Lógica Proposicional

→ Desenvolver uma linguagem para modelar situações que encontramos em Ciência da Computação para tratarmos dela formalmente.

Ex: Se o trem atrasar e não houver táxi na estação, então João vai se atrasar para a reunião.
João não se atrasou para a reunião.
O trem atrasou.
Logo havia táxi na estação.

Ex: Se estiver chovendo e Joana não tiver um guarda chuva, então Joana vai se molhar.
Joana se molhou.
Está chovendo.
Logo, Joana tem um guarda chuva.

→ Mesma estrutura

O trem atrasou	Está chovendo
Há táxi	Tem guarda chuva
Atrasar p/ reunião	Se molhar

→ Sem trens ou chuva:

Se p e não q, então r. Não r, p. Logo q.

→ Não nos preocupamos com o significado, mas com a estrutura lógica.

Sentenças declarativas

→ Precisamos expressar sentenças que nos permitam expor a estrutura lógica de um argumento.

→ Nos baseamos em Proposições ou sentenças declarativas que em princípio podemos decidir se são verdadeiras ou falsas.

Ex. A soma de 3 e 5 dá 8
Todo natural par é a soma de dois primos
Todos os marcianos gostam de pizza de peperoni.
Camus é um escritor francês

→ exemplo de sentenças não declarativas

Você pode me passar o sal?
Pronto, vá
Que a força esteja com você

→ Gostaríamos de desenvolver um cálculo sobre a razão que nos permita tirar conclusões a partir de suposições dadas.

→ É difícil encontrar um argumento que conclua com uma dada afirmação.

→ Desenvolver uma lógica simbólica

- Traduzimos um conjunto (grande) de sentenças declarativas em símbolos.
- Nos concentramos na mecânica de suas relações.
- Nos permite automatizar as manipulações

→ Consideramos algumas sentenças declarativas como atômicas ou indecomponíveis

O número 5 é par.

→ Atribuímos alguns símbolos p, q, r ou $p_1, p_2, p_3, \ldots$ a cada sentença atômica.

→ Podemos codificar sentenças mais complexas por meio de composição

p : Ganhei na loteria na semana passada
q : Comprei um bilhete de loteria
r : Ganhei o sorteio da semana passada

Regras de composição

$\neg$: A negação de p, denotada por $\neg p$, expressa

Não ganhei na loteria na semana passada

$\vee$: A disjunção de p e r, denotada por $p \vee r$, expressa que pelo menos um dos dois é verdade

Ganhei na loteria na semana passada ou ganhei o sorteio da semana passada

$\wedge$: A conjunção de p e r, denotada por $p \vee r$, expressa que ambos são verdade

Ganhei na loteria na semana passada e ganhei o sorteio da semana passada

$\rightarrow$: A implicação entre p e q, denotada por $p \rightarrow q$ sugere que q é uma consequência lógica de p

Se ganhei na loteria na semana passada,
então comprei um bilhete de loteria

→ USAREMOS ESSAS REGRAS REPETIDAMENTE:

EX: $p \wedge q \to \neg r \vee q$ SIGNIFICA

SE p E q, ENTÃO NÃO r OU q

→ HÁ UMA AMBIGUIDADE! PODERIA SIGNIFICAR

p E SE q, ENTÃO NÃO r OU q.

→ PRECISAMOS DOS PARÊNTESES

$$(p \wedge q) \to ((\neg r) \vee q)$$

CONVENÇÃO: $\neg$ SE APLICA AO MAIS PRÓXIMO; $\vee$ E $\wedge$; $\to$ (PRIORIDADES)

A IMPLICAÇÃO ASSOCIA À DIREITA:

$$p \to q \to r = p \to (q \to r)$$

Dedução Natural

→ Queremos construir Regras de Prova que nos permitam inferir fórmulas a partir de outras fórmulas

→ Inferir conclusões a partir de um conjunto de premissas.

- Suponha que possuímos um conjunto $\phi_1, \dots, \phi_n$ de fórmulas que chamamos de premissas e outra fórmula, ψ, que chamamos de conclusão.
- Aplicamos regras às premissas, obtendo mais fórmulas.
- Aplicamos regra novamente, esperamos obter a conclusão.

Denotamos por $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ (sequente)

é válido se podemos encontrar uma prova para ele

Ex: o sequente dos exemplos iniciais é

$$p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$$

→ Temos que ter cuidado para que nossas regras não provem padrões inválidos como

$$p, q \vdash p \wedge \neg q$$

Regras de Dedução Natural

• Conjunção ($\wedge$)

$\wedge$-Introdução ($\wedge i$) : nos permite concluir $\phi \wedge \psi$, dado que já concluímos ϕ e ψ separadamente.

Escrevemos

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge i$$

Premissas

Nome da regra

Conclusão

$\wedge$-Eliminação ($\wedge e_i$) : nos permite concluir ϕ e ψ, dado que já concluímos $\phi \wedge \psi$ anteriormente.

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge e_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge e_2$$

Ex: Prove que $p \wedge q,\ r \vdash q \wedge r$

Premissas $p \wedge q$

r

← Queremos preencher

Conclusão $q \wedge r$

1.	$p \wedge q$	Premissa
2.	r	Premissa
3.	q	$\wedge e_2$ 1
4.	$q \wedge r$	$\wedge i$ 3,2

Literalmente

$$\frac{\dfrac{p \wedge q}{q}\wedge e_2 \qquad r}{q \wedge r}\wedge i$$

Exercício: Mostre que $(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

ϕ e ψ não precisam ser sentenças atômicas

• NEGAÇÃO DUPLA

EX: NÃO É VERDADE QUE NÃO ESTÁ CHOVENDO = ESTÁ CHOVENDO

→ $\neg\neg\phi = \phi$

REGRAS:

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e \qquad\qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

EX: $p, \neg\neg(q \land r) \vdash \neg\neg p \land r$

1.	p	PREMISSA
2.	$\neg\neg(q \land r)$	PREMISSA
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4.	$q \land r$	$\neg\neg e$ 2
5.	r	$\land e_2$
6.	$\neg\neg p \land r$	$\land i$ 3,5

- Implicação

⤳ Remoção da implicação

Ex: p = Chove
$p \to q$ = Se chover, a rua fica molhada

⤳ Uma das regras mais conhecidas da lógica proposicional

⤳ Dado ϕ e sabendo que ϕ implica em ψ, temos ψ

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$ (Modus Ponens)

Ex: Dados p, $p \to q$, e $p \to (q \to r)$. Provar q.

1.	p	Premissa
2.	$p \to q$	Premissa
3.	$p \to (q \to r)$	Premissa
4.	$q \to r$	$\to e$ 1,3
5.	q	$\to e$ 1,2
6.	r	$\to e$ 5,4

⤳ Variação (Modus Tollens)

⤳ Se chover a rua fica molhada. A rua está seca. Então não chove.

⤳ Se $p \to q$ e p, então q.
Mas se $p \to q$, $\neg q$, e p, então q e $\neg q$ uma contradição

⤳ Se $p \to q$ e $\neg q$, podemos concluir $\neg p$.

$$\frac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} \text{ M.T.}$$

EX: $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

1	$p \to (q \to r)$	PREMISSA
2	p	PREMISSA
3	$\neg r$	PREMISSA
4	$q \to r$	$\to e$ 2,1
5	$\neg q$	M.T. 4,3

→ REMOÇÃO DA IMPLICAÇÃO

- O MODUS TOLLENS NOS DIZ QUE $p \to q, \neg q \vdash \neg q$.
- UMA OUTRA FORMA DE VER ISSO É QUE $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$

→ ISSO NÃO É INTRODUZIR UMA IMPLICAÇÃO.

→ MAS NOS INTRODUZ UM NOVO ELEMENTO

1	$p \to q$	PREMISSA	
2	$\neg q$	SUPOSIÇÃO	SUPOSIÇÃO
3	$\neg p$	MT 1,2	TEMPORÁRIA
4	$\neg q \to \neg p$	$\to i$ 2,3	

→ ABRIMOS UMA CAIXA COM PREMISSAS TEMPORÁRIAS

→ A CONCLUSÃO $\neg q \to \neg p$ NÃO DEPENDE DE $\neg q$.

EX: SE VOCÊ É FRANCÊS ENTÃO É EUROPEU

→ NÃO DEPENDE DE VOCÊ SER FRANCÊS

- A regra de introdução de implicação é formulada como segue

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to i$$

→ Para provar $\phi \to \psi$ assuma temporariamente ϕ.

→ Dentro da caixa podemos usar ϕ e outras fórmulas como premissas ou conclusões já encontradas.

→ Podemos abrir várias caixas separadas ou uma dentro da outra

→ Só podemos usar ϕ se ϕ aparecer antes e se nenhuma caixa que ocorra ϕ tenha fechado.

Ex:

1	$\neg q \to \neg p$	Premissa
2	p	Suposição
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	MT 1,3
5	$p \to \neg\neg q$	$\to i$ 2-4

→ Note que em $\phi \to \psi$, podemos ter $\phi = \psi$

Ex:

1	p	Suposição
2	$p \to p$	$\to i$ 1-1

Ou seja $\vdash p \to p$

DEF: FÓRMULAS LÓGICAS ϕ COM SEQUENTE VÁLIDO $\vdash \phi$ SÃO TEOREMAS

EX:

1	$q \rightarrow r$	SUPOSIÇÃO
2	$\neg q \rightarrow \neg p$	SUPOSICÃO
3	p	SUPOSICÃO
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	MT 2,4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\rightarrow e$ 1,6
8	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3,7
9	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2,8
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow$ 1,9

LOGO, O SEQUENTE $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ É VÁLIDO

→ EM PARTICULAR, PODEMOS TRANSFORMAR QUALQUER PROVA DE QUE $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$ EM

$$\vdash \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow (\dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow \psi))))$$

EX: $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

1	$p \rightarrow q$	PREMISSA
2	$p \wedge r$	SUPOSIÇÃO
3	p	$\wedge e_1$ 2
4	r	$\wedge e_2$ 2
5	q	$\rightarrow e$ 1,3
6	$q \wedge r$	$\wedge i$ 5,4
7		$\rightarrow$ 2-6

• DISJUNÇÃO ($\vee$)

$\vee$ - INTRODUÇÃO

→ SE TEMOS ϕ, ENTÃO $\phi \vee \psi$ É VÁLIDO MESMO QUE ψ SEJA FALSO

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_2$$

$\vee$ - REMOÇÃO

→ PRECISAMOS ENCONTRAR UMA CONSEQUÊNCIA EM COMUM DE ϕ E ψ

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e$$

EX: $p \vee q \vdash q \vee p$

1	$p \vee q$	PREMISSA
2	p	SUPOSIÇÃO
3	$q \vee p$	$\vee i_2$ 2
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$q \vee p$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p$	$\vee e$ 1, 2–3, 4–5

→ LEMBRA O IF DA PROGRAMAÇÃO

EX: ASSOCIATIVIDADE: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

1	$(p \vee q) \vee r$	PREMISSA
2	$(p \vee q)$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_1$ 3
5	q	SUPOSIÇÃO
6	$q \vee r$	$\vee i_1$ 5
7	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_2$ 6
8	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-6
9	r	SUPOSIÇÃO
10	$q \vee r$	$\vee i_2$ 9
11	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i_2$ 10
12	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 1, 2-8, 9-11

EX: DISTRIBUTIVIDADE $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1	$p \wedge (q \vee r)$	PREMISSA
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$q \vee r$	$\wedge e_2$ 1
4	q	SUPOSIÇÃO
5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2, 4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_1$ 5
7	r	SUPOSIÇÃO
8	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2, 7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_2$ 8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

EX: $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1	p	SUPOSIÇÃO
2	q	SUPOSIÇÃO
3	p	CÓPIA 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2-3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1-4

REGRAS DE NEGAÇÃO

DEF: UMA CONTRADIÇÃO É UMA EXPRESSÃO DA FORMA $\phi \wedge \neg\phi$ OU $\neg\phi \wedge \phi$

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot e \qquad\qquad \frac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$$

EX: $\neg p \vee q \vdash p \to q$

1	$\neg p \vee q$	PREMISSA
2	$\neg p$	SUPOSIÇÃO
3	p	SUPOSIÇÃO
4	$\bot$	$\neg e$ 2,3
5	q	$\bot e$ 4
6	$p \to q$	
7	$p \to q$	$\vee e$ 1, 2-6

q	SUPOSIÇÃO
p	SUPOSIÇÃO
q	COPIA 2
$p \to q$	

→ INTRODUÇÃO DE NEGAÇÃO

SE FIZERMOS UMA SUPOSIÇÃO QUE CHEGA A UMA CONTRADIÇÃO,
ENTÃO A SUPOSIÇÃO NÃO PODE SER VERDADE

$$\frac{\boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}}{\neg\phi}\ \neg i$$

Ex: $p \to q,\ p \to \neg q \vdash \neg p$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$p \to \neg q$	PREMISSA
3	p	SUPOSICÃO
4	q	$\to e$ 1, 3
5	$\neg q$	$\to e$ 2, 3
6	$\perp$	$\neg e$ 4, 5
7	$\neg p$	$\neg i$ 3–6

Regras derivadas

Modus Tollens : $\phi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\phi$

1	$\phi \to \psi$	Premissa
2	$\neg\psi$	Premissa
3	ϕ	Suposição
4	ψ	$\to$e 1,3
5	$\bot$	$\neg$e 2,4
6	$\neg\phi$	$\neg$i 3-5

Reductio ad absurdum (Prova por contradição)

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ PPC$$

→ Similar a $\neg$i

TERTIUM NON DATUR (LEI DO TERCEIRO EXCLUÍDO) : $\phi \vee \neg\phi$ É VERDADE

LTE / LEM

$\vdash \phi \vee \neg \phi$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	SUPOSIÇÃO
2	ϕ	SUPOSIÇÃO
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4	$\perp$	$\neg e$ 1,3
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2-4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7	$\perp$	$\neg e$ 1,6
8	$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$	$\neg i$ 1-7
9	$\phi \vee \neg\phi$	$\neg\neg e$ 8

EX: $p \to q \vdash \neg p \vee q$

1	$p \to q$	PREMISSA
2	$\neg p \vee p$	LTE
3	$\neg p$	SUPOSIÇÃO
4	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 3
5	p	SUPOSIÇÃO
6	q	$\to e$ 1, 5
7	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 6
8	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-7

RESUMO

- $\wedge i$: PARA PROVAR $\phi \wedge \psi$ DEVEMOS PROVAR ϕ E ψ SEPARADAMENTE
- $\wedge e_1$: SE TIVERMOS $\phi \wedge \psi$ PODEMOS EXTRAIR ϕ
- $\vee i_1$: PARA PROVAR $\phi \vee \psi$, TENTE PROVAR ϕ.
- $\vee e$: SE TEMOS $\phi \vee \psi$ E QUEREMOS PROVAR χ, DEVEMOS PROVAR χ A PARTIR DE ϕ E A PARTIR DE ψ.
- $\rightarrow i$: PARA PROVAR $\phi \rightarrow \psi$, TENTE PROVAR ψ A PARTIR DE ϕ.
- $\neg i$: PARA PROVAR $\neg \phi$, TENTE PROVAR $\perp$ A PARTIR DE ϕ.

Regras básicas

	Introdução	Eliminação
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\wedge i$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\wedge e_1 \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\wedge e_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee i_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee i_2$	$\dfrac{\phi \vee \psi \quad \begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}{\chi}\vee e$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi \rightarrow \psi}\rightarrow i$	$\dfrac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\rightarrow e$
$\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\phi}\neg i$	$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\neg e$
$\bot$	sem regra	$\dfrac{\bot}{\phi}\bot e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\neg e$

Regras derivadas úteis

$$\dfrac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\text{MT} \qquad \dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg i \qquad \dfrac{\begin{matrix}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\phi}\text{PPC} \qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\text{LTE}$$

Como construir uma prova?

- → Depende do caso
- → Dado um sequente, escreva as premissas no topo da página, e a conclusão embaixo
- → Preencha o espaço do meio

Ex: se a conclusão é do tipo $\phi \to \psi$, então precisamos usar $\to i$

$\vdots$

Premissas

$\vdots$

$\phi \to \psi$

$\rightsquigarrow$

$\vdots$

Premissas

$\vdots$

ϕ	Suposição
$\vdots$	
ψ	

$\phi \to \psi$

Dica: em um determinado ponto várias regras podem ser aplicadas. Liste todas elas e decida qual melhorará mais a situação da sua prova.

FÓRMULAS EQUIVALENTES (PROVABLY EQUIVALENT)

DEF: SEJAM ϕ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL.
DIZEMOS QUE ϕ E ψ SÃO EQUIVALENTES SE $\phi \vdash \psi$ E $\psi \vdash \phi$ SÃO VÁLIDAS.

