$\forall y$ i

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}$$

	x_0	$\varphi[x_0/x]$
		$\vdots$
$\exists x \varphi$		χ
	χ	

x_0	
$\vdots$	
$\varphi[x_0/x]$	
$\forall x \varphi$	$\forall x$ i

$$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \quad \forall x \text{ E}$$

EX: "NEM TODO PÁSSARO PODE VOAR"

$\exists x (B(x) \land \neg F(x))$ X $\neg \forall x (B(x) \to F(x))$

$\exists x (B(x) \land \neg F(x)) \vdash \neg \forall x (B(x) \to F(x))$

$\phi \dashv\vdash \psi$

1.		$\exists x (B(x) \land \neg F(x))$	PREMISSA
2		$\forall x (B(x) \to F(x))$	SUPOSIÇÃO
3	x_0	$B(x_0) \land \neg F(x_0)$	SUPOSIÇÃO
4		$B(x_0)$	$\land E$ 3
5		$\neg F(x_0)$	$\land E$ 3
6		$B(x_0) \to F(x_0)$	$\forall x$ 2
7		$F(x_0)$	$\to E$ 4, 6
8		$\bot$	$\neg$ 5, 7
9		$\bot$	$\exists E$ 1, 3-8
10		$\neg \forall x (B(x) \to F(x))$	PPC

ϕ

$\bot$

$\neg \phi$

TEO

1. (a) $\neg \forall x \, \phi \dashv\vdash \exists x \, \neg \phi$
(b) $\neg \exists x \, \phi \dashv\vdash \forall x \, \neg \phi$

2. SE X NÃO É LIVRE EM ψ

a $(\forall x \, \phi) \wedge \psi \dashv\vdash \forall x \, (\phi \wedge \psi)$
b $(\forall x \, \phi) \vee \psi \dashv\vdash \forall x \, (\phi \vee \psi)$
c $(\exists x \, \phi) \wedge \psi \dashv\vdash \exists x \, (\phi \wedge \psi)$
d $(\exists x \, \phi) \vee \psi \dashv\vdash \exists x \, (\phi \vee \psi)$

$\forall x \, (\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \forall x \, \phi$

$\exists x \, (\phi \to \psi) \dashv\vdash (\forall x \, \phi) \to \psi$

$\forall x \, (\phi \to \psi) \dashv\vdash (\exists x \, \phi) \to \psi$

$\exists x \, (\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \exists x \, \phi$

3 a $(\forall x\, \phi) \wedge (\forall x\, \psi) \dashv\vdash \forall x\, (\phi \wedge \psi)$

b $(\exists x\, \phi) \vee (\exists x\, \psi) \dashv\vdash \exists x\, (\phi \vee \psi)$

4 a $\forall x \forall y\, \phi \dashv\vdash \forall y \forall x\, \phi$

b $\exists x \exists y\, \phi \dashv\vdash \exists y \exists x\, \phi$

Ex: $\neg(P_1 \wedge P_2) \vdash \neg P_1 \vee \neg P_2$

1	$\neg(P_1 \wedge P_2)$			PREMISSA
2	$\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2)$			SUPOSIÇÃO
3	$\neg P_1$	SUPOSIÇÃO	$\neg P_2$	SUPOSIÇÃO
4	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i_1$ 3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i_2$ 3
5	$\perp$	$\neg e$ 2, 4	$\perp$	$\neg e$ 2, 4
6	P_1	PPC 3-5	P_2	PPC 3-5
7	$P_1 \wedge P_2$			$\wedge i$ 6, 6
8	$\perp$			$\neg e$ 1, 7
	$\neg P_1 \vee \neg P_2$			PPC

Ex: $\neg(P_1 \wedge P_2) \vdash \neg P_1 \vee \neg P_2$

$\neg \forall x P(x)$ $\quad\quad$ $\exists x \neg P(x)$

1	$\neg \forall x P(x)$	Premisso
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	suposição
3	x_0	suposição
4	$\neg P(x_0)$	suposição
5	$\exists x \neg P(x)$	$\exists x$i 4
6	$\perp$	$\neg$e 2, 5
7	$P(x_0)$	PPC 4-6
8	$\forall x P(x)$	$\forall x$i 3-7
9	$\perp$	$\neg$e 1, 8
10	$\exists x \neg P(x)$	P.P.C 2-9

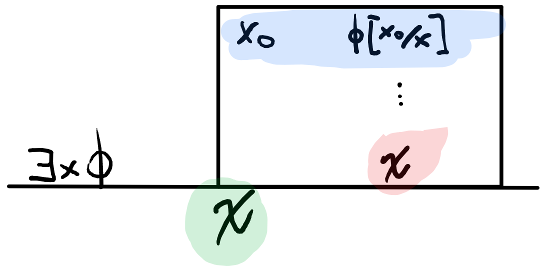
1	$\neg(P_1 \wedge P_2)$	Premissa		
2	$\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2)$	suposição		
3	$\neg P_1$	suposição	$\neg P_2$	suposição
4	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee$i$_1$ 3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee$i$_2$ 3
5	$\perp$	$\neg$e 2, 4	$\perp$	$\neg$e 2, 4
6	P_1	PPC 3-5	P_2	PPC 3-5
7	$P_1 \wedge P_2$	$\wedge$i 6, 6		
8	$\perp$	$\neg$e 1, 7		
	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	PPC		

$\neg \forall x \, \phi \vdash \exists x \, \neg \phi$

1	$\neg \forall x \, \phi$	Premissa
2	$\neg \exists x \, \neg \phi$	Suposição
3	x_0	Suposição
4	$\neg \phi [x_0 / x]$	Suposição
5	$\exists x \, \neg \phi$	$\exists$xi 4
6	$\perp$	$\neg$ 2, 5
7	$\phi [x_0 / x]$	PPC 4-6
8	$\forall x \, \phi$	$\forall$xi 3-7
9	$\perp$	$\neg$e 1, 8
10.	$\exists x \, \neg \phi$	PPC 2-9

1	$\neg \forall x \, P(x)$	Premissa
2	$\neg \exists x \, \neg P(x)$	Suposição
3	x_0	Suposição
4	$\neg P(x_0)$	Suposição
5	$\exists x \, \neg P(x)$	$\exists$xi 4
6	$\perp$	$\neg$e 2, 5
7	$P(x_0)$	PPC 4-6
8	$\forall x \, P(x)$	$\forall$xi 3-7
9	$\perp$	$\neg$e 1, 8
10	$\exists x \, \neg P(x)$	P.P.C 2-9

$\exists x \neg \phi \vdash \neg \forall x \phi$



1		$\exists x \neg \phi$	PREMISSA
2		$\forall x \phi$	SUPOSIÇÃO
3	x_0	$\neg \phi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
4		$\phi[x_0/x]$	$\forall x$ e 2
5		$\perp$	$\neg$e 3,4
6		$\perp$	$\exists x$ 1, 3-5
7		$\neg \forall x \phi$	PPC 2-6

$\forall x\, P(a,x,x),\ \forall x \forall y \forall z\, (P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))) \vdash \exists z\, P(f(a),z,f(f(a)))$

1	$\forall x\, P(a,x,x)$	Premissa	
2	$\forall x \forall y \forall z\, (P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z)))$	Premissa	
3	$\forall y \forall z\, (P(a,y,z) \to P(f(a),y,f(z)))$	$\forall x e$ 2	com $x = a$
4	$\forall z\, (P(a,f(a),z) \to P(f(a),f(a),f(z)))$	$\forall y e$ 3	com $y = f(a)$
5	$P(a,f(a),f(a)) \to P(f(a),f(a),f(f(a)))$	$\forall z e$ 4	com $z = f(a)$
6	$P(a,f(a),f(a))$	$\forall x e$ 1	com $x = f(a)$
7	$P(f(a),f(a),f(f(a)))$	$\to e$ 6, 5	
8	$\exists z\, P(f(a),z,f(f(a)))$	$\exists z i$ 7	

1	$\forall x \forall y \forall z \, (S(x,y) \wedge S(y,z) \rightarrow S(x,z))$	PREMISSA
2	$\forall x \, \neg S(x,x)$	PREMISSA
3	x_0	SUPOSIÇÃO
4	y_0	SUPOSIÇÃO
5	$S(x_0,y_0)$	SUPOSIÇÃO
6	$\forall y \forall z \, (S(x_0,y) \wedge S(y,z) \rightarrow S(x_0,z))$	$\forall x$e 1
7	$\forall z \, (S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,z) \rightarrow S(x_0,z))$	$\forall y$e 6
8	$S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,x_0) \rightarrow S(x_0,x_0)$	$\forall z$e 7
8	$\neg S(x_0,x_0)$	$\forall x$e 2
9	$\neg (S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,x_0))$	M.T 7, 8
10	$\neg S(x_0,y_0) \vee \neg S(y_0,x_0)$	EQUIV 9
11	$S(x_0,y_0) \rightarrow \neg S(y_0,x_0)$	EQUIV 10
12	$\neg S(y_0,x_0)$	$\rightarrow$e 5, 11
13	$S(x_0,y_0) \rightarrow \neg S(y_0,x_0)$	$\rightarrow$i 5-12
14	$\forall y \, S(x_0,y) \rightarrow \neg S(y,x_0)$	$\forall y$i 4-13
15	$\forall x \forall y \, (S(x,y) \rightarrow \neg S(y,x))$	$\forall x$ 3-14

10	$S(y_0,x_0)$	SUPOSIÇÃO
11	$S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,x_0)$	$\wedge$i 5,10
12	$\bot$	$\neg$ 9, 11

$\neg S(y_0,x_0)$

$\forall x \forall y \forall z \;\; x<y \wedge y<z \rightarrow x<z$

$\neg \; x<x$

$\forall x \forall y \;\; x<y \rightarrow \neg \; y<x$

1	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$	PREMISSA
2	$\neg \exists x\,(P(x) \wedge R(x))$	PREMISSA
3	x_0	SUPOSIÇÃO
4	$P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0) \vee R(x_0)$	$\forall x e$ 1
6	$Q(x_0) \vee R(x_0)$	$\rightarrow e$ 4,5
7	$Q(x_0)$	SUPOSIÇÃO
8	$Q(x_0)$	CÓPIA
7	$R(x_0)$	SUPOSIÇÃO
8	$P(x_0) \wedge R(x_0)$	$\wedge i$ 4,7
9	$\exists x\,(P(x) \wedge R(x))$	$\exists x\, i$ 8
10	$\perp$	$\neg e$ 2,9
11	$Q(x_0)$	$\perp e$, 10
12	$Q(x_0)$	$\vee e$ 6, 7-8, 7-11
13	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\rightarrow i$ 4-12
14	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	$\forall x\, i$ 3-13

Semântica da Lógica de Predicado

- Curso
  - Parte 1 Proposicional
    - $p \vee q$, $p \to q$
    - Teoria da Prova: $\Gamma \vdash \psi$
    - $\Leftrightarrow$
    - Semântica: Tabela verdade $\Gamma \models \psi$
      - Valor concreto para átomos proposicionais
  - Parte 2 Predicados
    - $\forall x P(x) \to Q$
    - $\exists x R(x) \wedge Q(x)$
    - Teoria da Prova: Novas regras para lidar com quantificadores $\Gamma \vdash \psi$
    - Semântica: $\Gamma \models \psi$
      - Valor concreto para predicados e funções

Você está aqui

TEORIA DA PROVA ⇝ CARACTERIZAÇÃO POSITIVA

SEMÂNTICA ⇝ CARACTERIZAÇÃO NEGATIVA

OBS: MOSTRAR QUE $\Gamma \overset{\text{vinculação semântica}}{\vDash} \psi$ É FÁCIL QUANDO O NÚMERO DE AVALIAÇÕES É PEQUENO