NOTAÇÃO: $\phi \dashv\vdash \psi$

→ ALTERNATIVAMENTE, TEMOS $\phi \dashv\vdash \psi$ SE $\vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ É VÁLIDO

EX: $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg q \vee \neg p$

$\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg q \wedge \neg p$

$p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$

$p \to q \dashv\vdash \neg p \vee q$

$(p \wedge q) \to p \dashv\vdash r \vee \neg r$

$p \wedge q \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$

Prova por Contradição

→ Às vezes é difícil provar algo diretamente.

→ A regra

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \text{PPC}$$

Nos permite provar ϕ, mostrando que $\neg\phi$ leva a uma contradição

Obs: Há uma linha na lógica chamada de "lógicos intuicionistas" que argumenta que não podemos usar contradição. Eles também não concordam com as seguintes regras

$$\frac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \text{LTE} \qquad \frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$$

Def: Um número real é dito **racional** se pode ser escrito como m/k em que $m, k \in \mathbb{Z}$, e dito irracional caso contrário

Obs: Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é irracional

Teorema: Existem números irracionais a e b t.q. a^b é racional

Prova: Tome $b = \sqrt{2}$. Temos que b^b é racional ou não.

LTE

(i) Se b^b é racional, então tomamos $a = b = \sqrt{2}$, e $a^b = b^b$ é racional.

(ii) Neste caso tomamos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Pelo caso (i), podemos assumir que a é irracional. Logo, a e b são irracionais tais que

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2. \qquad \blacksquare$$

Lógica Proposicional como uma linguagem formal

→ Fórmulas em lógica proposicional devem ser expressões escritas com o alfabeto $\{p, q, r, \ldots\} \cup \{p_1, p_2, \ldots\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$.

→ Mas não é só isso

Ex: $(\neg)()\vee pq$ → é uma expressão no alfabeto, mas não faz sentido

→ Precisamos definir fórmulas bem formadas

DEF: As fórmulas bem formadas da lógica proposicional são as fórmulas que obtemos usando as regras abaixo um número finito de vezes.

Átomo: Todo átomo proposicional $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, p_3$ é uma form. bem. formada

Se ϕ e ψ são fórmulas bem formadas, então

$\neg$: $(\neg\phi)$ também é

$\wedge$: $(\phi \wedge \psi)$ também é

$\vee$: $(\phi \vee \psi)$ também é

$\rightarrow$: $(\phi \rightarrow \psi)$ também é

OBS: se uma fórmula não pode ser construída assim, então ela não é bem formada.

→ Esse modelo indutivo é muito frequente.

→ Backus Naur Form (BNF)

$$\phi ::= p \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi)$$

Em que p significa qualquer prop. atômica, e cada ocorrência de ϕ à direita de $::=$ significa qualquer fórmula bem formada

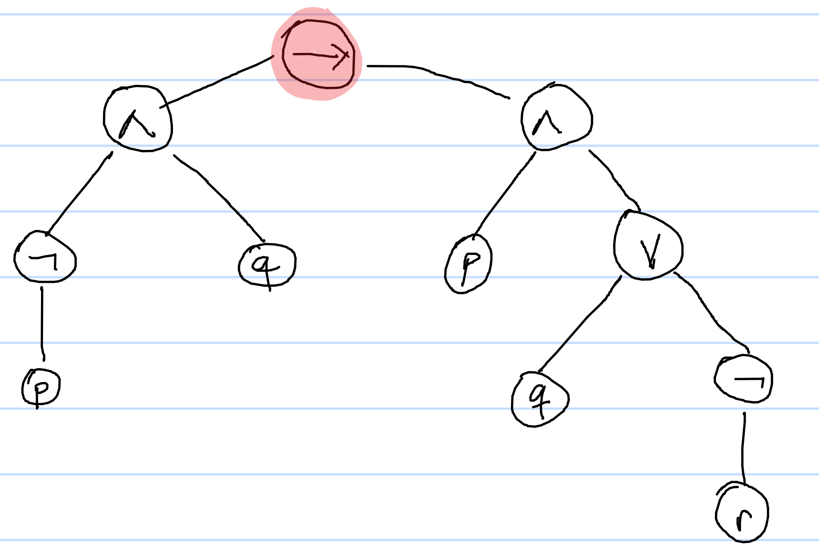
Como decidir se uma fórmula é bem formada?

Princípio da inversão.

→ Podemos inverter o processo de construção: por mais que tenhamos cinco regras de construção, há uma única regra que foi a última a ser usada.

Ex: $(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (p \wedge (q \vee (\neg r))))$ é bem formada sse

$((\neg p) \wedge q)$ e $(p \wedge (q \vee (\neg r)))$ são bem formados.



Árvore de parse

→ Precisamos dos parênteses para remover ambiguidades

→ Os parênteses codificam a árvore

→ Para mostrar que uma fórmula não é bem formada, precisamos tentar desenhar sua árvore de parse

Obs: as folhas são átomos

os nós internos são conectores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

os nós do tipo $\neg$ possuem exatamente um filho

os nós do tipo $\wedge, \vee, \rightarrow$ possuem exatamente dois filho

→ DADA UMA FÓRMULA, UMA SUBFÓRMULA SÃO AS FÓRMULAS CORRESPONDENTES ÀS SUBÁRVORES DA ÁRVORE DE PARSE

EX: $(((\neg p) \land q) \to (p \land (q \lor (\neg r))))$

SUBFÓRMULAS :

p

q

r

$(\neg p)$

$((\neg p) \land q)$

$(\neg r)$

$(q \lor (\neg r))$

$(p \land (q \lor (\neg r)))$

$(((\neg p) \land q) \to (p \land (q \lor (\neg r))))$

Semântica da lógica proposicional

→ Já desenvolvemos um "cálculo" para verificar se dos sequentes $\phi_1, \dots, \phi_n$ podemos concluir ψ, i.e., se $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$

→ Vamos desenvolver outra relação entre as premissas e a conclusão que representamos por $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$.

→ Vamos estudar os valores verdade das fórmulas atômicas nas premissas e na conclusão, e como os conectivos lógicos manipulam eles.

Ex. O valor verdade de $p \wedge q$ é determinado pelo valor verdade de p, de q, e pelo sentido de $\wedge$.

O sentido de $\wedge$ é capturado pela observação de que $p \wedge q$ é verdade se e somente se p e q são verdades, do contrário é falso.

$\wedge$ precisa saber se p e q são verdades e não precisa saber o que p e q dizem sobre a realidade.

DEF:

1. O conjunto de valores verdade contém dois elementos T e F, que representam "verdade" e "falso", resp.

2. Uma avaliação ou modelo de uma fórmula ϕ é uma atribuição de cada átomo proposicional em ϕ a um valor verdade.

Ex: $q \leftarrow T$ e $p \leftarrow F$ é uma avaliação de $p \vee \neg q$

→ O significado de $\wedge$ é uma função de dois argumentos.
Cada argumento é um valor verdade e o resultado é um outro valor verdade

→ Podemos usar a tabela verdade de $\wedge$.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Todas as combinações de valores p/ ϕ e ψ — Resultados

→ Tabelas verdade dos outros conectivos

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Igual a $\neg\phi \vee \psi$

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

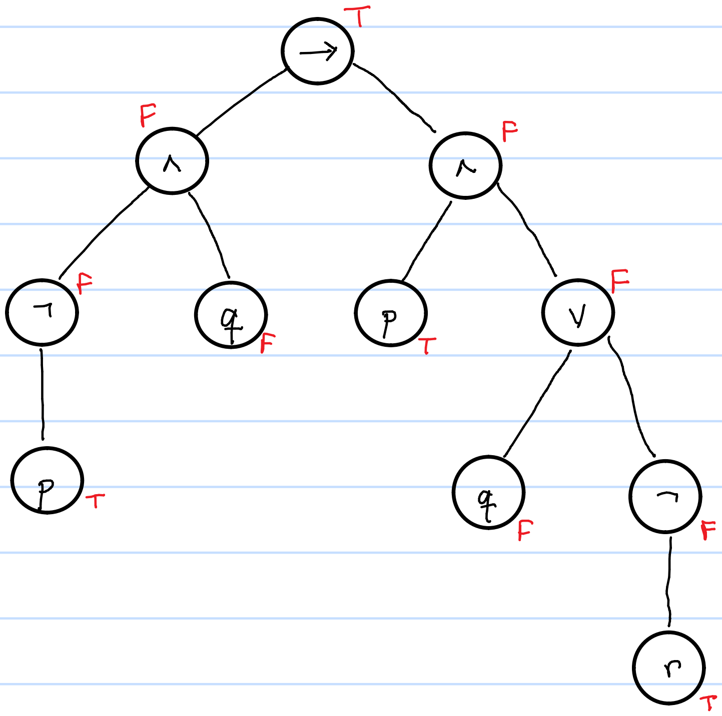
$\top$
T

$\bot$
F

→ Dada fórmula ϕ com átomos proposicionais $p_1, \dots, p_n$, podemos construir uma tabela verdade para ϕ. Teremos 2^n linhas, cada uma com uma das possíveis combinações de T e F para $p_1, \dots, p_n$.

⤳ Quando n é grande, construir esta tabela é impossível computacionalmente.

EX: $\neg p \wedge q \longrightarrow p \wedge (q \vee \neg r)$, $p = T$, $q = F$, $r = T$



EX: TABELA VERDADE p/ $(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Ex: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

COMO PROVAMOS?

→ SUPONHA QUE QUEIRAMOS PROVAR UMA PROPRIEDADE M QUE ACREDITAMOS SER VÁLIDA PARA TODOS OS NATURAIS.

→ ESCREVEMOS $M(5)$ P/ DIZER QUE M VALE P/ 5

→ SUPONHA QUE SAIBAMOS DUAS COISAS

1. CASO BASE: O NÚMERO 1 POSSUI A PROPRIEDADE M, I.E., TEMOS UMA PROVA DE $M(1)$.

2. PASSO INDUTIVO: SE n É UM NÚMERO QUE ASSUMIMOS TER A PROPRIEDADE M, ENTÃO PODEMOS MOSTRAR QUE $n+1$ TEM A PROPRIEDADE M. I.E., TEMOS UMA PROVA DE $M(n) \rightarrow M(n+1)$

DEF: O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA DIZ QUE DADAS ESSAS DUAS INFORMAÇÕES, TODO NÚMERO NATURAL TEM A PROPRIEDADE M.

→ A SUPOSIÇÃO DE $M(n)$ EM 2. SE CHAMA HIPÓTESE DE INDUÇÃO

Teorema: A soma $1+2+\cdots+n$ é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

Prova: Escrevemos LHS_n para $1+2+\cdots+n$ e RHS_n para $\frac{n(n+1)}{2}$. Queremos mostrar que $LHS_n = RHS_n$ para todo $n \geq 1$

Caso base: Se $n=1$, então $LHS_n = 1$, que é igual a $RHS_1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Passo indutivo: Assuma que $LHS_n = RHS_n$ (hipótese de indução).
Queremos mostrar que $LHS_{n+1} = RHS_{n+1}$

Note que
$$\begin{aligned} LHS_{n+1} &= 1+2+\cdots+n+(n+1) \\ &= LHS_n + (n+1) \\ &= RHS_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = RHS_{n+1} \end{aligned}$$

Assim, pelo princ. da Ind. Mat., temos $LHS_n = RHS_n$ para todo n.

OBS: Variações: o caso base pode ser diferente de 1.

Conhecida como indução forte

→ Há uma variação na qual a hipótese de indução é

$$M(1) \wedge M(2) \wedge \cdots \wedge M(n) \qquad (\neq M(n))$$

EX: As fórmulas bem formadas possuem a propriedade que $\#(= \#)$
Para provar, precisamos relacionar fórmulas bem formadas com números naturais.

Def: Dada uma fórmula bem formada ϕ, a altura de ϕ é 1 + o comprimento do maior caminho em sua árvore de análise

TEOREMA: TODA FÓRMULA BEM FORMADA POSSUI O MESMO NÚMERO DE "(" E ")".

PROVA: SEJA $M(n)$ A PROPRIEDADE

"TODAS AS FÓRMULAS DE ALTURA n TEM O MESMO NÚMERO DE "(" E ")"

CASO BASE: $n=1$. ENTÃO ϕ É UM ÁTOMO PROPOSICIONAL E NÃO POSSUI "(" NEM ")".
LOGO $0=0$.

PASSO INDUTIVO: $n>1$. A RAIZ DA ÁRVORE DE ANÁLISE DE ϕ DEVE SER
$\neg$, $\rightarrow$, $\land$, OU $\land$, POIS ϕ É BEM FORMADA.

ASSUMIMOS $\rightarrow$, AS DEMAIS SÃO ANÁLOGAS.
LOGO ϕ É IGUAL A $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$ EM QUE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO FÓRMULAS BEM FORMADAS.
CLARAMENTE AS ALTURAS DE ϕ_1 E ϕ_2 SÃO $< n$.
PELA HIPÓTESE DE INDUÇÃO, ϕ_1 E ϕ_2 POSSUEM OS MESMOS NÚMEROS DE (E), MAS ϕ POSSUI EXATAMENTE UM (E UM) A MAIS. ENTÃO OS NÚMEROS DE (E) EM ϕ SÃO IGUAIS $\blacksquare$

→ NOTE QUE PRECISAMOS USAR A INDUÇÃO FORTE

EX: $(p \rightarrow (q \land r))$, p E $q \land r$ TEM ALTURAS DIFERENTES.

Solidez da Lógica Proposicional

DEF: Se para todas avaliações em que $\phi_1, \dots, \phi_n$ são avaliados em T temos que ψ é avaliado em T, dizemos que vale

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vDash \psi$$

↳ Vinculação semântica

EX: 1. $p \wedge q \vDash p$? Sim, pois $p \wedge q$ vale T quando p e q são T

2. $p \vee q \vDash p$? Não. Se p vale F e q vale T, então $p \vee q$ vale T.

3. $\neg q, p \vee q \vDash p$? Sim, pois ambos $\neg q$ e $p \vee q$ devem valer T.
Logo, q vale F. Como $p \vee q$ vale T, temos que p vale T.

4. $p \vDash q \vee \neg q$ vale não importa p e q.

→ Gostaríamos de mostrar que se $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$, então $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$

Teorema: Sejam $\phi_1, \dots, \phi_n$ e ψ fórmulas lógicas proposicionais.
Se $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ é válido, então $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$.

Prova: Como $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ é válido, existe uma prova de ψ a partir das premissas $\phi_1, \dots, \phi_n$

Prova por indução (forte) no comprimento da prova. (o número de linhas)
Vamos provar o seguinte:

$M(k)$ = "Para todos sequentes $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi$ $(n \geq 0)$ que têm uma prova de comprimento k, temos $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$"

Caso base: Provas de uma linha:

1	ϕ	premissa

Então ϕ_1 e ψ são iguais: $\phi \vdash \phi$.
Claramente se ϕ recebe T então ψ recebe T.

Passo indutivo: A prova tem k linhas

1	ϕ_1	premissa
$\vdots$	$\vdots$	
n	ϕ_n	premissa
$\vdots$		
k	ψ	justificativa

Divisão em casos de acordo com justificativa

1. Suponha que a última regra é $\wedge i$. Então $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$.
Em alguma linha concluímos ψ_1, digamos k_1
e em outra concluímos ψ_2, digamos k_2 $\Big\} < k$
Logo, temos $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1$ e $\phi_1, \dots, \phi_2 \vdash \psi_2$ em $< k$ linhas.
Pela H.I., temos $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi_1$ e $\phi_1, \dots, \phi_2 \vDash \psi_2$,
mas isso implica $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi_1 \wedge \psi_n$

2. SE A REGRA FOI $\vee e$:

ENTÃO PROVAMOS ANTERIORMENTE $\eta_1 \vee \eta_2$ (OU ASSUMIMOS COMO PREMISSA) NA LINHA $k' < k$.

ENTÃO HÁ UMA PROVA CURTA DE $\eta_1 \vee \eta_2$ EM k' LINHAS.

I.E. $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1 \vee \eta_2$.

SIMILARMENTE, PROVAMOS OS SEQUENTES

$$\phi_1, \ldots, \phi_n, \eta_1 \vdash \psi \quad e \quad \phi_1, \ldots, \phi_n, \eta_2 \vdash \psi$$

PELA H.I., TEMOS

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1 \vee \eta_2 \quad , \quad \phi_1, \ldots, \phi_n, \eta_1 \vDash \psi \quad e \quad \phi_1, \ldots, \phi_n, \eta_2 \vDash \psi$$

MAS ISSO IMPLICA QUE $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$

3. TESTAR TODAS AS DEMAIS REGRAS ANALOGAMENTE

→ É ÚTIL PARA MOSTRAR QUE NÃO EXISTE UMA PROVA PARA UM SEQUENTE.

É SUFICIENTE ENCONTRAR ATRIBUIÇÕES NAS QUAIS ϕ_i É T PARA TODO i, MAS QUE ψ RECEBE F.

PELA DEFINIÇÃO DE $\vDash$, NÃO VALE $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$.

LOGO $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ NÃO PODE SER VÁLIDO.

Completude da lógica proposicional

→ Objetivo: Mostrar que as regras de dedução natural são completas

→ Queremos provar que se $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, então existe uma prova por dedução natural de $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

→ Vamos obter que

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi \quad \text{se e somente se} \quad \phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$$

Def: Uma fórmula de lógica proposicional ϕ é uma tautologia se todas as suas avaliações dão T, i.e., se $\models \phi$

→ Daqui p/ frente assumimos que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ vale, e queremos provar que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ é válida

Estratégia

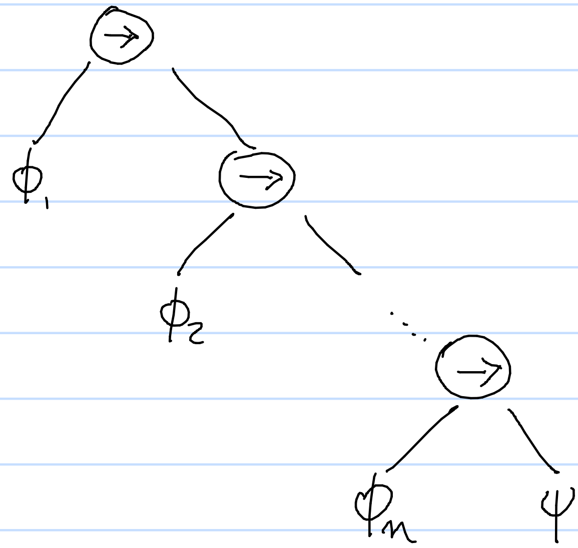
1) Mostrar que $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \ldots (\phi_n \to \psi) \ldots))$
i.e. que $\phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \ldots (\phi_n \to \psi) \ldots))$ é uma tautologia.

2) Mostrar que $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\phi_3 \to \ldots (\phi_n \to \psi) \ldots))$ é válida (é um teorema)

3) Concluir que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

Passo 1: Suponha que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$.

Como $\phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_n \to \psi)))$ é um conjunto de implicações aninhadas, só será avaliada em F se $\phi_1 = \cdots = \phi_n = T$ e $\psi = F$



Mas isso não pode acontecer porque vale $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \models \psi$.
Logo, $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_n \to \psi)))$

Passo 2: Se $\models \eta$, então $\vdash \eta$ (se η é uma tautologia, então η é um teorema)

Suponha que η seja composto de n átomos proposicionais

$p_1, \dots, p_n$

Se vale $\models \eta$ então η é avaliada em T em todas as 2^n linhas da tabela verdade.

Como usamos isso para construir uma prova para $\vdash \eta$

Vamos codificar cada linha da tabela como um sequente.
Obtendo 2^n sequentes.

PROP: SEJA ϕ UMA FÓRMULA COM ÁTOMOS PROPOSICIONAIS $p_1, \dots, p_m$.
FIXE UMA LINHA ℓ DA TABELA VERDADE.
PARA CADA $i \in \{1, \dots, m\}$, SEJA

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{SE } p_i \text{ VALE } T \\ \neg p_i & \text{SE } p_i \text{ VALE } F \end{cases} \quad \text{NA LINHA } \ell$$

TEMOS

1) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m \vdash \phi$ SE ϕ VALE T NA LINHA ℓ
2) $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m \vdash \neg\phi$ SE ϕ VALE F

EX: $(p \vee q) \wedge r$

TABELA VERDADE

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$\neg p, q, \neg r \vdash \neg((p \vee q) \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge r$	SUP.
r	$\wedge e_2$
$\bot$	
$\neg((p \vee q) \wedge r)$	

$p, \neg q, r \vdash (p \vee q) \wedge r$

p	
$p \vee q$	$\vee i$
$(p \vee q) \wedge r$	$\wedge i$

PROVA: INDUÇÃO NA ESTRUTURA DA FÓRMULA ϕ (NA ALTURA DA ÁRVORE DE ANÁLISE)

1) SE ϕ É UM ÁTOMO PROPOSICIONAL p, ENTÃO $p \vdash p$ E $\neg p \vdash \neg p$.

2) SE ϕ É DA FORMA $\neg \phi_1$, ENTÃO ϕ É T SSE ϕ_1 É F
SUPONHA QUE ϕ É AVALIADO EM T. ENTÃO ϕ_1 É AVAL. EM F.
PELA HIP. INDUÇÃO $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m \vdash \neg \phi_1$, MAS $\neg \phi_1 = \phi$.
SE ϕ É AVAL. EM F, ENTÃO ϕ_1 É AVAL. EM T.
PELA HIP. INDUÇÃO. $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m \vdash \phi_1$. ISSO IMPLICA QUE

$$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m \vdash \neg\neg \phi_1, \quad \text{MAS} \quad \neg\neg\phi_1 = \neg\phi.$$

3) ϕ É DA FORMA $\phi_1 \rightarrow \phi_2$. ϕ_1 NOS ÁTOMOS $q_1, \ldots, q_l$ E
ϕ_2 NOS ÁTOMOS $r_1, \ldots, r_k$ EM QUE

$$\{q_1, \ldots, q_l\} \cup \{r_1, \ldots, r_k\} = \{p_1, \ldots, p_m\}$$

SE ϕ É AVALIADO EM F, ENTÃO ϕ_1 E ϕ_2 SÃO AVAL. EM T E F, RESP.
LOGO, $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_l \vdash \phi_1$ E $r_1, \ldots, r_k \vdash \neg \phi_2$. (EXERC.)
ENTÃO $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \phi_1 \wedge \neg \phi_2$. MAS $\phi_1 \wedge \neg \phi_2 \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$.
PORTANTO $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \neg(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$.

SE ϕ É AVAL. EM T. HÁ TRÊS CASOS ϕ_1, ϕ_2 AVAL. EM F,F; T,T; F,T

FF: TEMOS $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_l \vdash \neg \phi_1$ E $\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k \vdash \neg \phi_2$.
LOGO, $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \neg \phi_1 \wedge \neg \phi_2$.
COMO $\neg \phi_1 \wedge \neg \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$, O RES. SEGUE

TT: TEMOS $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_l \vdash \phi_1$ E $\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k \vdash \neg \phi_2$.
LOGO, $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$
COMO $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$, O RES. SEGUE

FT: TEMOS $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_l \vdash \neg \phi_1$ E $\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k \vdash \neg \phi_2$.
LOGO, $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m \vdash \neg \phi_1 \wedge \phi_2$.
COMO $\neg \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$, O RES. SEGUE

4) ϕ É DA FORMA $\phi_1 \wedge \phi_2$

NOVAMENTE QUATRO CASOS ...

5) ϕ É DA FORMA $\phi_1 \vee \phi_2$

NOVAMENTE QUATRO CASOS ...

Voltando: aplicamos a proposição à fórmula $\vDash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots(\phi_n \to \psi)))$

Pela proposição temos 2^n provas da forma

$$\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \phi$$

Vamos juntar essas provas e criar uma prova p/ ψ.

Ex: $p \wedge q \to p$. Pela prop. temos

$$p, q \vdash p \wedge q \to p.$$
$$\neg p, q \vdash p \wedge q \to p.$$
$$p, \neg q \vdash p \wedge q \to p.$$
$$\neg p, \neg q \vdash p \wedge q \to p.$$

Usamos o terceiro excluído: $r \vee \neg r$ para qualquer r

1	$p \vee \neg p$								LEM
2	p			sup	$\neg p$				sup
3	$q \vee \neg q$			LEM	$q \vee \neg q$				LEM
4	q	sup	$\neg q$	sup	q	sup	$\neg q$	sup	
5	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
6									
7	$p \wedge q \to p$		$p \wedge q \to p$		$p \wedge q \to p$		$p \wedge q \to p$		
8	$p \wedge q \to p$			$\vee e$	$p \wedge q \to p$				$\vee e$
9	$p \wedge q \to p$								$\vee e$

<u>Corolário</u>: Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n$ e ψ fórmulas da lógica proposicional. Então $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ vale se e somente se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ é válido

FORMAS NORMAIS

→ ATÉ AGORA VIMOS A EQUIVALÊNCIA ENTRE DEDUÇÃO NATURAL E A SEMÂNTICA DA TABELA VERDADE.

ROBUSTEZ: TUDO QUE PUDERMOS PROVAR SERÁ VERDADE, BASEADO NA TABELA VERDADE.

PODEMOS USAR ISSO PARA MOSTRAR QUE UM DETERMINADO SEQUENTE NÃO PODE SER PROVADO

COMPLETUDE: NÃO IMPORTA O QUE FOR UM FATO, É POSSÍVEL PROVÁ-LO POR DEDUÇÃO NATURAL.

→ AQUI VAMOS ESTUDAR ALTERNATIVAS PARA DECIDIR $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$

→ TRANSFORMAR TAIS FÓRMULAS EM FÓRMULAS EQUIVALENTES

EQUIVALÊNCIA SEMÂNTICA

- DUAS FÓRMULAS SÃO EQUIVALENTES SE POSSUEM O MESMO SIGNIFICADO

EX: $p \to q$ E $\neg p \vee q$ POSSUEM A MESMA TABELA VERDADE

- COINCIDÊNCIA DE TABELAS VERDADE NÃO É SUFICIENTE PARA DEFINIR EQUIVALÊNCIA

EX: $p \wedge q \to p$ E $\neg r \vee r$ POSSUEM TABELAS VERDADES E FÓRMULAS ATÔMICAS DIFERENTES, MAS SÃO SEMPRE VERDADE.

DEF: SEJAM ϕ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL. DIZEMOS QUE ϕ E ψ SÃO SEMANTICAMENTE EQUIVALENTES SE $\phi \vDash \psi$ E $\psi \vDash \phi$. ESCREVEMOS $\phi \equiv \psi$.

SE $\vDash \phi$, ENTÃO DIZEMOS QUE ϕ É VÁLIDA

EX:

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$
$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$
$$p \vee q \to p \equiv \neg r \vee r$$
$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

- TAUTOLOGIAS SÃO PRECISAMENTE AS FÓRMULAS VÁLIDAS.

LEMA: SEJAM $\phi_1, \dots, \phi_n$ E ψ FÓRMULAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL. $\phi_1, \dots, \phi_n \vDash \psi$ É VÁLIDA SSE $\vDash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\cdots (\phi_n \to \psi)))$ É VÁLIDA

- GOSTARÍAMOS DE TRANSFORMAR FÓRMULAS EM FÓRMULAS QUE NÃO CONTÉM $\to$

- HÁ DIVERSAS FORMAS NORMAIS. AQUI ESTAMOS INTERESSADOS APENAS EM DUAS

DEF. UM LITERAL L É UM ÁTOMO p OU A NEGAÇÃO DE UM ÁTOMO $\neg p$. UMA FÓRMULA C ESTÁ NA FORMA NORMAL CONJUNTIVA (CNF) SE É A CONJUNÇÃO DE CLÁUSULAS, EM QUE UMA CLÁUSULA É UMA DISJUNÇÃO DE LITERAIS.

$$L = p \mid \neg p$$
$$D = L \mid L \vee D$$
$$C = D \mid D \wedge C$$

EX: (i) $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ (ii) $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$

POR QUE GOSTAMOS DE CNF?

⇝ FÁCIL DE CHECAR A VALIDADE: $(\models \phi)$

EX: $\models (\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$ SSE

$\models (\neg q \vee p \vee r)$, $\models (\neg p \vee r)$, E $\models q$

COMO TAIS FÓRMULAS SÃO LITERAIS OU DISJUNÇÕES DE LITERAIS USAMOS O SEGUINTE LEMA

LEMA: UMA DISJUNÇÃO DE LITERAIS $L_1 \vee \cdots \vee L_m$ É VÁLIDA SSE EXISTEM $1 \leqslant i, j \leqslant m$ T.Q. $L_i = \neg L_j$.

PROVA: SE $L_i = \neg L_j$, ENTÃO $L_1 \vee \cdots \vee L_m$ É SEMPRE AVALIADA EM T.

POR OUTRO LADO SE NENHUM LITERAL APARECE JUNTAMENTE COM SUA NEGAÇÃO, PARA CADA K, ATRIBUÍMOS F SE L_K É UM ÁTOMO E T SE É A NEGAÇÃO DE UM ÁTOMO. ∎

EX: $\neg q \vee p \vee r$. ATRIBUÍMOS $(q, p, r) = (T, F, F)$

DEF: DADA UMA FÓRMULA EM ϕ LÓGICA PROPOSICIONAL, DIZEMOS QUE ϕ É SATISFATÍVEL/SATISFAZÍVEL SE É POSSÍVEL AVALIAR ϕ EM T.

- BUSCAMOS UMA ATRIBUIÇÃO DE SEUS ÁTOMOS
- SATISFATIBILIDADE É UM CONCEITO MAIS FRACO QUE VALIDADE.
  ↳ QUEREMOS QUE TODA ATRIBUIÇÃO SATISFAÇA.

PROPOSIÇÃO: SEJA ϕ UMA FÓRMULA EM LÓGICA PROPOSICIONAL. ENTÃO ϕ É SATISFAZÍVEL SSE $\neg\phi$ NÃO É VÁLIDA.

PROVA: SE ϕ É SATISFAZÍVEL, ENTÃO EXISTE MODELO DE ϕ QUE AVALIA ϕ EM T, LOGO $\neg\phi$ EM F. PORTANTO $\neg\phi$ NÃO É VÁLIDA.

SE $\neg\phi$ NÃO É VÁLIDA, ENTÃO HÁ MODELO DE $\neg\phi$ QUE AVALIA $\neg\phi$ EM F. ENTÃO HÁ MODELO QUE AVALIA ϕ EM T. ∎

⇝ BASTA CONSTRUIRMOS UM PROCEDIMENTO PARA DECIDIR UMA DESSAS PROPRIEDADES.

⇝ SE QUEREMOS DECIDIR SE ϕ É SATISFAZÍVEL, PERGUNTAMOS SE $\neg\phi$ É VÁLIDA. SE FOR, ϕ NÃO É SATISFAZÍVEL. CASO CONTRÁRIO, ϕ É SATISFAZÍVEL.

OBS: PODEMOS DECIDIR SE $\neg\phi$ É VÁLIDA "RAPIDAMENTE" SE $\neg\phi$ ESTÁ EM CNF.

⇝ HÁ UMA FORMA DE OBTER UMA FÓRMULA EQUIVALENTE A ϕ EM CNF SE JÁ TIVERMOS A TABELA VERDADE DE ϕ.

EX: $(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$

p	q	
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

PARA CADA LINHA QUE ϕ COMPUTA F, CRIAMOS UMA DISJUNÇÃO

$$\neg p \vee q$$

ISSO FUNCIONA PORQUE OBTEMOS UMA FÓRMULA COM A MESMA TABELA VERDADE.

EX:

p	q	r	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

$\neg p \vee \neg q \vee r$

$p \vee \neg q \vee \neg r$
$p \vee \neg q \vee r$
$p \vee q \vee \neg r$

OBTEMOS

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$$

- JÁ VIMOS O MOTIVO DE CNF'S SEREM BOAS PARA DECIDIR VALIDADES
- VAMOS USAR ISSO PARA DECIDIR A VALIDADE DE OUTRAS FÓRMULAS.
- HÁ OUTRA FORMA DE OBTERMOS UMA FÓRMULA EQUIVALENTE EM CNF?
  ↳ DIFERENTEMENTE DA TABELA VERDADE

→ NOTE QUE HÁ MAIS DE UMA CNF EQUIVALENTE

EX: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \equiv (p \vee \neg q)$

↱ O NOME DO ALG

- QUEREMOS UM ALGORITMO CNF COM AS SEGUINTES PROPRIEDADES

1. CNF TERMINA QUANDO RECEBE QUALQUER FÓRMULA DA LÓGICA PROPOSICIONAL
2. PARA CADA ENTRADA, CNF DEVOLVE UMA FÓRMULA EQUIVALENTE
3. TODAS AS SAÍDAS DE CNF ESTÃO EM CNF

- Qual a estratégia CNF deve usar?

⇝ Indução na estrutura de ϕ

⇝ Se ϕ é da forma $\phi_1 \wedge \phi_2$, podemos computar equivalentes η_i de ϕ_i, $i=1,2$, e então $\eta_1 \wedge \eta_2$ é equivalente a ϕ.

⇝ Pre-processamento: traduzimos todas implicações em ϕ substituindo

$$\psi \to \eta \quad \text{por} \quad \neg\psi \vee \eta$$

IMPL_FREE

- Recursivamente
- Note que podem ser introduzidas negações duplas; negações de fórmulas não atômicas (ex: $\neg(p \wedge q)$)

- Podemos usar as regras de De Morgan para obter uma fórmula na qual apenas átomos são negados

↳ Forma Normal Negativa (NNF)

$$\neg(\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n) \equiv \neg\phi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\phi_n$$
$$\neg(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \equiv \neg\phi_1 \vee \cdots \vee \neg\phi_n$$

- E então as regras de distributividade

$$\phi \wedge (\psi \vee \eta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \eta)$$
$$\phi \vee (\psi \wedge \eta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$$

DISTR

→ Mas devemos nos certificar que no final teremos uma cnf

Ex $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv ((p \wedge q) \vee r) \wedge ((p \wedge q) \vee s)$

$\equiv ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \wedge ((p \vee s) \wedge (q \wedge s))$

$\equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \wedge s)$

CNF(ϕ)

1. $\phi_1 \leftarrow$ IMPL_FREE(ϕ)
2. $\phi_2 \leftarrow$ NNF(ϕ_1)
3. SE ϕ_2 É LITERAL,
4. DEVOLVE ϕ_2
5. SE ϕ_2 É $\psi \wedge \eta$
6. DEVOLVE CNF(ψ) $\wedge$ CNF(η)
7. SE ϕ_2 É $\psi \vee \eta$
8. DEVOLVE DISTR(CNF(ψ), CNF(η))

- COMO FUNCIONA DISTR?