⇝ MAS ISSO NÃO É O CASO NA LÓGICA DE PREDICADOS

⇝ HÁ UM NÚMERO INFINITO DE AVALIAÇÕES (AQUI CHAMADA DE MODELO)

⇝ SE VOCÊ ESTIVER COM PROBLEMA PARA PROVAR UM SEQUENTE $\Gamma \vdash \psi$, TALVEZ SEJA A HORA DE BUSCAR UM CONTRAEXEMPLO PARA MOSTRAR QUE $\Gamma \nvDash \psi$ (E CONSEQUENTEMENTE $\Gamma \nvdash \psi$)

(FAMÍLIA DE PREMISSAS $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$)

Modelos

- Em lógica proposicional uma fórmula era avaliada em T ou F quando dávamos valores verdade para seus átomos.
  - linha na tabela verdade
- Aqui não podemos assumir que um predicado é sempre verdade ou sempre falso
- Também queremos explorar o sentido dos quantificadores

Por que $\forall x \exists y\, R(x,y)$ é diferente de $\exists x \forall y\, R(x,y)$?

- Quando encontro $\exists y\, \psi$, devemos buscar um valor concreto para y t.q. ψ vale para aquele valor
  - se não existe tal valor, então avaliamos $\exists y \psi$ em F
- Quando encontro $\forall y\, \psi$, devemos mostrar que todo valor concreto para y faz ψ valer
  - se existe valor que ψ é F, então avaliamos $\forall y \psi$ em F

DEF: SEJA $\mathcal{F}$ UM CONJ. DE SÍMBOLOS DE FUNÇÃO E $\mathcal{P}$ UM CONJ. DE SÍMBOLOS DE PREDICADO COM ARIDADE FIXADA. UM MODELO M PARA O PAR $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ CONSISTE EM UM CONJUNTO DE DADOS T.Q.

1) UM CONJUNTO NÃO VAZIO A (O UNIVERSO DE VALORES CONCRETOS)

2) PARA CADA SÍMBOLO 0-ÁRIO $f \in \mathcal{F}$, UM VALOR CONCRETO $f^M \in A$

3) PARA CADA SÍMBOLO n-ÁRIO $f \in \mathcal{F}$, UMA FUNÇÃO $f^M : A^n \to A$ DOS n-TUPLAS SOBRE A PARA A.

4) PARA CADA SÍMBOLO n-ÁRIO $P \in \mathcal{P}$, $n > 0$, UM SUBCONJUNTO $P^M \subseteq A^n$

~~no~~ f E P SÃO SÍMBOLOS, ENQUANTO f^M E P^M SÃO FUNÇÕES CONCRETAS

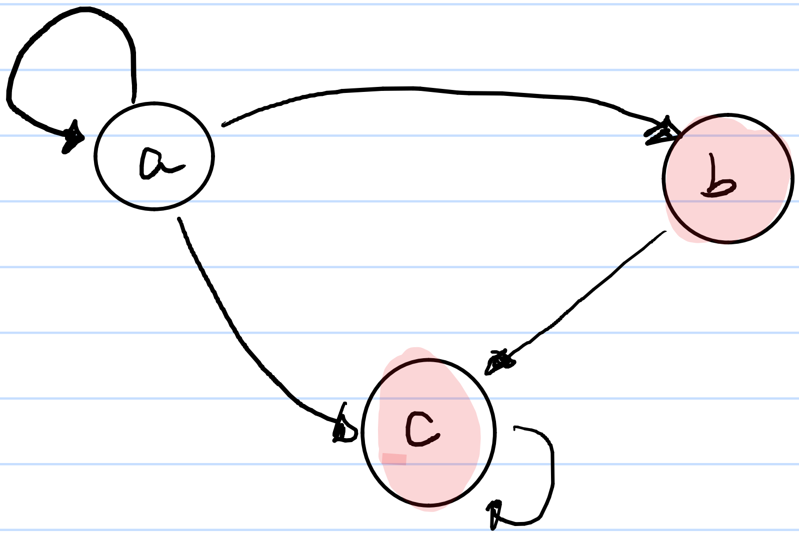
Ex: $\mathcal{F} = \{i\}$ e $\mathcal{P} = \{R, F\}$,

i é constante
F é 1-ário
R é 2-ário

- Um modelo pode ser o conjunto de estados de um programa de computador

- i^M é o estado inicial, R^M é uma relação de transição, F^M é o conjunto de estados finais

$A = \{a, b, c\}$, $i^M = a$, $R^M = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$
$F^M = \{b, c\}$



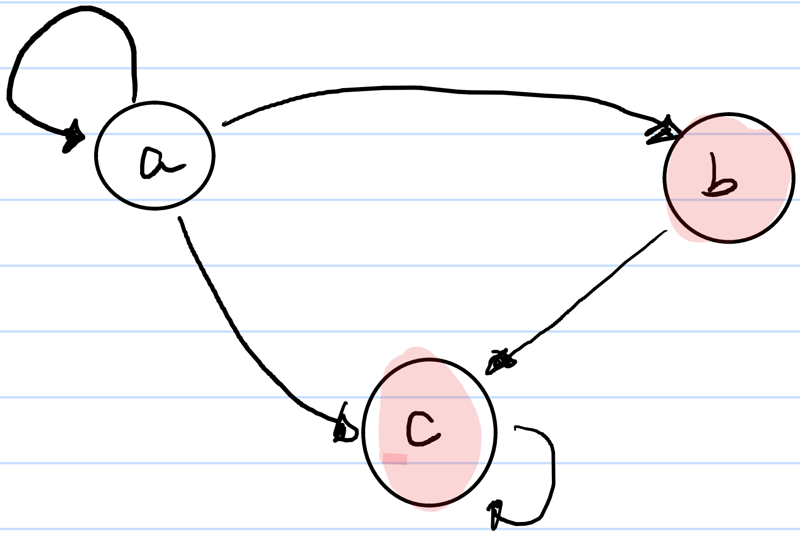
Podemos checar fórmulas

1. $\exists y\, R(i,y)$, existe uma transição saindo do estado inicial
verdade pois $i^M = a$ e $(a,a) \in R^M$