DISTR(η_1, η_2) SUPONDO QUE η_1 E η_2 SÃO CNF

1. SE η_1 É $\eta_{11} \wedge \eta_{12}$,
2. DEVOLVE DISTR(η_{11}, η_2) $\wedge$ DISTR(η_{12}, η_2)
3. SE η_2 É $\eta_{21} \wedge \eta_{22}$,
4. DEVOLVE DISTR(η_1, η_{23}) $\wedge$ DISTR(η_1, η_{22})
5. CASO CONTRÁRIO, DEVOLVE $\eta_1 \vee \eta_2$

↳ SÓ ACONTECE QUANDO η_1 E η_2 SÃO LITERAIS.

EX: $CNF(NNF(IMPL\_FREE(\neg p \wedge q \to p \wedge (r \to q))))$

$IMPL\_FREE(\neg p \wedge q \to p \wedge (r \to q))$

$\equiv \neg IMPL\_FREE(\neg p \wedge q) \vee IMPL\_FREE(p \wedge (r \to q))$

$\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee IMPL\_FREE(p \wedge (r \to q))$

$\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge IMPL\_FREE(r \to q))$

$\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q))$

$NNF(\neg(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r \vee q)))$

$\equiv NNF(\neg(\neg p \wedge q)) \vee NNF(p \wedge (\neg r \vee q))$

$\equiv (\neg(\neg p) \vee \neg q) \vee (p \vee (\neg r \vee q))$

$\equiv (p \vee \neg q) \vee (p \vee (\neg r \vee q))$

$CNF((p \vee \neg q) \vee (p \vee (\neg r \vee q)))$

$\equiv DISTR(CNF(p \vee \neg q), CNF(p \vee (\neg r \vee q)))$

$\equiv DISTR(p \vee \neg q,\ p \wedge (\neg r \vee q))$

$\equiv DISTR(p \vee \neg q, p) \wedge DISTR(p \vee \neg q, \neg r \vee q)$

$\equiv (p \vee \neg q \vee p) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee q)$

→ É SATISFAZÍVEL (BASTA ESCOLHER $p = T$), MAS NÃO É VÁLIDA (BASTA TOMAR $p = F$ E $q = T$)

→ TAMBÉM É EQUIVALENTE À $p \vee \neg q$

Cláusulas de Horn

- Apesar de CNF ser fácil de testar validade, é difícil de testar satisfatibilidade

- Fórmulas de Horn serão fáceis de checar satisfatibilidade
  ↳ A. Horn

DEF: Uma fórmula de Horn é uma fórmula ϕ que pode ser gerada como uma instância H na gramática:

$$
\begin{aligned}
P &: \bot \mid \top \mid p \\
A &: P \mid P \wedge A \\
C &: A \to P \\
H &: C \mid C \wedge H
\end{aligned}
$$

Uma instância C é uma cláusula de Horn

OBS: as cláusulas de Horn são sempre do tipo

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_m \to q)$$

NO MÁX UMA NÃO NEGADA.

Como $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$ temos

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_m \to q) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_m \vee q)$$

EX: $(p \wedge q \wedge s \to p) \wedge (q \wedge r \to p) \wedge (p \wedge s \to s)$

$(p \wedge q \wedge s \to \top) \wedge (q \wedge r \to p) \wedge (\top \to s)$

são fórmulas de Horn.

EX: $(p \wedge q \wedge s \to \neg p) \wedge (q \wedge r \to p) \wedge (p \wedge s \to s)$

$(p \wedge q \wedge s \to \bot) \wedge (\neg q \wedge r \to p) \wedge (\top \to s)$

$(p \wedge q \wedge s \to r \wedge t)$

$(p \wedge q \wedge s \to r \wedge t) \wedge (p \wedge q \vee \bot)$

Não são fórmulas de Horn

O ALGORITMO

- PROPAGAÇÃO DA UNIDADE

- VAMOS MARCAR AS FÓRMULAS ATÔMICAS
- UMA FÓRMULA É MARCADA SE ELA NECESSARIAMENTE DEVE ASSUMIR O VALOR $\top$ PARA SATISFAZER ϕ
- SE UMA FÓRMULA ATÔMICA p É MARCADA, ENTÃO TODAS AS OCORRÊNCIAS DE p SÃO MARCADAS

HORN (ϕ)

1. MARQUE $\top$ (SE $\top$ ESTIVER EM ϕ)
2. ENQUANTO HÁ CLÁUSULA $p_1 \land p_2 \land \cdots \land p_m \rightarrow q$ NA QUAL $p_1, \ldots, p_m$ ESTÃO MARCADOS, ENTÃO MARCAMOS q
3. SE $\perp$ ESTIVER MARCADO, RETORNE "ϕ NÃO É SATISFATÍVEL"
4. CASO CONTRÁRIO, RETORNE "ϕ É SATISFATÍVEL"

TEOREMA: SE ϕ É UMA FÓRMULA DE HORN, ENTÃO HORN TERMINA COM A RESPOSTA CORRETA E REALIZA NO MÁXIMO $n+1$ CICLOS, EM QUE n É O NÚMERO DE FÓRMULAS ATÔMICAS DE ϕ.

PROVA: (PARADA) SÓ ENTRAMOS EM UM CICLO SE MARCAMOS UMA NOVA FÓRMULA ATÔMICA NO CICLO ATUAL. COMO HÁ n FÓRMULAS ATÔMICAS, REALIZAMOS NO MÁX $n+1$ CICLOS

(CORRETUDE) AFIRMAMOS QUE TODA FÓRMULA ATÔMICA MARCADA DEVE SER T EM TODA AVALIAÇÃO QUE LEVA ϕ EM T.

INDUÇÃO NO NÚMERO DE CICLOS

CASO BASE: VAMOS MARCAR TODO p_i T.Q. $T \to p_i$, POIS $T \to p_i$ SÓ É SATISFEITA SE p_i VALE T

PASSO INDUTIVO: SUPONHA QUE TODA FÓRMULA ATÔMICA MARCADA ATÉ O CICLO K VALE T EM TODA AVALIAÇÃO DE ϕ QUE LEVA EM T

HORN MARCA UMA NOVA VARIÁVEL q SE HÁ CLÁUSULA $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$ T.Q. TODO p_i ESTÁ MARCADO. PELA HI. $p_1 \wedge \cdots p_2 \to q$ SÓ É SATISFEITA SE q VALE T.

FINALMENTE, SE $\perp$ ESTÁ MARCADA, ENTÃO HÁ UMA CLÁUSULA $p_1 \wedge \cdots \wedge p_m \to \perp$ EM QUE TODO p_i ESTÁ MARCADO. MAS ENTÃO ESTA CLÁUSULA NUNCA É SATISFEITA.

POR OUTRO LADO, SE HORN PARA SEM QUE $\perp$ ESTEJA MARCADO, ENTÃO TODA CLÁUSULA NA QUAL TODAS AS FÓRMULAS ATÔMICAS ESTÃO MARCADAS É SATISFEITA.

ASSIM, PODEMOS ATRIBUIR T A TODAS AS FÓRMULAS ATÔMICAS NÃO MARCADAS. ISTO SATISFAZ ϕ. ∎

SAT solvers

- IDEIA: ESTENDER AS "INFERÊNCIAS" FEITAS POR HORN

- VAMOS MARCAR AS SUBFÓRMULAS COM T OU F

→ TODA SUBFÓRMULA MARCADA TEM QUE VALER O SEU VALOR MARCADO EM TODAS AS AVALIAÇÕES QUE LEVAM ϕ A T.

→ VAMOS CONSTRUIR UMA "ÁRVORE" DE ANÁLISE ESPECIAL

→ UM DAG: DIGRAFO ACÍCLICO

PRIMEIRO, PRECISAMOS REPRESENTAR TODA FÓRMULA COM APENAS DOIS CONECTIVOS: $\neg$ E $\wedge$.

ISSO É, TODA FÓRMULA POSSUI UMA EQUIVALENTE QUE PODE SER GERADA PELA GRAMÁTICA

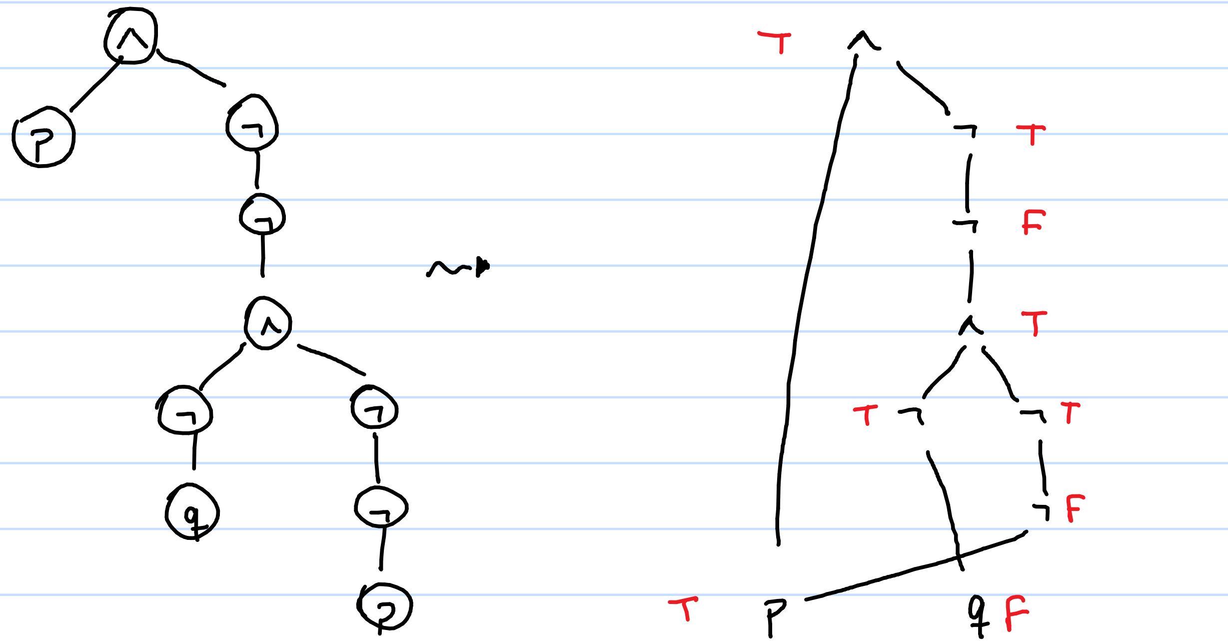
$$\phi ::= p \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi)$$

DE FATO, SEJA T A FUNÇÃO QUE OBTÉM UM EQUIVALENTE DE ϕ APENAS COM OS CONECTORES $\neg, \wedge$.

$$T(p) = p$$
$$T(\phi_1 \wedge \phi_2) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$$
$$T(\phi_1 \to \phi_2) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$
$$T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$$
$$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$$

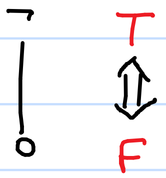
EX: $\phi = p \wedge \neg(q \vee \neg p)$. TEMOS $T(\phi) = p \wedge \neg\neg(\neg q \wedge \neg\neg p)$

Ex: $\phi = p \wedge \neg(q \vee \neg p)$. Temos $T(\phi) = p \wedge \neg\neg(\neg q \wedge \neg\neg p$

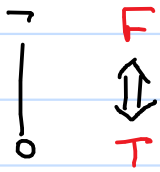


- Então podemos escrever regras de propagação

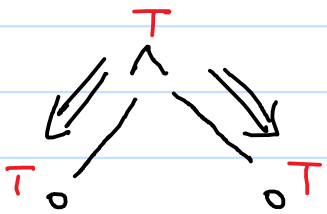
$\neg_t$



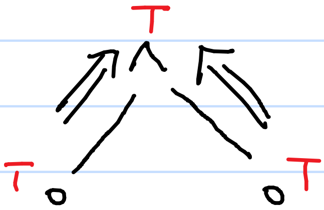
$\neg_f$



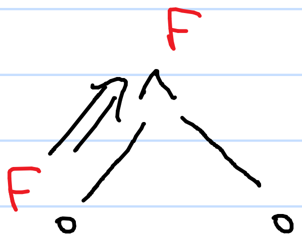
$\wedge_{te}$



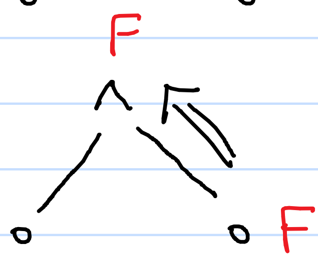
$\wedge_{ti}$



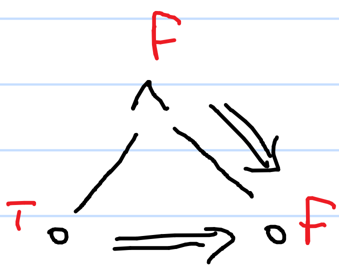
$\wedge_{fl}$



$\wedge_{fr}$



$\wedge_{flr}$



$\wedge_{frr}$

- Este solver é linear, mas falha em qualquer instância do tipo $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$.

Um solver cúbico

- Os solvers até agora encontram

  1. Uma contradição, quando dizem que uma mesma form. atom. deve assumir T e F ao mesmo tempo.

  2. Uma atribuição das form. atômicas que satisfaz a fórmula dada

- Há uma terceira opção: todas as restrições forçadas são consistentes entre si, i.e., não forçam uma contradição, mas isso não força restrição em todas as fórmulas atômicas.

  Ex: $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$

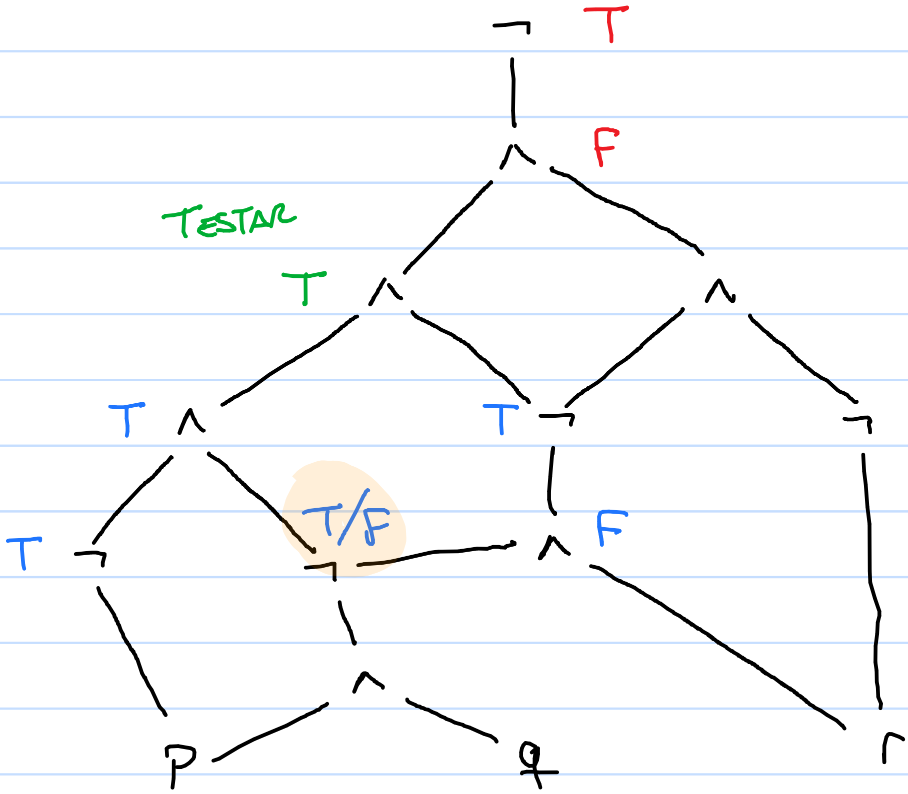
- Ideia: mimicar o comportamento do LEM

- Podemos testar valores temporários para os nós do DAG

- Se para ambos valores de um nó, os testes obtém contradição, então a fórmula não é satisfazível
- Se apenas um dos testes obtém contradição, o nó estudado deve receber permanentemente o valor oposto
- Se algum teste marcou todos os nós sem contradição, encontramos uma avaliação que satisfaz a fórmula
- Do contrário, todos os nós que obtêm o mesmo valor nos dois testes, são marcados com aquele valor de forma permanente.
- Podemos fazer isso com todos os nós não marcados
- Este algoritmo ainda pode terminar sem saber restrições para todos os nós.

  → Ou seja, sem saber se a fórmula é ou não satisfazível.

Ex:



- Em particular nosso solver falha para esse DAG.

Lógica de Predicados (ou Lógica de Primeira Ordem)

- Estudamos lógica proposicional em três direções

1. Teoria da Prova (cálculo de dedução natural)
2. Sintaxe (a natureza "arbórea" das fórmulas)
3. Semântica (o que as fórmulas significam)

- Estudamos sentenças declarativas: afirmações sobre o mundo que podem ser dados em uma tabela verdade.

- Lidamos com componentes como "não", "e", "ou", "se... então".

- Há muito mais componentes, como "existe", "todo", "dentre" e "só".

Ex: Todo estudante é mais jovem do que algum instrutor.

- Podíamos identificar tal afirmação por uma fórmula atômica

- Isso ignora o sentido dessa frase, que lida com "ser um estudante", "ser um professor", e "ser mais jovem que"

- Podemos usar

$S(\text{Andy})$ para indicar que "Andy é um estudante"
$I(\text{Paul})$ para indicar que "Paul é um professor"
$Y(\text{Andy}, \text{Paul})$ para indicar que "Andy é mais jovem que Paul"

- S, I, e Y são chamados de predicados

- Wikipedia: Um predicado em X é uma função booleana

$$P : X \longrightarrow \{\text{Verdadeiro}, \text{Falso}\}$$

- NÃO QUEREMOS LISTAR TODAS AS INSTÂNCIAS DE UM PREDICADO

- PARA ISSO PRECISAMOS DE VARIÁVEIS

  → SÃO "GUARDADORES DE LUGAR" PARA VALORES CONCRETOS (COMO UM ESTUDANTE)

EX: $S(x)$: X É UM ESTUDANTE
$I(x)$: X É UM INSTRUTOR
$Y(x,y)$: X É MAIS NOVO QUE y

- ISSO AINDA NÃO É SUFICIENTE. PRECISAMOS DE QUANTIFICADORES

$\forall$: PARA TODO
$\exists$: EXISTE OU PARA ALGUM

→ SEMPRE VEM ANEXADO A UMA VARIÁVEL

$\forall x$, $\exists z$

EX: $\forall x \left(S(x) \rightarrow \left(\exists y \left(I(y) \wedge Y(x,y)\right)\right)\right)$

PARA TODO x, SE x É UM ESTUDANTE, ENTÃO EXISTE y QUE É UM INSTRUTOR TAL QUE x É MAIS NOVO QUE y.

- PREDICADOS PODEM TER VÁRIAS VARIÁVEIS.
  → S E I SÃO PREDICADOS UNÁRIOS
  → Y É UM PREDICADO BINÁRIO

- O NÚMERO DE VARIÁVEIS DEVE SER FINITO

EX: NEM TODO PASSÁRO PODE VOAR

$B(x)$: X É UM PÁSSARO
$F(x)$: X PODE VOAR

→ $\neg(\forall x(B(x) \to F(x)))$

→ NÃO É VERDADE QUE TUDO QUE É PÁSSARO PODE VOAR

ALTERNATIVAMENTE: $\exists x(B(x) \land \neg F(x))$

→ EXISTE ALGO QUE É UM PÁSSARO E NÃO PODE VOAR

- VAMOS ESTENDER O CÁLCULO DE DEDUÇÃO NATURAL DE LÓGICA PROPOSICIONAL PARA LÓGICA DE PREDICADOS.

- E GENERALIZAR AS AVALIAÇÕES PARA UMA NOÇÃO ADEQUADA DE MODELO.

- NÃO VAMOS PROVAR, MAS DE FATO DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA DE PREDICADOS É ROBUSTA E COMPLETA COM RESPEITO A IMPLICAÇÃO SEMÂNTICA.

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi \quad \text{SSE} \quad \phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$$

EX: NENHUM LIVRO É GASOSO. DICIONÁRIOS SÃO LIVROS. ENTÃO NENHUM DICIONÁRIO É GASOSO.

$B(x)$: x É UM LIVRO , $G(x)$: x É GASOSO, $D(x)$: x É UM DICIONÁRIO

→ QUEREMOS DESENVOLVER UMA TEORIA DE PROVA E SEMÂNTICA QUE NOS PERMITA CONCLUIR:

$$\neg\exists x\,(B(x)\wedge G(x)),\ \forall x\,(D(x)\to B(x)) \vdash \neg\exists x\,(D(x)\wedge G(x))$$

$$\neg\exists x\,(B(x)\wedge G(x)),\ \forall x\,(D(x)\to B(x)) \models \neg\exists x\,(D(x)\wedge G(x))$$

→ TAMBÉM ESTENDEMOS LÓGICA PROPOSICIONAL PERMITINDO FUNÇÕES

EX: TODO FILHO É MAIS JOVEM QUE SUA MÃE

$$\forall x\forall y\,(C(x)\wedge M(y,x)\to Y(x,y))$$

$C(x)$: x É FILHO , $M(x,y)$: x É A MÃE DE y , $Y(x,y)$: x É MAIS JOVEM QUE y

OU: ANDY E PAUL TÊM A MESMA AVÓ MATERNA (ANDY$=a$, PAUL$=p$)

$$\forall x\forall y\forall u\forall v\,(M(x,y)\wedge M(y,a)\wedge M(u,v)\wedge M(v,p)\to x=u)$$

→ AQUI JÁ USAMOS UM PREDICADO ESPECIAL PARA IGUALDADE. PODÍAMOS ESCREVER $=(x,y)$: x É IGUAL A y.

→ OS SÍMBOLOS DE FUNÇÕES NA LÓGICA DE PREDICADOS NOS DÁ UMA FORMA DE EVITAR A GROSSERIA ACIMA.

→ NO LUGAR DE USAR $M(x,y)$, VAMOS USAR $m(y)$ PARA INDICAR A MÃE DE y

→ USANDO m, PODEMOS REESCREVER

$$\forall x \left(C(x) \to Y(x, m(x)) \right)$$

$$m(m(a)) = m(m(b))$$

→ FUNÇÕES PODEM RECEBER MAIS DE UM ARGUMENTO.

EX: $g(x,y)$: A NOTA DO ESTUDANTE x NO CURSO y.

→ FUNÇÕES QUE RECEBEM ZERO ARGUMENTO SÃO CHAMADAS DE CONSTANTES

LÓGICA DE PREDICADOS COMO UMA LINGUAGEM FORMAL

→ DAR REGRAS SINTÁTICAS PARA A FORMAÇÃO DE FÓRMULAS DE LÓGICA DE PREDICADO

→ HÁ DOIS TIPOS DE COISAS ENVOLVIDAS

1. OBJETOS SOBRE OS QUAIS ESTAMOS FALANDO
   INDIVÍDUOS (ANDY, PAUL), VARIÁVEIS (x E v), $m(a)$, $g(x,y)$

   EXPRESSÕES EM L.P. (LÓGICA DE PREDICADOS) QUE DENOTAM OBJETOS SÃO CHAMADOS DE TERMOS

2. COISAS QUE DENOTAM VALORES-VERDADE.
   EXPRESSÕES DESTE TIPO SÃO FÓRMULAS:
   $Y(x, m(x))$ É UMA FÓRMULA

→ UM VOCABULÁRIO DE PREDICADOS CONSISTE EM TRÊS COISAS

- $\mathcal{P}$: CONJUNTO DE SÍMBOLOS DE PREDICADO.
- $\mathcal{F}$: CONJUNTO DE SÍMBOLOS DE FUNÇÕES.
- $\mathcal{C}$: CONJUNTO DE SÍMBOLOS DE CONSTANTES.

→ CADA SÍMBOLO DE PREDICADO OU FUNÇÃO VEM COM UMA ARIDADE, I.E., O NÚMERO DE ARGUMENTOS QUE ELE ESPERA.

→ CONSTANTES PODEM SER VISTAS COMO FUNÇÕES 0-ÁRIAS

TERMOS

→ VARIÁVEIS, CONSTANTES, E FUNÇÕES APLICADAS A ELAS

→ FUNÇÕES PODEM SER ANINHADAS: $m(m(a))$

DEF: TERMOS SÃO DEFINIDOS COMO SEGUE

- TODA VARIÁVEL É UM TERMO
- SE $c \in \mathcal{F}$ É UMA FUNÇÃO 0-ÁRIA, ENTÃO c É UM TERMO
- SE $t_1, \ldots, t_n$ SÃO TERMOS, E $f \in \mathcal{F}$ É UMA FUNÇÃO n-ÁRIA, ENTÃO $f(t_1, \ldots, t_n)$ É UM TERMO
- NADA MAIS É TERMO

→ $t ::= x \mid c \mid f(t, \ldots, t)$

EX: SE n, f, g SÃO FUNÇÕES, RESP., 0-, 1-, 2-ÁRIAS. ENTÃO

→ $g(f(n), n)$, $f(g(n, f(n)))$ SÃO TERMOS

→ $g(n)$, $f(f(n), n)$ NÃO SÃO TERMOS

Fórmulas

→ As escolhas de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ dependem do que queremos descrever

<u>DEF</u>: O conjunto de fórmulas sobre $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é definido indutivamente sobre os termos sobre $\mathcal{F}$ como segue

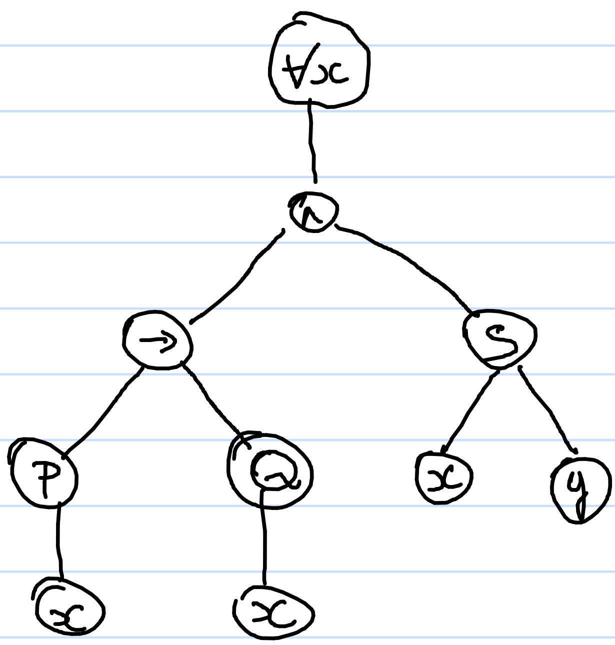
- Se $P \in \mathcal{P}$ é um predicado n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos então $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula
- Se ϕ é fórmula, então $(\neg \phi)$ é fórmula
- Se ϕ e ψ são fórmulas, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, e $(\phi \to \psi)$ são fórmulas.
- Se ϕ é uma fórmula e x é uma variável, então

  $(\forall x \phi)$ e $(\exists x \phi)$ são fórmulas
- Nada mais é fórmula.

→ $\phi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid (\neg \phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \to \phi) \mid (\forall x \phi) \mid (\exists x \phi)$

→ Árvores de análise

Ex: $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y))$



EX: TODO FILHO DO MEU PAI É MEU IRMÃO

→ A ESCOLHA É ENTRE "PAI" SER PREDICADO OU FUNÇÃO.

1. COMO PREDICADO. ESCOLHA CONSTANTE m PARA "EU"
$\{S, F, B\}$ PREDICADOS COM SIGNIFICADOS

$S(x,y)$: x É UM FILHO DE y
$F(x,y)$: x É PAI DE y
$B(x,y)$: x É IRMÃO DE y

$$\Rightarrow \forall x \forall y \left(F(x,m) \wedge S(y,x) \rightarrow B(y,m) \right)$$

2. COMO FUNÇÃO. m, S, E B COMO ACIMA, E f A FUNÇÃO QUE DADO UM ARGUMENTO, DEVOLVE SEU PAI

$$\Rightarrow \forall x \left(S(x, f(m)) \rightarrow B(y,m) \right)$$

→ CONHECIMENTO DO DOMÍNIO: O QUE ACONTECE SE $X = m$.
SE O DOMÍNIO DE x NÃO FOR CONHECIMENTO COMUM, PODEMOS NÃO PERCEBER QUE UMA PESSOA NÃO PODE SER IRMÃ DE SI PRÓPRIA

VARIÁVEIS LIVRES E LIMITADAS

→ COMO VIMOS, É IMPORTANTE DEFINIRMOS O DOMÍNIO DE UMA VARIÁVEL PARA EVITAR CONFUSÕES.

→ SE DERMOS UM SIGNIFICADO CONCRETO PARA TODOS OS PREDICADOS E FÓRMULAS ENVOLVIDOS, TEMOS UM MODELO, E PODEMOS CHECAR SE UMA DADA FÓRMULA É VERDADE PARA ESTE MODELO PARTICULAR.

→ POR OUTRO LADO TAMBÉM GOSTARÍAMOS DE GARANTIR QUE ALGUMAS FÓRMULAS SÃO VÁLIDOS PARA TODOS OS MODELOS

EX: $P(c) \land \forall y (P(y) \to Q(y)) \to Q(c)$, PARA UMA CONST. C.

→ É MAIS COMPLICADO SE QUISERMOS DEFINIR FORMALMENTE O SIGNIFICADO DE UMA FÓRMULA SER VÁLIDO SER VERDADE PARA UM MODELO DADO.

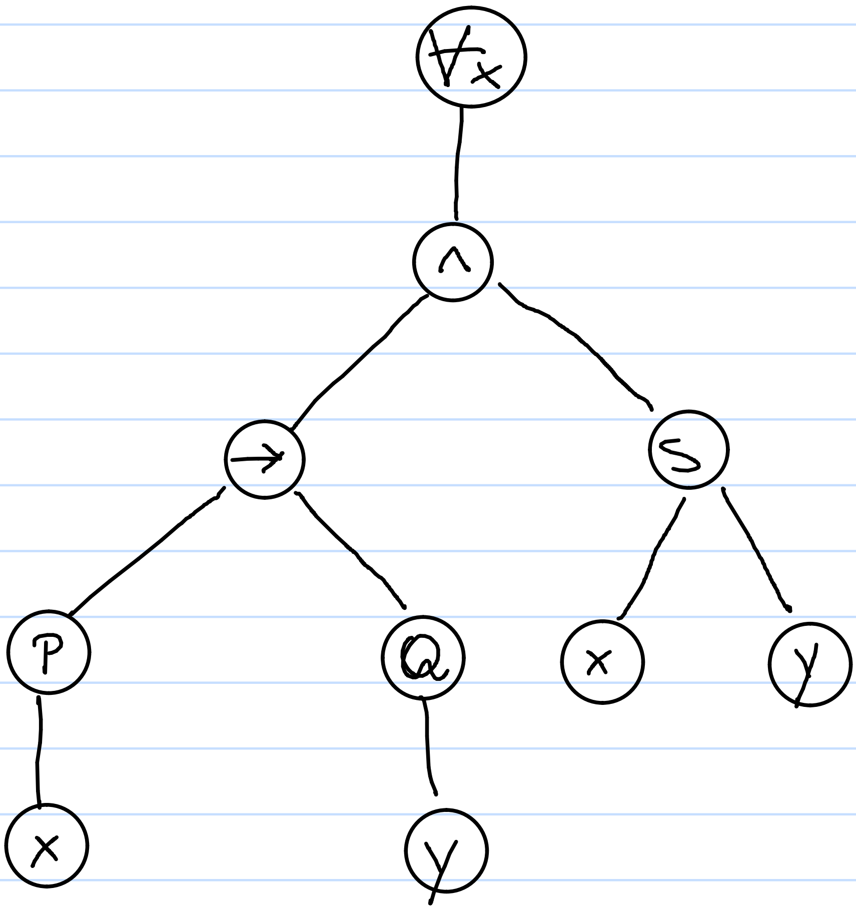
→ QUEREMOS UMA DEFINIÇÃO QUE POSSAMOS USAR PARA ESCREVER UM PROGRAMA DE COMPUTADOR QUE VERIFIQUE QUE UMA FÓRMULA VALE EM UM DADO MODELO.

→ VARIÁVEIS APARECEM EM DIVERSAS FORMAS

→ ÁRVORE DE ANÁLISE:

- NÓS ADICIONAIS $\forall x$ E $\exists y$ POSSUEM APENAS UMA SUBÁRVORE.
- PREDICADOS $P(t_1, \ldots, t_n)$, NÓ P COM n SUBÁRVORES, AS ÁRVORES DE ANÁLISE DOS TERMOS $t_1, \ldots, t_n$

EX: $\forall x \, ((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y))$



→ VARIÁVEIS TAMBÉM APARECEM COMO FOLHAS:

1. AO SUBIRMOS A ÁRVORE PARTINDO DO NÓ x, CHEGAMOS NO NÓ $\forall x$. ISSO SIGNIFICA QUE ESSAS OCORRÊNCIAS SÃO LIMITADAS POR $\forall x$, ENTÃO ELAS REPRESENTAM QUALQUER VALOR POSSÍVEL DE x.