2. $\neg F(i)$ = i não é estado fina

- i^M é o estado inicial R^M é uma relação de transição
F^M é o conjunto de estados finais

$A = \{a, b, c\}$, $i^M = a$, $R^M = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$
$F^M = \{b, c\}$



Podemos checar fórmulas

1. $\exists y\, R(i,y)$, existe uma transição saindo do estado inicial
verdade pois $i^M = a$ e $(a,a) \in R^M$

2. $\neg F(i)$ = i não é estado fina

3. $\forall x \forall y \forall z \left(\left(R(x,y) \wedge R(x,z) \right) \rightarrow y = z \right)$

diz que a transição é deterministica:
a partir de um estado há apenas um outro estado que podemos atingir

não vale pois $(a,b), (a,c) \in R^M$

4. $\forall x \exists y\, R(x,y)$

$\Sigma = \{e, \cdot\}$, $\mathcal{P} = \{\leq\}$

e É CONSTANTE

$\cdot$ É 2-ÁRIO

$\leq$ É 2-ÁRIO

INFIXA

$a \cdot b$ $\quad a \leq b$

$\mathcal{M}$: A É O CONJUNTO DE TODAS AS PALAVRAS QUE PODEM SER ESCRITAS NO ALFABETO $\{0,1\}$, INCLUSIVE A PALAVRA VAZIA ε

→ $e^{\mathcal{M}}$ É ε, $\cdot^{\mathcal{M}}$ É A CONCATENAÇÃO DE PALAVRAS:

$010 \cdot^{\mathcal{M}} 110$ É 010110

$\leq^{\mathcal{M}}$ É A "ORDENAÇÃO" DE PREFIXO.

DIZEMOS QUE s_1 É PREFIXO DE s_2, SE EXISTE s_3 T.Q.

$s_1 \cdot^{\mathcal{M}} s_3 = s_2$

$\leq^{\mathcal{M}}$ É O CONJUNTO $\{(s_1, s_2) : s_1$ É PREFIXO DE $s_2\}$

1. $\forall x((x \leq x \cdot e) \wedge (e \cdot x \leq x))$ É VÁLIDO EM $\mathcal{M}$

2. $\exists y \forall x (y \leq x)$ É VÁLIDO POR CAUSA DE ε (COMO x)

3 $\forall x \exists y (y \leq x)$ TAMBÉM É VÁLIDO

4. $\neg \exists x \forall y ((x \leq y) \to (y \leq x))$ É VÁLIDO

5. $\forall x \forall y \forall z ((x \leq y) \to (x \cdot z \leq y \cdot z))$

Problema técnico

→ Se a é um valor no universo do nosso modelo, e x é uma var livre de ϕ, a substituição $\phi[a/x]$ é bem intencionada, mas mal definida.

DEF: Var é o conjunto de variáveis

→ é um conjunto?
$P(a)$

DEF: Uma tabela de pesquisa (look-up table) ou ambiente para um universo A é uma função $l : Var \to A$.

DEF: Dado ambiente l, denotamos por $l[x \to a]$ o ambiente $l' : Var \to A$ t.q. $l'(x) = a$ e $l'(y) = l(y)$ para todo y diferente de x.

DEF: Dado um modelo $\mathcal{M}$ para o par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ e um ambiente l, definimos a relação de satisfação $\mathcal{M} \models_l \phi$ para cada fórmula ϕ sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ e ambiente l por indução estrutural em ϕ. Se $\mathcal{M} \models_l \phi$ vale, dizemos que ϕ é computada em T no modelo $\mathcal{M}$ com respeito a l.

predicado
P: se ϕ é da forma $P(t_1, \ldots, t_n)$, interpretamos

DEF: Dado um modelo $\mathcal{M}$ para o par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ e um ambiente l, definimos a relação de satisfação $\mathcal{M} \models_l \phi$ para cada fórmula ϕ sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ e ambiente l por indução estrutural em ϕ. Se $\mathcal{M} \models_l \phi$ vale, dizemos que ϕ é computada em T no modelo $\mathcal{M}$ com respeito a l.

PREDICADO

P: Se ϕ é da forma $P(t_1, \dots, t_m)$, interpretamos $t_1, \dots, t_m$ em A substituindo todas as variáveis pelo seu valor em l. Dessa forma, obtemos valores $a_1, \dots, a_m \in A$, em que cada símbolo de função f é interpretado por $f^{\mathcal{M}}$. Então $\mathcal{M} \models_l P(t_1, \dots, t_m)$ sse $(a_1, \dots, a_m) \in P^{\mathcal{M}}$.

$\forall x$: A relação $\mathcal{M} \models_l \forall x \psi$ vale sse $\mathcal{M} \models_{l[x \to a]} \psi$ para todo $a \in A$

$\exists x$: A relação $\mathcal{M} \models_l \exists x \psi$ vale sse $\mathcal{M} \models_{l[x \to a]} \psi$ para algum $a \in A$

$\neg$: A relação $\mathcal{M} \models_l \neg \psi$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi$ não vale

$\vee$: A relação $\mathcal{M} \models_l \psi_1 \vee \psi_2$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi_1$ vale ou $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ vale

$\wedge$: A relação $\mathcal{M} \models_l \psi_1 \wedge \psi_2$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi_1$ vale e $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ vale

$\rightarrow$: A relação $\mathcal{M} \models_l \psi_1 \rightarrow \psi_2$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ vale sempre que $\mathcal{M} \models_l \psi_1$ vale

→ ESCREVEMOS $\mathcal{M} \not\models_\ell \psi$ PARA DIZER QUE $\mathcal{M} \models_\ell \psi$ NÃO VALE

→ SE ϕ NÃO POSSUI VARIÁVEL LIVRE, DIZEMOS QUE ϕ É UMA SENTENÇA

OBS: SE ℓ E ℓ' TÊM OS MESMOS VALORES EM TODAS AS VARIÁVEIS LIVRES DE ϕ,
ENTÃO $\mathcal{M} \models_\ell \psi$ SSE $\mathcal{M} \models_{\ell'} \psi$

ISSO IMPLICA QUE SE ϕ É UMA SENTENÇA, ENTÃO $\mathcal{M} \models_\ell \psi$ OU $\mathcal{M} \not\models_\ell \psi$
INDEPENDENTEMENTE DO AMBIENTE ℓ.

→ NESTE CASO, ESCREVEMOS $\mathcal{M} \models \phi$

EX: $\mathcal{F} = \{alma\}$, $\mathcal{P} = \{ama\}$: ALMA É UMA CONSTANTE, AMA É UM PREDICADO BINÁRIO

O MODELO $\mathcal{M}$: $A = \{a, b, c\}$, $alma^{\mathcal{M}} = a$, $ama^{\mathcal{M}} = \{(a,a), (b,a), (c,a)\}$

$\mathcal{M}$ SATISFAZ: "NENHUM DOS AMANTES DOS AMANTES DE ALMA AMA ALMA".

$$\forall x \forall y \left(ama(x, alma) \wedge ama(y, x) \rightarrow \neg ama(y, alma) \right)$$

$A = \{a, b, c\}$ $\qquad \exists x \forall y \big(ama(x, alma) \wedge ama(y, x) \to \neg ama(y, alma) \big)$

$\overset{F}{\forall x} \forall y \big(ama(x, alma) \wedge ama(y, x) \to \neg ama(y, alma) \big)$ vale se

$$\overset{F}{\forall y} \big(ama^{\mu}(a, a) \wedge ama^{\mu}(y, a) \to \neg ama^{\mu}(y, a) \big)$$

$$\big(\overset{T}{ama^{\mu}(a, a)} \wedge \overset{T}{ama^{\mu}(a, a)} \to \overset{F}{\neg} \overset{T}{ama^{\mu}(a, a)} \big)$$

$$\big(\overset{T}{ama^{\mu}(a, a)} \wedge \overset{T}{ama^{\mu}(b, a)} \to \overset{F}{\neg} \overset{T}{ama^{\mu}(b, a)} \big)$$

$$\big(\overset{T}{ama^{\mu}(a, a)} \wedge \overset{T}{ama^{\mu}(c, a)} \to \overset{F}{\neg} \overset{T}{ama^{\mu}(c, a)} \big)$$

$alma^{\mu} = a$

$ama^{\mu} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$$\forall y \big(ama^{\mu}(b, a) \wedge ama^{\mu}(y, b) \to \neg ama^{\mu}(y, a) \big)$$

$$\big(\overset{T}{ama^{\mu}(b, a)} \wedge \overset{F}{ama^{\mu}(a, b)} \overset{T}{\to} \neg ama^{\mu}(a, a) \big)$$

$$\big(\overset{T}{ama^{\mu}(b, a)} \wedge \overset{F}{ama^{\mu}(b, b)} \overset{T}{\to} \neg ama^{\mu}(b, a) \big)$$

$$\big(\overset{T}{ama^{\mu}(b, a)} \wedge \overset{F}{ama^{\mu}(c, b)} \overset{T}{\to} \neg ama^{\mu}(c, a) \big)$$

$$\forall y \big(ama^{\mu}(c, alma^{\mu}) \wedge ama^{\mu}(y, c) \to \neg ama^{\mu}(y, alma^{\mu}) \big)$$

$$\forall x \forall y \left(ama(x, alma) \wedge ama(y, x) \rightarrow \neg ama(y, alma) \right)$$

A FÓRMULA VALE SE $ama^{M} = \{(b, a), (c, b)\}$

Vinculação semântica

→ Em lógica prop. $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$ vale sse ψ é avaliado em T sempre que $\phi_1, \dots, \phi_n$ são todos avaliados em T.

Def: Seja Γ um conjunto de fórmulas, e ψ uma fórmula.

1: $\Gamma \vDash \psi$ vale sse para todo modelo $\mathcal{M}$ e ambiente l, sempre que $\mathcal{M} \vDash_l \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$, temos também $\mathcal{M} \vDash_l \psi$.

2: ψ é satisfazível sse há um modelo $\mathcal{M}$ e um ambiente l t.q. $\mathcal{M} \vDash_l \psi$ vale

3: ψ é válido sse $\mathcal{M} \vDash_l \psi$ vale para todo modelo $\mathcal{M}$ e ambiente l.

4: Γ é consistente sse existe um modelo $\mathcal{M}$ e ambiente l t.q.

$$\mathcal{M} \vDash_l \phi \text{ para todo } \phi \in \Gamma$$

→ Checar computacionalmente $\mathcal{M} \vDash \phi$ é difícil quando A é infinito
→ Checar $\forall x \psi$ consiste em checar $\mathcal{M} \vDash_{l[x \to a]} \psi$ para todo valor de a.