2. AO SUBIRMOS A ÁRVORE PARTINDO DE y, NÃO ESBARRAMOS EM NADA COM RESPEITO A y, ENTÃO y É LIVRE.

DEF: SEJA ϕ UMA FÓRMULA. UMA OCORRÊNCIA DE x É LIVRE EM ϕ SE É UM NÓ FOLHA PARA O QUAL NÃO EXISTE CAMINHO ACIMA DESTE NÓ ATÉ UM NÓ $\forall x$ OU $\exists x$. DO CONTRÁRIO x É LIMITADA. PARA $\forall x \phi$ OU $\exists x \phi$, DIZEMOS QUE ϕ É O ESCOPO DE x.

→ SE x OCORRE EM ϕ ENTÃO x É LIMITADA SSE x OCORRE NO ESCOPO DE UM $\forall x$ OU $\exists x$.

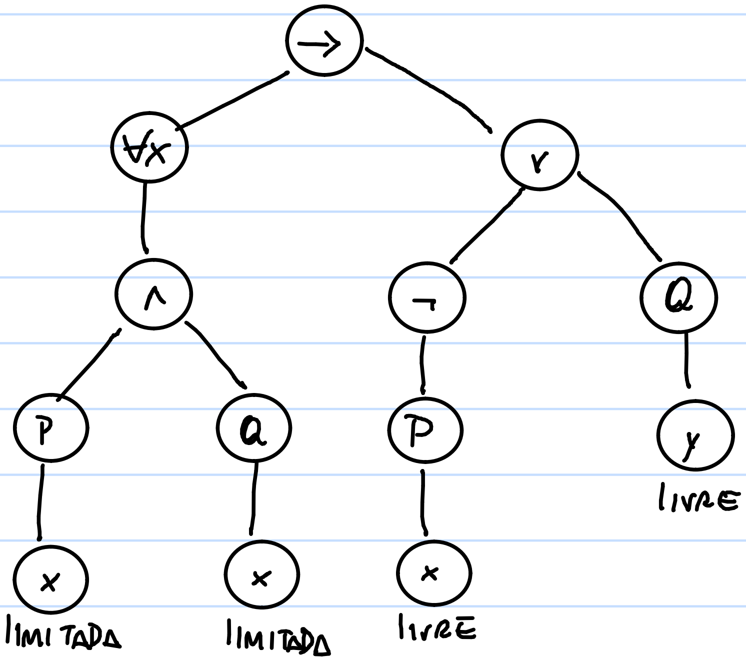
OBS: É POSSÍVEL REINTRODUZIR A VARIÁVEL X.
NESTE CASO O ESCOPO DE X IGNORA A SUBÁRVORE DE REINTRODUÇÃO.

EX: $\forall x \left(P(x) \rightarrow \exists x \, Q(x) \right)$

O ESCOPO DE $\forall x$ É $P(x)$

OBS: UMA VARIÁVEL PODE SER LIMITADA E LIVRE EM UMA FÓRMULA:

$$\left(\forall x \left(P(x) \land Q(x) \right) \right) \longrightarrow \left(\neg P(x) \lor Q(y) \right)$$



→ MAS CADA OCORRÊNCIA DE X OU É LIMITADA OU LIVRE, NUNCA AMBOS.

Substituições

→ Variáveis guardam lugar.
Devemos poder substituí-las por informações mais concret.

→ Sintaticamente só podemos substituir variáveis por termos

→ Só podemos substituir x por termos.

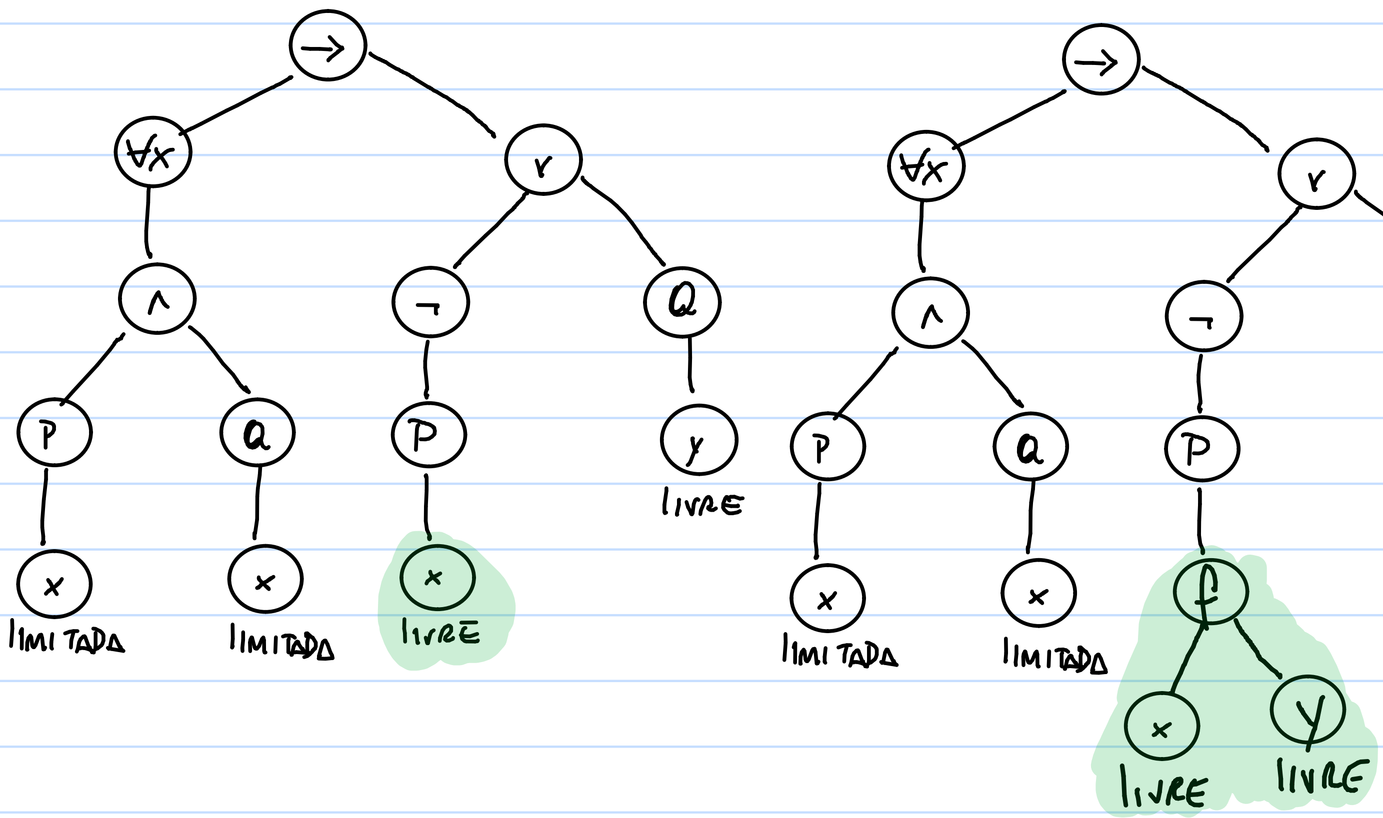
DEF: Dados uma variável x, um termo t, e uma fórmula ϕ, definimos $\phi[t/x]$ como a fórmula obtida de ϕ ao substituirmos toda ocorrência livre de x por t.

Ex: Se $\phi = \forall x\big((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,y)\big)$

então $\phi[t/x]$ é ϕ pois nenhuma ocorrência de x é livre em ϕ. Logo, nenhuma ocorrência é substituída.

Mas $\phi[t/y]$ é $\forall x\big((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x,t)\big)$

Ex: ϕ $\qquad\qquad$ $\phi[f(x,y)/x]$



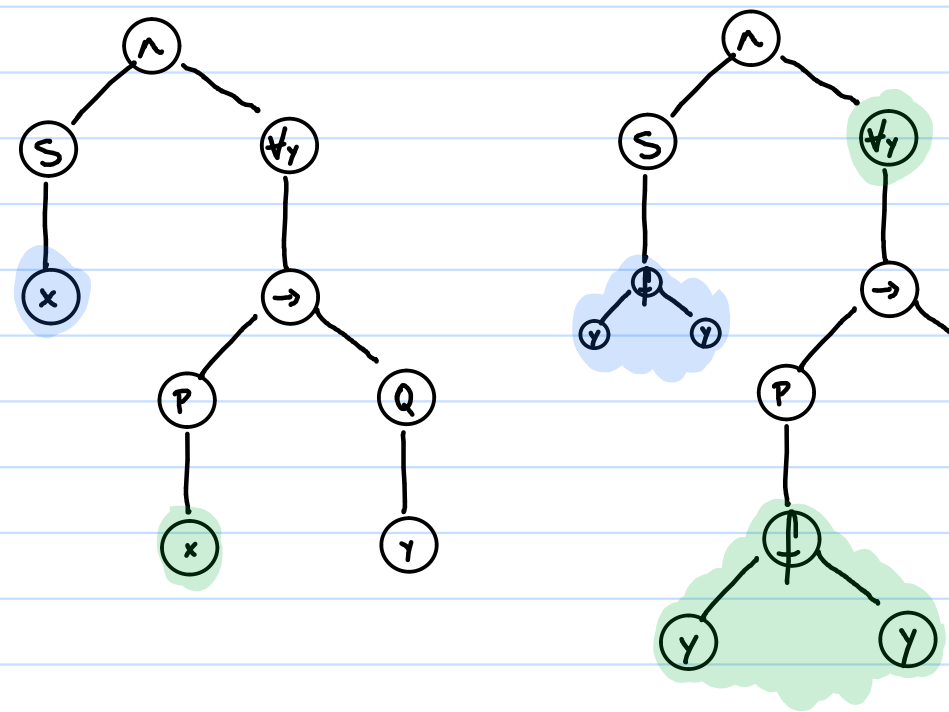
EFEITOS COLATERAIS: AO FAZER $\phi[t/x]$,
O TERMO t PODE CONTER A VARIÁVEL y, MESMO QUE x ESTEJA NO ESCOPO DE $\exists y$ OU $\forall y$.

→ DEVEMOS EVITAR ISSO

DEF: DADOS UM TERMO t, UMA VARIÁVEL x, E UMA FÓRMULA ϕ, DIZEMOS QUE t É LIVRE PARA x EM ϕ SE NENHUMA FOLHA LIVRE x OCORRE NO ESCOPO DE $\exists y$ OU $\forall y$ PARA TODA VARIÁVEL y DE t.

→ ISSO QUER DIZER QUE AS VARIÁVEIS DE t NÃO VÃO VIRAR LIMITADAS AO FAZERMOS A SUBSTITUIÇÃO

EX:



→ $f(y,y)$ NÃO É LIVRE PARA x EM ϕ.

→ EM UM PROVADOR DE TEOREMAS O IDEAL É TROCAR A VARIÁVEL QUE SERÁ CAPTURADA POR UMA VARIÁVEL NOVA.

TEORIA DA PROVA PARA LÓGICA DE PREDICADOS

- NOVAS REGRAS DE PROVA PARA LIDAR COM QUANTIFICADORES E COM IGUALDADE.

- TODAS AS REGRAS DE PROVA DA LÓGICA PROPOSICIONAL CONTINUAM VÁLIDAS.

REGRAS DA IGUALDADE

- TODO TERMO t É IGUAL A SI MESMO

REFLEXIVIDADE

$$\frac{}{t = t} =i$$

TEM QUE SER TERMO. NÃO PODE SER FÓRMULA

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]} =E$$

OBS: t_1 E t_2 TÊM QUE SER LIVRES PARA x EM ϕ.

EX:

1	$(x+1) = (1+x)$	PREMISSA
2	$(x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0)$	PREMISSA
3	$(1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0)$	$=E$ 1,2

NESTA PROVA USAMOS t_1 COMO $(x+1)$ E t_2 COMO $(1+x)$ E ϕ COMO $(x > 1) \rightarrow (x > 0)$

EX: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$ SIMETRIA

1.	$t_1 = t_2$	PREMISSA
2.	$t_1 = t_1$	$=i$
3.	$t_2 = t_1$	$=E$ 1,2

USAMOS ϕ COMO $x = t_1$ NA LINHA 2.

EX: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$ TRANSITIVIDADE

1.	$t_1 = t_2$	PREMISSA
2.	$t_2 = t_3$	PREMISSA
3.	$t_1 = t_3$	$=E$ 2,1

USANDO ϕ COMO $t_1 = X$. NA LINHA 1 TEMOS $\phi[t_2/x]$ E NA LINHA 3 TEMOS $\phi[t_3/x]$

REGRAS DA QUANTIFICAÇÃO UNIVERSAL

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]} \forall x\, E$$

→ DIZ QUE SE $\forall x \phi$ É VERDADE, ENTÃO PODEMOS SUBSTITUIR x POR QUALQUER TERMO t

↳ t DEVE SER LIVRE PARA x EM ϕ

E CONCLUIR QUE $\phi[t/x]$ TAMBÉM É VERDADE.

→ DEVEMOS PENSAR EM t COMO UMA INSTÂNCIA MAIS CONCRETA DE x.

EX: PORQUE t DEVE SER LIVRE PARA x EM ϕ?

SE ϕ É $\exists y (x < y)$ E t É y.

A FÓRMULA $\forall x \phi$ DIZ

"PARA TODO x EXISTE y MAIOR QUE x"

ENTRETANTO, $\phi[y/x]$ É A FÓRMULA $\exists y (y < y)$ QUE DIZ QUE

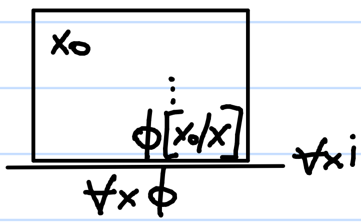
"EXISTE UM NÚMERO MAIOR QUE SI MESMO"

MAS PODEMOS SUBSTITUIR y POR z EM t E OBTER $\phi[z/x]$ QUE É $\exists y (z < y)$ QUE DIZ

"EXISTE y MAIOR QUE z"

→ A INTRODUÇÃO É MAIS DELICADA

→ PRECISA DE UMA VARIÁVEL FICTÍCIA (DUMMY VARIABLE) x_0



→ DIZ QUE SE COMEÇARMOS COM UMA VARIÁVEL "FRESCA" x_0 E CONSEGUIRMOS PROVAR $\phi[x_0/x]$, ENTÃO VALE $\forall x \phi$.

→ É IMPORTANTE QUE x_0 NÃO TENHA SIDO USADA FORA DA CAIXA. x_0 É UM TERMO ARBITRÁRIO, SEM SUPOSIÇÃO. QUALQUER COISA FUNCIONARIA EM SEU LUGAR.

→ PARECE QUE VAI DE UM CASO PARTICULAR PARA O GERAL

Ex: $\forall x (P(x) \to Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$

1.		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	Premissa
2.		$\forall x P(x)$	Premissa
3.	x_0	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x$ e 1.
4.		$P(x_0)$	$\forall x$ e 2
5.		$Q(x_0)$	$\to$e 3,4
6.		$\forall x Q(x)$	$\forall x$ i 3-5

Ex. $P(t), \forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1.	$P(t)$	Premissa
2.	$\forall x (P(x) \to \neg Q(x))$	Premissa
3.	$P(t) \to \neg Q(t)$	$\forall x$ e 2
4.	$\neg Q(t)$	$\to$e 3, 1

- $\forall x$ é um esquema de regras, uma para cada termo t (livre para x em ϕ), e devemos escolher apropriadamente
- Note que também existem as regras $\forall y$e, $\forall y$i, ...
- Vamos usar $\forall$e e $\forall$i sem especificar a variável.
- Note que apesar dos brackets [ ] aparecerem na regra, não aparece na aplicação

→ PODEMOS PENSAR NAS REGRAS DE $\forall$ COMO AS REGRAS DE $\wedge$.

→ SÃO DE UMA CERTA FORMA GENERALIZAÇÕES.

→ ENQUANTO $\wedge$ TEM DOIS ITENS, $\forall$ TEM VÁRIOS.

- ENQUANTO $\wedge i$ TEM DUAS PREMISSAS, $\forall x i$ TEM UMA PREMISSA $\phi[x_0/x]$ PARA CADA "VALOR" POSSÍVEL PARA x_0

  - PARA PROVAR $\forall x \phi$, VOCÊ TEM QUE PROVAR $\phi[x_0/x]$ PARA TODO VALOR DE x_0

  $\times$

  - PARA PROVAR $\phi_1 \wedge \phi_2$, VOCÊ TEM QUE PROVAR ϕ_i PARA $i=1,2$.

- ENQUANTO $\wedge e$ PERMITE DEDUZIR DE $\phi \wedge \psi$ O ϕ OU ψ QUE VOCÊ QUISER, $\forall x e$ PERMITE QUE VOCÊ DEDUZA DE $\forall x \phi$ O $\phi[x_0/x]$ QUE VOCÊ QUISER

REGRAS DA QUANTIFICAÇÃO EXISTENCIAL

→ ASSIM COMO $\forall$ ESTENDE $\wedge$, $\exists$ ESTENDE $\vee$

$$\frac{\phi_k}{\phi_1 \vee \phi_2} \vee i_k \qquad \qquad \frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi} \exists x i$$

→ PODEMOS DEDUZIR $\exists x \phi$ SEMPRE QUE TEMOS $\phi[t/x]$ PARA ALGUM t (LIVRE PARA x EM t).

→ $\phi[t/x]$ DÁ MAIS INFORMAÇÃO QUE $\exists x \phi$
↳ TEM UMA TESTEMUNHA

→ EXCLUSÃO:

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi} \vee e \qquad \qquad \frac{\exists x \phi \quad \boxed{\begin{array}{cc} x_0 & \phi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi\end{array}}}{\chi} \exists x e$$

→ ASSIM COMO $\vee e$, $\exists x e$ ENVOLVE UMA ANÁLISE DE CASO.

→ SABEMOS QUE ϕ VALE PARA PELO MENOS UM VALOR DE x. ENTÃO PRECISAMOS FAZER ANÁLISE DE CASO SOBRE TODOS OS VALORES DE x.

→ x_0 NÃO PODE OCORRER FORA DA CAIXA E NEM EM χ.

→ DA MESMA FORMA QUE SE VOCÊ QUISER USAR $\phi_1 \vee \phi_2$ VOCÊ TEM QUE ESTAR PREPARADO PARA USAR TANTO ϕ_1 QUANTO ϕ_2, SE QUISER USAR $\exists x \phi$, VOCÊ DEVE ESTAR PREPARADO PARA USAR $\phi[x_0/x]$ PARA CADA x_0.

EX: $\forall x \phi \vdash \exists x \phi$

1	$\forall x \phi$	PREMISSA
2	$\phi[x/x]$	$\forall x \, e$ 1
3	$\exists x \phi$	$\exists x \, i$ 2

EX. $\forall x (P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1.		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	PREMISSA
2.		$\exists x P(x)$	PREMISSA
3.	x_0	$P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
4.		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall x \, e$ 1
5.		$Q(x_0)$	$\to e$ 4,3
6.		$\exists x Q(x)$	$\exists x \, i$ 5
7.		$\exists x Q(x)$	$\exists x \, e$ 2, 3-6

→ ESSAS REGRAS PODEM SER ANINHADAS, MAS USANDO VARIÁVEIS DIFERENTES.

EX: $\exists x P(x), \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$

1.		$\exists x P(x)$	PREMISSA
2.		$\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$	PREMISSA
3.	y_0		SUPOSICÃO
4.	x_0	$P(x_0)$	SUPOSIÇÃO
5.		$\forall y (P(x_0) \to Q(y))$	$\forall x E$ 2
6.		$P(x_0) \to Q(y_0)$	$\forall y E$ 5
7.		$Q(y_0)$	$\to E$ 6, 4
8.		$Q(y_0)$	$\exists x E$ 1, 4-7
9.		$\forall y Q(y)$	$\forall y i$ 3-8

EQUIVALÊNCIA ENTRE QUANTIFICADORES

EX: "NEM TODO PÁSSARO PODE VOAR"

$$\neg\forall x(B(x) \to F(x)) \quad \times \quad \exists x(B(x) \land \neg F(x))$$

DEF: USAMOS $\phi_1 \dashv\vdash \phi_2$ PARA $\phi_1 \vdash \phi_2$ E $\phi_2 \vdash \phi_1$.

TEOREMA

1. (a) $\neg\forall x\,\phi \dashv\vdash \exists x\,\neg\phi$
   (b) $\neg\exists x\,\phi \dashv\vdash \forall x\,\neg\phi$

2. SE x NÃO É LIVRE EM ψ

   (a) $(\forall x\,\phi)\land\psi \dashv\vdash \forall x(\phi\land\psi)$
   (b) $(\forall x\,\phi)\lor\psi \dashv\vdash \forall x(\phi\lor\psi)$
   (c) $(\exists x\,\phi)\land\psi \dashv\vdash \exists x(\phi\land\psi)$
   (d) $(\exists x\,\phi)\lor\psi \dashv\vdash \exists x(\phi\lor\psi)$

   (e) $\forall x(\psi\to\phi) \dashv\vdash \psi\to\forall x\,\phi$
   (f) $\exists x(\phi\to\psi) \dashv\vdash (\forall x\,\phi)\to\psi$
   (g) $\forall x(\phi\to\psi) \dashv\vdash (\exists x\,\phi)\to\psi$
   (h) $\exists x(\psi\to\phi) \dashv\vdash \psi\to\exists x\,\phi$

3. (a) $(\forall x\,\phi)\land(\forall x\,\psi) \dashv\vdash \forall x(\phi\land\psi)$
   (b) $(\exists x\,\phi)\lor(\exists x\,\psi) \dashv\vdash \exists x(\phi\lor\psi)$

4. (a) $\forall x\forall y\,\phi \dashv\vdash \forall y\forall x\,\phi$
   (b) $\exists x\exists y\,\phi \dashv\vdash \exists y\exists x\,\phi$

1. Vamos provar que $\neg(P_1 \wedge P_2) \vdash \neg P_1 \vee \neg P_2$, para observarmos a semelhança

→ Pensamos em um modelo com dois elementos 1 e 2 t.q. P_i significa $P(i)$ vale

1.	$\neg(P_1 \wedge P_2)$				Premissa
2.	$\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2)$				Suposição
3.	$\neg P_1$	suposição	$\neg P_1$	suposição	
4.	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i$ 3	$\neg P_1 \vee \neg P_2$	$\vee i$ 3	
5.	$\perp$	$\neg e$ 4,2	$\perp$	$\neg e$ 4,2	
6.	P_1	PPC 3-5	P_2	PPC 3-5	
7.	$P_1 \wedge P_2$				$\wedge i$ 6,6
8.	$\perp$				$\neg$ 7,1
9.	$\neg P_1 \vee \neg P_2$				PPC 2-8

1.	$\neg \forall x\, P(x)$	Premissa
2.	$\neg \exists x \neg P(x)$	suposição
3.	x_0	
4.	$\neg P(x_0)$	suposição
5.	$\exists x \neg P(x_0)$	$\exists x i$ 4
6.	$\perp$	$\neg e$ 5,2
7.	$P(x_0)$	PPC 4-6
8.	$\forall x P(x)$	$\forall x i$ 3-7
9.	$\perp$	$\neg e$ 8,1
10.	$\exists x \neg P(x)$	PPC. 2-9

→ ENTÃO PODEMOS PROVAR $\neg \forall x \phi \vdash \exists x \neg \phi$

1.	$\neg \forall x \phi$	PREMISSA
2.	$\neg \exists x \neg \phi$	SUPOSIÇÃO
3.	x_0	
4.	$\neg \phi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
5.	$\exists x \neg \phi$	$\exists x$i 4
6.	$\perp$	$\neg$E 5,2
7.	$\phi[x_0/x]$	PPC 4-6
8.	$\forall x \phi$	$\forall x$i 3-7
9.	$\perp$	$\neg$E 8,1
10.	$\exists x \neg \phi$	PPC. 2-9

→ A volta: $\exists x \neg \phi \vdash \neg x \forall x \phi$

1.	$\exists x \neg \phi$	PREMISSA
2.	$\forall x \phi$	SUPOSIÇÃO
3.	x_0	
4.	$\neg \phi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
5.	$\phi[x_0/x]$	$\forall x$E 2
6.	$\perp$	$\neg$E 5,4
7.	$\perp$	$\exists x$ 1,3-6
8.	$\neg \forall x \phi$	$\neg$i 2-7

2. $(\forall x\, \phi)\wedge \psi \vdash \forall x\,(\phi \wedge \psi)$

1.	$(\forall x\, \phi) \wedge \psi$	PREMISSA
2.	$\forall x\, \phi$	$\wedge E_1$ 1
3.	ψ	$\wedge E_2$ 1
4.	x_0	
5.	$\phi[x_0/x]$	$\forall E$ 2
6.	$\phi[x_0/x] \wedge \psi$	$\wedge i$ 5 3
7.	$(\phi\wedge\psi)[x_0/x]$	IDÊNTICO A 6: x NÃO É LIVRE EM ψ
8.	$\forall x\,(\phi\wedge\psi)$	$\forall x\, i$ 4-7

→ A VOLTA:

1.	$\forall x\,(\phi\wedge\psi)$	PREMISSA
2.	x_0	
3.	$(\phi\wedge\psi)[x_0/x]$	$\forall x E$ 1
4.	$\phi[x_0/x] \wedge \psi$	IDÊNTICO A 3: x NÃO É LIVRE EM ψ
5.	ψ	$\wedge E_2$ 4
6.	$\phi[x_0/x]$	$\wedge E_1$ 4
7.	$\forall x\, \phi$	$\forall x\, i$ 2-6
8.	$(\forall x\, \phi) \wedge \psi$	$\wedge i$ 7, 5

CUIDADO!
TEMOS QUE
PENSAR QUE
ESTA É UMA
SAÍDA DA
INTANCIAÇÃO 2.

3.(b) $(\exists x \phi) \vee (\exists x \psi) \vdash \exists x (\phi \vee \psi)$

1		$(\exists x \phi) \vee (\exists x \psi)$			PREMISSA
2		$\exists x \phi$		$\exists x \psi$	SUPOSIÇÃO
3	x_0	$\phi[x_0/x]$	x_0	$\phi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
4		$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$		$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$	$\vee$i 3
5		$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$		$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	IDÊNTICO 4
6		$\exists x (\phi \vee \psi)$		$\exists x (\phi \vee \psi)$	$\exists x$i 5
7		$\exists x (\phi \vee \psi)$			$\exists x$E 2, 3-6
8		$\exists x (\phi \vee \psi)$			$\vee$E 1, 2-7

→ A "VOLTA"

1		$\exists x (\phi \vee \psi)$		PREMISSA
2	x_0	$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$		SUPOSIÇÃO
3		$\phi[x_0/x] \vee \psi[x_0/x]$		IDÊNTICO
4		$\phi[x_0/x]$	$\psi[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
5		$\exists x \phi$	$\exists x \psi$	$\exists x$i 4
6		$\exists x \phi \vee \exists x \psi$	$\exists x \phi \vee \exists x \psi$	$\vee$i 5
7		$\exists x \phi \vee \exists x \psi$		$\vee$E 3, 4-6
8		$\exists x \phi \vee \exists x \psi$		$\exists x$E 1, 2-7

4(b) $\exists x \exists y \phi \vdash \exists y \exists x \phi$

1		$\exists x \exists y \phi$	PREMISSA
2	x_0	$(\exists y \phi)[x_0/x]$	SUPOSIÇÃO
3		$\exists y (\phi[x_0/x])$	IDÊNTICO POIS x, y SÃO VARS DIF
4	y_0	$\phi[x_0/x][y_0/y]$	SUPOSIÇÃO
5		$\phi[y_0/y][x_0/x]$	IDÊNTICO POIS x, y, x_0, y_0 SÃO VARS DIF
6		$\exists x \phi[y_0/y]$	$\forall x$ i 5
7		$\exists y \exists x \phi$	$\forall y$ i 6
8		$\exists y \exists x \phi$	$\exists y$ e 3, 4-7
9		$\exists y \exists x \phi$	$\exists x$ e 1, 2-8

SEMÂNTICA DA LÓGICA DE PREDICADOS

→ VIMOS COMO DEDUÇÃO NATURAL PODE SER ESTENDIDA PARA LÓGICA DE PREDICADOS.

→ AGORA VEREMOS COMO ESTENDER A SEMÂNTICA.

→ ESPERAMOS ALGO COMO TABELAS VERDADE

→ EM DEDUÇÃO NATURAL O OBJETO OBTIDO/CONSTRUÍDO É UMA PROVA.

- SEJA Γ O CONJUNTO DE PREMISSAS $\phi_1, \ldots, \phi_n$
- PARA MOSTRAR QUE $\Gamma \vdash \psi$ É VÁLIDO DEVEMOS APRESENTAR UMA PROVA DE ψ A PARTIR DE Γ

→ MAS COMO MOSTRAMOS QUE ψ NÃO É CONSEQUÊNCIA DE Γ? TEMOS QUE MOSTRAR QUE TODA PROVA POSSÍVEL NÃO FUNCIONA.

→ DEDUÇÃO NATURAL NOS DÁ UMA CARACTERIZAÇÃO POSITIVA DA LÓGICA.

→ SEMÂNTICA VAI NA OUTRA DIREÇÃO. PROVAR QUE ψ NÃO É CONSEQUÊNCIA DE Γ É A PARTE FÁCIL: ENCONTRAMOS UM MODELO NO QUAL TODOS OS ϕ_i SÃO VERDADE, MAS ψ É FALSO

→ MOSTRAR QUE $\Gamma \models \psi$ É FÁCIL SE O NÚMERO DE AVALIAÇÕES FOR PEQUENO.

- ESSE NÃO É CASO DA LÓGICA DE PREDICADOS.
- HÁ UM NÚMERO INFINITO DE AVALIAÇÕES, AQUI CHAMADAS MODELOS
- PRECISAMOS ENCONTRAR APENAS UM

→ SE VOCÊ ESTIVER TENDO PROBLEMAS PARA PROVAR UM SEQUENTE $\Gamma \vdash \psi$, TALVEZ SEJA A HORA DE BUSCAR UM MODELO QUE MOSTRE QUE $\Gamma \not\models \psi$.

Modelos

- Em lógica proposicional uma fórmula era avaliada em T ou F ao assumirmos valores para seus átomos proposicionais
  - A construção de uma linha na tabela verdade.
- Como podemos enriquecer esta ideia?
  - Não podemos simplesmente assumir valores T ou F para todos os predicados.
  - Precisamos explorar o sentido dos quantificadores
- Por que $\forall x \exists y R(x,y)$ é diferente de $\exists y \forall x R(x,y)$?
- Quando encontramos $\exists y \psi$, devemos buscar um valor concreto para y t.q. ψ vale para aquele valor.
  - Então $\exists y \psi$ é avaliado em T
  - Se não existe tal valor, então avaliamos $\exists y \psi$ e F.
- Quando encontramos $\forall y \psi$, devemos mostrar que concreto para y é t.q. ψ vale para aquele valor.
  - Então $\forall y \psi$ é avaliado em T
  - Se existe valor de y t.q. ψ é avaliado em F, então avaliamos $\forall y \psi$ em F.
- Precisamos de um universo fixo de valores concretos.
- O valor verdade de uma fórmula depende e varia com a escolha de valores, e dos signifs. dos símbol. de pred. e func.

Def: Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de símbolos de função e $\mathcal{P}$ um conjunto de símbolos de predicado com aridade fixada. Um **modelo** $\mathcal{M}$ do par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ consiste do seguinte conjunto de dados

1. Um conjunto não vazio A, o universo de valores concretos;

2. Para cada símbolo 0-ário $f \in \mathcal{F}$, um valor concreto $f^{\mathcal{M}} \in A$;

3. Para cada símbolo n-ário $f \in \mathcal{F}$, $n > 0$, uma função concreta $f : A^n \to A$ das n-tuplas sobre A para A;

4. Para cada símbolo n-ário $P \in \mathcal{P}$, $n > 0$, um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$ de n-tuplas sobre A.

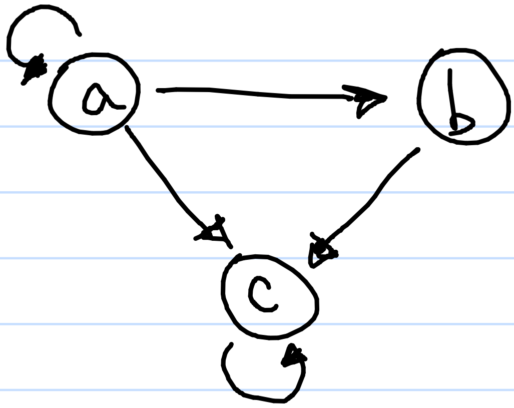
→ Note que f e P são apenas símbolos, enquanto $f^{\mathcal{M}}$ e $P^{\mathcal{M}}$ são funções e relações concretas no modelo $\mathcal{M}$.

EX: $\mathcal{F} = \{i\}$ E $\mathcal{P} = \{R, F\}$, EM QUE i É CONSTANTE, F E R SÃO SÍMBOLOS DE PREDICADOS 1-ÁRIO E 2-ÁRIO, RESP.

UM MODELO $\mathcal{M}$ É UM CONJUNTO CONCRETO. POR EXEMPLO, O CONJUNTO DE ESTADOS DE UM PROGRAMA DE COMPUTADOR

AS INTERPRETAÇÕES $i^{\mathcal{M}}$, $R^{\mathcal{M}}$, E $F^{\mathcal{M}}$ PODEM SER O ESTADO INICIAL UMA RELAÇÃO DE TRANSIÇÃO E UM CONJUNTO DE ESTADOS DE ACEITAÇÃO.