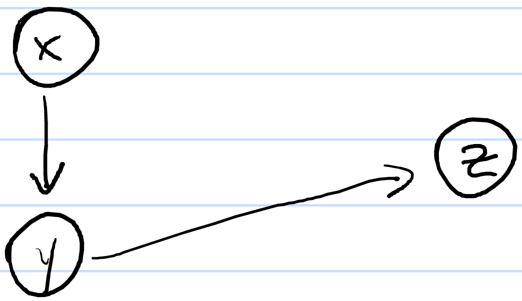
EX: $\forall x (P(x) \to Q(x)) \models (\forall x P(x)) \to (\forall x Q(x))$

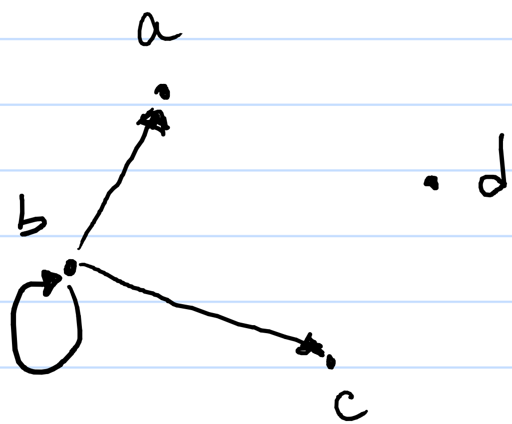
A RECÍPROCA NÃO VALE

$$\overset{F}{(\forall x P(x))} \overset{T}{\to} \overset{F}{(\forall x Q(x))} \not\models \overset{F}{\forall x (P(x) \to Q(x))}$$

TOME M' COM UNIVERSO $A' = \{a, b\}$ $\quad P^{M'} = \{a\}$, $Q^{M'} = \{b\}$

1. $\forall x \forall y \exists z \, (R(x,y) \to R(y,z)) = \phi$ SE x APONTA PARA y, ENTÃO y APONTA PARA ALGUÉM





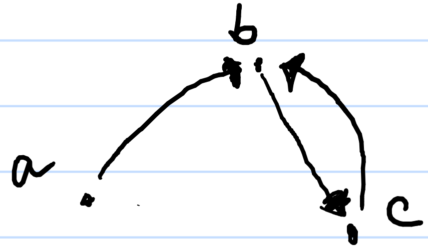
a) $A = \{a, b, c, d\}$, $R^{M} = \{(b,c), (b,b), (b,a)\}$

$M \not\models \phi$ POIS SE $x = b$ E $y = a$, TEMOS $(b,a) \in R^{M}$, MAS NÃO EXISTE $z \in A$ T.q $(a,z) \in R^{M}$

$\phi' = \exists x \exists y \exists z \, (R(x,y) \to R(y,z))$ TEMOS $M \models \phi'$ TOMANDO $x = y = z = b$

$x = y = b$ E $z \in \{a, b, c\}$

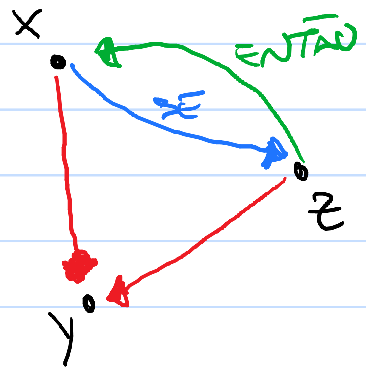
$\phi'' = \exists x \exists y \forall z \, (R(x,y) \to R(y,z))$ TEMOS $M \models \phi''$ TOMANDO $x = y = b$



b) $A' = \{a, b, c\}$, $R^{M'} = \{(b,c), (a,b), (c,b)\}$

TEMOS QUE $M \models \phi$

2. $\phi = \forall x \exists y \exists z \left(P(x,y) \land P(z,y) \land \left(P(x,z) \rightarrow P(z,x) \right) \right)$



a) A = NÚMEROS NATURAIS $= \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, \}$, $P^{\mathcal{M}} = \{(m,n) : m < n\}$

$$\forall x \exists y \exists z \left((x < y) \land (z < y) \land \left((x < z) \rightarrow (z < x) \right) \right)$$

(Qualquer)

$\mathcal{M} \models \phi$ PORQUE DADO x, TOME $y = x+1$ E $z = x$.

b) A' = NÚMEROS NATURAIS $= \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, \}$, $P^{\mathcal{M}} = \{(m, 2m) : m \in \mathbb{N}\}$

$(x,y) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow 2x = y$ $\qquad = \{(0,0), (\underset{x}{1}, \underset{y}{2}), (2,4), \ldots\}$

$$\forall x \exists y \exists z \left((2x = y) \land (2z = y) \land \left((2x = z) \rightarrow (2z = x) \right) \right)$$

$\mathcal{M} \models \phi$ POIS DADO x, TOMAMOS $y = 2x$ E $z = x$

$$\neg \forall x \exists y \exists z \left((x<y) \wedge (z<y) \wedge \left((x<z) \to (z<x) \right) \right)$$

$$\equiv \exists x \neg \exists y \exists z \left((x<y) \wedge (z<y) \wedge \left((x<z) \to (z<x) \right) \right)$$

$$\equiv \exists x \forall y \neg \exists z \left((x<y) \wedge (z<y) \wedge \left((x<z) \to (z<x) \right) \right)$$

$$\equiv \exists x \forall y \forall z \neg \left((x<y) \wedge (z<y) \wedge \left((x<z) \to (z<x) \right) \right)$$

$$\phi = \forall x \exists y \exists z \left(P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge \left(P(x,z) \rightarrow P(z,x)\right)\right)$$

c) M'' A'' = NÚMEROS NATURAIS $= \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, \}$,

$P^{M''} = \{(m, n) : m < n + 1\}$

$$\forall x \exists y \exists z \left(\left(x < y+1\right) \wedge \left(z < y+1\right) \wedge \left(\left(x < z+1\right) \rightarrow \left(z < x+1\right)\right)\right)$$

DADO x, TOME $y = z = x$

DADO x, TOME $z = x$ E $y > x$

4. P É UM PREDICADO DE ARIDADE 2

$\phi \quad \forall x\, \neg P(x,x) \equiv \neg \exists x\, P(x,x)$

$P^M \subseteq \{(x,y) \in A^2 : x \neq y\}$

M SATISFAZ ϕ $\quad A = \{a,b\},\ P^M = \{(a,b)\},\ P^M = \emptyset$

M' NÃO SATISFAZ ϕ $\quad A = \{a\},\ P^{M'} = \{(a,a)\}$

3 $\phi = \forall x \forall y\ Q(g(x,y), g(y,y), z)$

OBS: TEM variável livre

ENCONTRAR MODELOS μ E μ' E AMBIENTES l E l' T.q.

$$\mu \models_l \phi \quad \text{E} \quad \mu' \not\models_{l'} \phi$$

μ $\quad A = \{0\}$, $g : A^2 \to A$, $(x,y) \to 0$, $l(x) = l(y) = l(z) = 0$, $Q = \{(0,0,0)\}$

μ' $\quad A' = \{0\}$, $g : A^2 \to A$, $(x,y) \to 0$, $l'(x) = l'(y) = l'(z) = 0$, $Q = \phi$

$A' = \{0\}$, $g : A^2 \to A$, $(x,y) \to 0$, $l'(x) = l'(y) = l'(z) = 0$, $Q = \phi$

$A' = \{0,1\}$ $\quad g : A^2 \to A$, $(x,y) \to 0$, $l'(x) = l'(y) = l'(z) = 0$, $Q = \{(1,1,1)\}$

$\forall x \forall y\ Q(0,0,0)$

LISTA 3.3: P E Q POSSUEM ARIDADE 1, E S ARIDADE 0

a) $S \to \exists x Q(x) \vdash \exists x (S \to Q(x))$

1	$S \to \exists x Q(x)$	PREMISSA
2	S	SUPOSIÇÃO
3	$\exists x Q(x)$	$\to e$ 2, 1
4	$x_0 \quad Q(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5	S	SUPOSIÇÃO
6	$Q(x_0)$	CÓPIA
7	$S \to Q(x_0)$	$\to i$
8	$\exists x (S \to Q(x))$	
9	$\exists x (S \to Q(x))$	$\exists e$
	$S \to \exists x (S \to Q(x))$	
	$S \vee \neg S$	

$\neg \exists x (S \to Q(x))$	SUPOSIÇÃO
$\forall x \neg (S \to Q(x))$	EQUIV. 2
$\neg (S \to Q(x_0))$	$\forall x$ 3
$S \wedge \neg Q(x_0)$	EQUIV. 4

$$\neg (A \to B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$$
$$\equiv A \wedge \neg B$$

$\exists x (S \to Q(x))$

LISTA 3.3 : P E Q POSSUEM ARIDADE 1, E S ARIDADE 0

a) $S \to \exists x Q(x) \vdash \exists x (S \to Q(x))$

1	$S \to \exists x Q(x)$	PREMISSA
2	$\neg \exists x (S \to Q(x))$	SUPOSIÇÃO
3	$\forall x \neg (S \to Q(x))$	EQUIV 2
4	$\neg (S \to Q(x_0))$	$\forall x$ 3
5	$S \land \neg Q(x_0)$	EQUIV. 4
6	S	$\land e_1$ 5
7	$\exists x Q(x)$	$\to$ 6, 1
8	x_1 $Q(x_1)$	SUPOSIÇÃO
9	$\neg (S \to Q(x_1))$	$\forall x e$ 3
10	$S \land \neg Q(x_1)$	EQUIV
11	$\neg Q(x_1)$	$\land e$ 10
12	$\bot$	$\neg e$
13	$\bot$	$\exists x e$ 7, 8-12
14	$\exists x (S \to Q(x))$	PPC 2-13

$A \to B \equiv \neg A \lor B$

$\neg (A \to B) \equiv \neg(\neg A \lor B)$

$\equiv A \land \neg B$

LISTA 3.3 : P E Q POSSUEM ARIDADE 1, E S ARIDADE 0

a) $S \to \exists x Q(x) \vdash \exists x (S \to Q(x))$

1 $S \to \exists x Q(x)$ PREMISSA

2 S SUPOSIÇÃO

3 $\exists x Q(x)$ $\to e$ 2, 1

4 x_0 $Q(x_0)$ SUPOSIÇÃO

5 S SUPOSIÇÃO

6 $Q(x_0)$ CÓPIA

7 $S \to Q(x_0)$ $\to i$

8 $\exists x (S \to Q(x))$

9 $\exists x (S \to Q(x))$ $\exists e$

10 $S \to \exists x (S \to Q(x))$

11 $S \vee \neg S$

12 S SUP

13 $\exists x (S \to Q(x))$

$\exists x (S \to Q(x))$ $\vee e$, 11, 12-13, 12-?

$\neg S$ SUP

S SUP

$\bot$ $\neg$ 12, 13

$Q(x_0)$

$S \to Q(x_0)$ $\to$

$\exists x (S \to Q(x))$

LISTA 3.3 : P E Q POSSUEM ARIDADE 1, E S ARIDADE 0

a) $S \to \exists x Q(x) \vdash \exists x (S \to Q(x))$

1	$S \to \exists x Q(x)$	PREMISSA
2	$S \vee \neg S$	LTE
3	S	SUPOSIÇÃO
4	$\exists x Q(x)$	$\to e$ 3, 1
5	x_0 $Q(x_0)$	SUPOSIÇÃO
6	S	SUPOSIÇÃO
7	$Q(x_0)$	CÓPIA
8	$S \to Q(x_0)$	$\to i$ 6-7
9	$\exists x (S \to Q(x))$	$\exists i$ 8
10	$\exists x (S \to Q(x))$	$\exists e$ 5-9

$\neg S$	SUPOSIÇÃO
S	SUPOSIÇÃO
$\perp$	$\neg e$ 3, 5
$Q(x_0)$	$\perp e$ 6
$S \to Q(x_0)$	$\to i$ 5-7
$\exists x (S \to Q(x))$	$\exists i$ 8

$\exists x (S \to Q(x))$ $\vee e$,

LISTA 3.4c $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))), \neg \exists x (P(x) \wedge R(x)) \vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

1 $\forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$ PREMISSA

2 $\neg \exists x (P(x) \wedge R(x))$ PREMISSA

3 x_0 SUPOSIÇÃO

4 $P(x_0)$ SUPOSIÇÃO

5 $P(x_0) \rightarrow (Q(x_0) \vee R(x_0))$ $\forall$e 1

6 $Q(x_0) \vee R(x_0)$ $\rightarrow$e 4,5

7 $\forall x \neg (P(x) \wedge R(x))$ EQUIV

8 $\neg (P(x_0) \wedge R(x_0))$

9 $Q(x_0)$	SUP.	$R(x_0)$	SUP
10		$P(x_0) \wedge R(x_0)$	$\wedge$i 4,9
11		$\perp$	$\neg$e 8,10
12 $Q(x_0)$	CÓPIA	$Q(x_0)$	$\perp$e

$Q(x_0)$

$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

ALTERNATIVA

$\neg P(x_0) \vee \neg R(x_0)$

$\neg P(x_0)$	$\neg R(x_0)$
$\perp$	$\neg R(x_0) \rightarrow Q(x_0)$
$Q(x_0)$	$Q(x_0)$

$\exists x (P(x) \wedge R(x))$

$\perp$

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$\neg X \rightarrow Y \equiv X \vee Y$

4d $\exists x(P(x) \land Q(x)), \forall x(P(x) \to R(x)) \vdash \exists x(R(x) \land Q(x))$

1		$\exists x(P(x) \land Q(x))$	PREMISSA
2		$\forall x(P(x) \to R(x))$	PREMISSA
3	x_0	$P(x_0) \land Q(x_0)$	SUPOSIÇÃO
4		$P(x_0)$	$\land e_1$ 3,
5		$Q(x_0)$	$\land e_2$ 3
6		$P(x_0) \to R(x_0)$	$\forall x$ 2
7		$R(x_0)$	$\to e$
8		$R(x_0) \land Q(x_0)$	$\land i$ 7,5
9		$\exists x(R(x) \land Q(x))$	$\exists i$ 8
		$\exists x(R(x) \land Q(x))$	$\exists e$ 1,3-

4b $\forall x \forall y \forall z ((S(x,y) \wedge S(y,z)) \to S(x,z)) , \forall x (\neg S(x,x)) \vdash \forall x \forall y (S(x,y) \to \neg S(y,x))$

1	$\forall x \forall y \forall z ((S(x,y) \wedge S(y,z)) \to S(x,z))$	PREMISSA
2	$\forall x (\neg S(x,x))$	PREMISSA
3	x_0	SUPOSIÇÃO
4	y_0	SUPOSIÇÃO
5	$S(x_0,y_0)$	SUPOSIÇÃO
6	$\neg S(x_0,x_0)$	$\forall$ 2
7	$\forall y \forall z ((S(x_0,y) \wedge S(y,z)) \to S(x_0,z))$	$\forall$ 1
8	$\forall z (S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,z)) \to S(x_0,z))$	$\forall$ 7
9	$(S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,x_0)) \to S(x_0,x_0)$	$\forall$ 8
10	$\neg (S(x_0,y_0) \wedge S(y_0,x_0))$	MT.
11	$\neg S(x_0,y_0) \vee \neg S(y_0,x_0)$	EQUIV
12	$S(x_0,y_0) \to \neg S(y_0,x_0)$	
13	$\neg S(y_0,x_0)$	$\to$e 5, 12
14	$S(x_0,y_0) \to \neg S(y_0,x_0)$	$\to$i 5-13
15	$\forall y (S(x_0,y) \to \neg S(y,x_0))$	$\forall$i 4-14
16	$\forall x \forall y (S(x,y) \to \neg S(y,x))$	$\forall$i 3-15

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

$\neg X \to Y \equiv X \vee Y$

4b $\forall x \forall y \forall z ((S(x,y) \land S(y,z)) \to S(x,z)),\ \forall x (\neg S(x,x)) \vdash \forall x \forall y (S(x,y) \to \neg S(y,x))$

1	$\forall x \forall y \forall z ((S(x,y) \land S(y,z)) \to S(x,z))$	PREMISSA		
2	$\forall x (\neg S(x,x))$	PREMISSA		
3	x_0	SUPOSIÇÃO		
4	y_0	SUPOSIÇÃO		
5	$S(x_0,y_0)$	SUPOSIÇÃO		
6	$\neg S(x_0,x_0)$	$\forall$ 2		
7	$\forall y \forall z ((S(x_0,y) \land S(y,z)) \to S(x_0,z))$	$\forall$ 1		
8	$\forall z (S(x_0,y_0) \land S(y_0,z)) \to S(x_0,z))$	$\forall$ 7		
9	$(S(x_0,y_0) \land S(y_0,x_0)) \to S(x_0,x_0)$	$\forall$ 8		
10	$\neg(S(x_0,y_0) \land S(y_0,x_0))$	MT.		
11	$\neg S(x_0,y_0) \lor \neg S(y_0,x_0)$	EQUIV		
12	$\neg S(x_0,y_0)$	SUP	$\neg S(y_0,x_0)$	SUP.
13	$\perp$	$\neg e$ 12, 5		
14	$\neg S(y_0,x_0)$	$\perp e$ 13	$\neg S(y_0,x_0)$	SUP
15	$\neg S(y_0,x_0)$	$\to e$ 5, 12		
16	$S(x_0,y_0) \to \neg S(y_0,x_0)$	$\to i$ 5 - 13		
17	$\forall y (S(x_0,y) \to \neg S(y,x_0))$	$\forall i$ 4 - 14		
18	$\forall x \forall y (S(x,y) \to \neg S(y,x))$	$\forall i$ 3 - 15		

$A \to B \equiv \neg A \lor B$

$\neg X \to Y \equiv X \lor Y$

3c $\forall x \, \neg P(x) \vdash \neg \exists x \, P(x)$

1 $\forall x \, \neg P(x)$

2 $\exists x \, P(x)$ sup

3 x_0 $P(x_0)$ sup.

4 $\neg P(x_0)$ $\forall e$ 1

5 $\perp$ $\neg e$ 4, 3

6 $\perp$

7 $\neg \exists x \, P(x)$