$A = \{a, b, c\}$, $i^{\mathcal{M}} = a$, $R^{\mathcal{M}} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$ E $F^{\mathcal{M}} = \{b, c\}$.



PODEMOS CHECAR ALGUMAS FÓRMULAS

1. $\exists y\, R(i, y)$ DIZ QUE EXISTE TRANSIÇÃO "SAINDO" DO ESTADO INIC.

2. $\neg F(i)$ DIZ QUE i NÃO É UM ESTADO FINAL

3. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(x,z)) \rightarrow y = z)$ DIZ QUE A TRANSIÇÃO É DETERMINÍSTICA: A PARTIR DE UM ESTADO, HÁ APENAS UM OUTRO ESTADO QUE PODEMOS ATINGIR.
→ ISSO NÃO VALE EM NOSSO MODELO POIS $(a,b), (a,c) \in R^{\mathcal{M}}$.

4. $\forall x \exists y\, R(x,y)$ DIZ QUE NÃO HÁ DEADLOCKS: TODO ESTADO POSSUI UMA TRANSIÇÃO PARA "OUTRO" ESTADO. ISSO VALE EM NOSSO MODELO.

EX: $\mathcal{F} = \{e, \cdot\}$ E $\mathcal{P} = \{\leqslant\}$, EM QUE e É CONSTANTE, $\cdot$ É UMA FUNÇÃO BINÁRIA, E $\leqslant$ É UM PREDICADO BINÁRIO

→ NOTAÇÃO INFIXA: $a \cdot b$ $a \leqslant b$

A É O CONJUNTO DE TODAS AS PALAVRAS QUE PODEM SER ESCRITAS NO ALFABETO $\{0, 1\}$, INCLUSIVE A PALAVRA VAZIA ϵ,

→ A INTERPRETAÇÃO e^M DE e É ϵ,

→ A INTERPRETAÇÃO $\cdot^M$ DE $\cdot$ É A CONCATENAÇÃO DE PALAVRAS

EX: $010 \cdot 110$ É 010110.

→ A INTERPRETAÇÃO $\leqslant^M$ DE $\leqslant$ COMO UMA ORDENAÇÃO DE PREFIXO.

DIZEMOS QUE s_1 É PREFIXO DE s_2 SE EXISTE PALAVRA s_3 T.Q. $s_1 \cdot^M s_3$ É s_2. EX: 010 É PREFIXO DE 010110

$\leqslant^M$ É O CONJUNTO $\{(s_1, s_2) : s_1$ É PREFIXO DE $s_2\}$.

CHECAMOS ALGUMAS FÓRMULAS

1. $\forall x ((x \leqslant x \cdot e) \wedge (x \cdot e \leqslant x))$ DIZ QUE TODA PALAVRA É O PREFIXO DE SI MESMO CONCATENADO COM A PALAVRA VAZIA, E O CONTRÁRIO TAMBÉM.

   → CLARAMENTE ISSO É VÁLIDO EM NOSSO MODELO

2. $\exists y \forall x (y \leqslant x)$ DIZ QUE EXISTE PALAVRA QUE É PREFIXO DE TODO OUTRA PALAVRA

   → ISSO É VÁLIDO POR CAUSA DE ϵ

3. $\forall x \exists y (y \leqslant x)$ DIZ QUE TODA PALAVRA TEM UM PREFIXO.

   → ISSO VALE POIS $\epsilon \leqslant x$ E $x \leqslant x$, ENTRE OUTROS.

4. $\forall x \forall y \forall z ((x \leqslant y) \to (x \cdot z \leqslant y \cdot z))$. DIZ QUE QUANDO s_1 É PREFIXO DE s_2, $s_1 \cdot s$ É PREFIXO DE $s_2 s$ PARA TODO s.

   → ISSO É FALSO. EX: $01 \leqslant 011$ MAS $01 \cdot 0 \not\leqslant 011 \cdot 0$

5. $\neg \exists x \forall y ((x \leqslant y) \to (y \leqslant x))$ DIZ QUE NÃO EXISTE PALAVRA s_1 TAL QUE SEMPRE QUE s_1 É PREFIXO DE s, É O CASO DE s SER PREFIXO DE s_1. ISSO TAMBÉM VALE EM M.

Há um problema técnico que atropelamos.

→ Se a é um valor no nosso modelo e x é uma variável livre de ϕ a substituição $\phi[a/x]$ é bem intencionada, mas mal formada.

DEF: Denotamos por VAR o conjunto de variáveis

DEF: Uma tabela de pesquisa (look-up table) ou ambiente para um universo A de valores concretos é uma função $l: VAR \to A$.

DEF: Dado um ambiente $l: VAR \to A$, denotamos por $l[x \to a]$ o ambiente $l': VAR \to A$ t.q. $l'(x) = a$ e $l'(y) = l(y)$ para toda variável y diferente de x.

DEF: Dado um modelo $\mathcal{M}$ para o par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ e um ambiente l, definimos a relação de satisfação $\mathcal{M} \models_l \phi$ para cada fórmula ϕ sobre o par $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ e ambiente l por indução estrutural em ϕ. Se $\mathcal{M} \models_l \phi$ vale, dizemos que ϕ é computada em T no modelo $\mathcal{M}$ com respeito a l.

P: Se ϕ é da forma $P(t_1, \dots, t_n)$, interpretamos $t_1, \dots, t_n$ em A substituindo todas as variáveis pelo seu valor em l. Desta forma obtemos valores $a_1, \dots a_n \in A$, em que cada símbolo de função f é interpretado por $f^{\mathcal{M}}$. Então $\mathcal{M} \models_l P(t_1, \dots, t_n)$ sse $(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathcal{M}}$

$\forall x$: A relação $\mathcal{M} \models_l \forall x \psi$ vale sse $\mathcal{M} \models_{l[x \to a]} \psi$ vale para todo $a \in A$

$\exists x$: A relação $\mathcal{M} \models_l \exists x \psi$ vale sse $\mathcal{M} \models_{l[x \to a]} \psi$ vale para algum $a \in A$

$\neg$: A relação $\mathcal{M} \models_l \neg \psi$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi$ não vale

$\vee$: A relação $\mathcal{M} \models_l \psi_1 \vee \psi_2$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi_1$ ou $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ vale

$\wedge$: A relação $\mathcal{M} \models_l \psi_1 \wedge \psi_2$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi_1$ e $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ valem

$\to$: A relação $\mathcal{M} \models_l \psi_1 \to \psi_2$ vale sse $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ vale sempre que $\mathcal{M} \models_l \psi_2$ vale

→ ESCREVEMOS $\mathcal{M} \not\models_{\ell} \phi$ PARA DIZER QUE $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$ NÃO VALE

→ SE ϕ NÃO POSSUI VARIÁVEL LIVRE, DIZEMOS QUE ϕ É UMA SENTENÇA

OBS: $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$ VALE SSE $\mathcal{M} \models_{\ell'} \phi$ SEMPRE QUE ℓ E ℓ' SÃO DOIS AMBIENTES QUE SÃO IDÊNTICOS NO CONJUNTO DE VARIÁVEIS LIVRES DE ϕ.

ISSO IMPLICA QUE SE ϕ É UMA SENTENÇA, ENTÃO VALE OU NÃO VALE $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$ INDEPENDENTEMENTE DA ESCOLHA DE ℓ.

→ NESTE CASO, ESCREVEMOS $\mathcal{M} \models \phi$

EX: $\mathcal{F} = \{alma\}$, $\mathcal{P} = \{ama\}$: alma É UMA CONSTANTE, ama É UM PREDICADO BINÁRIO.

O MODELO $\mathcal{M}$: $A = \{a, b, c\}$, $alma^{\mathcal{M}} = a$, $ama^{\mathcal{M}} = \{(a,a), (b,a), (c,a)\}$.

$\mathcal{M}$ SATISFAZ: "NENHUM DOS AMANTES DOS AMANTES DE alma AMA alma"

$$\forall x \forall y \left(ama(x, alma) \land ama(y, x) \rightarrow \neg ama(y, alma) \right)$$

O MODELO NÃO SATISFAZ A FÓRMULA: COLOQUE $x \to a$ E $y \to b$

MAS E SE $ama^{\mathcal{M}} = \{(b,a), (c,b)\}$
→ AGORA VALE.

Vinculação semântica

→ Em lógica Prop. a vinculação semântica $\phi_1, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ vale sse sempre que todos $\phi_1, \ldots, \phi_n$ são avaliados em T, a fórmula ψ é avaliada em T também.

→ Como definimos esta noção considerando que $\mathcal{M} \vDash_l \psi$ é indexada com um ambiente?

Def. Seja Γ um conjunto de fórmulas (possivelmente infinito) em lógica de predicados, e seja ψ uma fórmula em lógica de predicados.

1. $\Gamma \vDash \psi$ vale sse para todos modelos $\mathcal{M}$ e ambientes l, sempre que $\mathcal{M} \vDash_l \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$, temos também $\mathcal{M} \vDash_l \psi$

2. ψ é satisfazível sse há um modelo $\mathcal{M}$ e um ambiente l t.q. $\mathcal{M} \vDash_l \psi$ vale

3. ψ é válida sse $\mathcal{M} \vDash_l \psi$ vale para todo modelo $\mathcal{M}$ e todo ambiente l para os quais podemos checar ψ.

4. Γ é consistente ou satisfazível sse existe um modelo $\mathcal{M}$ e um ambiente l t.q. $\mathcal{M} \vDash_l \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$.

→ Note que usamos $\vDash$ para muitas coisas: $\mathcal{M} \vDash_l \phi$ e $\Gamma \vDash \psi$

→ Checar computacionalmente $\mathcal{M} \vDash \phi$ é um problema quando o universo A de $\mathcal{M}$ é infinito

→ Checar $\mathcal{M} \vDash_l \forall x \psi$ consiste em checar $\mathcal{M} \vDash_{l[x \mapsto a]} \psi$ para todo valor de a

→ Checar $\Gamma \vDash \psi$ consiste em checar todos os modelos com estrutura adequada (símbolos e aridades)

→ Às vezes é possível argumentar que uma vinculação semântica vale independentemente do modelo

EX: $\forall x \,(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo satisfazendo $\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \to Q(x))$. Pela definição de $\mathcal{M} \models \psi_1 \to \psi_2$, se existe um elemento de $\mathcal{M}$ que não satisfaz P, não há que fazer. Então podemos supor que todo elemento satisfaz P. Como $\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \to Q(x))$, temos que todo elemento satisfaz Q.

A recíproca é verdadeira?

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x \,(P(x) \to Q(x))$$

Dificilmente.

com universo A'

Suponha que $\mathcal{M}' \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$.
Isso diz que se $P^{\mathcal{M}'}$ é A' então $Q^{\mathcal{M}'}$ é A'.
Entretanto, se $P^{\mathcal{M}'}$ não é A', a premissa não diz nada.

Então é fácil construir um contraexemplo.
Tome $A' = \{a, b\}$, $P^{\mathcal{M}'} = \{a\}$, $Q^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
Então $\mathcal{M}' \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ vale, mas
$\mathcal{M}' \models \forall x (P(x) \to Q(x))$ não vale.

Semântica da igualdade

→ A igualdade é um predicado especial.
Se $\mathcal{M}$ é um modelo com universo $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, temos que fixar que $=^{\mathcal{M}}$ é o conjunto

$$\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), \dots\}$$

INDECIDIBILIDADE DA LÓGICA DE PREDICADOS

→ EM LÓGICA PROPOSICIONAL PODEMOS (TEORICAMENTE) DECIDIR SE VALE $\models \phi$: SE ϕ POSSUI n ÁTOMOS PROPOSICIONAIS SUA TABELA VERDADE TEM 2^n LINHAS. A COLUNA DE ϕ POSSUI APENAS T SSE $\models \phi$ VALE.

→ EM LÓGICA DE PREDICADOS ISSO NÃO É POSSÍVEL.

→ O PROBLEMA DE DETERMINAR SE UMA FÓRMULA DE LÓGICA DE PREDICADOS É VÁLIDA É CONHECIDO COMO UM PROBLEMA DE DECISÃO.

- UMA SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE DECISÃO É UM ALGORITMO (ESCRITO EM C, JAVA, OU OUTRA LINGUAGEM COMUM) QUE RECEBE INSTÂNCIAS DO PROBLEMA COMO INPUT E SEMPRE TERMINA, PRODUZINDO UM "SIM" OU "NÃO" CORRETAMENTE COMO SAÍDA

- NO CASO DO PROBLEMA DE DECISÃO PARA LÓGICA DE PREDICADOS, O INPUT É UMA FÓRMULA ϕ ARBITRÁRIA DE LÓGICA DE PREDICADOS E O PROGRAMA ESTÁ CORRETO SE PRODUZ "SIM" SEMPRE QUE ϕ É VÁLIDA E "NÃO" CASO CONTRÁRIO.

- O PROGRAMA DEVE TERMINAR PARA TODA FÓRMULA BEM-FORMADA.

- NÃO É PERMITIDO UM PROBLEMA QUE FICA PENSANDO PARA SEMPRE.

→ Formalmente

Validade em Lógica de Predicados: Dada uma fórmula ϕ de lógica de predicados, vale ou não $\models \phi$?

→ Vamos mostrar que este problema não é solúvel: não é possível escrever um algoritmo que funcione para todos ϕ.

→ Naturalmente, há instâncias que podemos facilmente checar que são válidas e outras que podemos checar que são inválidas.

→ Todo ϕ pode, a princípio, ser checado, mas não é possível criar um método mecânico uniforme para determinar se ϕ é válido que funcione para todo ϕ.

→ Vamos provar isso por uma técnica bem conhecida

Redução de Problemas

- Pegamos outro problema que já saibamos ser insolúvel.
- E mostramos que a solubilidade do nosso problema implica na solubilidade do outro.

O Problema de Pos-Correspondência: Dada uma sequência finita de pares $(s_1,t_1), (s_2,t_2), \ldots, (s_k,t_k)$ t.q. s_i e t_i são sequências binárias, existe uma sequência de índices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ com $m \geq 1$ t.q.

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} = t_{i_1} \cdot t_{i_2} \cdots t_{i_m} \quad ?$$

EX: $C = \big(\underset{s_1\ \ t_1}{(1, 101)}, \underset{s_2\ \ t_2}{(10, 00)}, \underset{s_3\ \ t_3}{(011, 11)} \big)$

UMA SOLUÇÃO : $(1, 3, 2, 3) \rightsquigarrow 1011100\,11 = 1011100\,11$

→ UM MESMO ÍNDICE PODE SE REPETIR

→ O ESPAÇO DE BUSCA É INFINITO

EX: $C = \big((001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001) \big)$

<u>TEOREMA</u>: O PROBLEMA DE DECISÃO DE VALIDADE DE LÓGICA DE PREDICADOS É INDECIDÍVEL: NÃO EXISTE PROGRAMA QUE, DADO ϕ DECIDE SE $\models \phi$.

<u>PROVA</u>: DADA UMA INSTÂNCIA DO PROBLEMA DE POS-CORRESPONDÊNCIA

$$C = \begin{matrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ t_1 & t_2 & & t_k \end{matrix}$$

VAMOS CONSTRUIR UMA FÓRMULA ϕ DE LÓGICA DE PREDICADO T.Q. $\models \phi$ SSE C TEM UMA SOLUÇÃO ("SIM" $\Leftrightarrow$ "SIM")

FUNÇÕES : CONSTANTE e, E FUNÇÕES 1-ÁRIAS f_0, f_1.

→ e É A PALAVRA VAZIA

→ f_0 E f_1 SÃO AS FUNÇÕES DE CONCATENAÇÃO COM 0 E 1.

→ $b_1 b_2 \cdots b_l$ É UMA SEQ. BINÁRIA, CODIFICAMOS COM O TERMO

$$f_{b_l}(f_{b_{l-1}}(\cdots f_{b_2}(f_{b_1}(e)))) \rightsquigarrow \underset{\text{ABREVIAMOS}}{f_{b_1 \cdots b_l}(e)}$$

PREDICADO BINÁRIO P

$P(s,t)$ É "EXISTE SEQUÊNCIA DE ÍNDICES $(i_1, \dots, i_m)$ T.Q. s É O TERMO REPRESENTANDO $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ E t É O TERMO REPRESENTANDO $t_{i_1} \cdots t_{i_m}$

→ NOSSA SENTENÇA ϕ É DA FORMA $\phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$, EM QUE

$$\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e))$$

$$\phi_2 = \forall v \forall w \left(P(v,w) \to \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(v), f_{t_i}(w))\right)$$

$$\phi_3 = \exists z P(z,z)$$

→ AFIRMAMOS QUE $\models \phi$ SSE C TEM SOLUÇÃO.

SUPONHA QUE $\models \phi$ VALE. VAMOS ENCONTRAR UM MODELO QUE NOS DIZ QUE C TEM SOLUÇÃO.

- A É O CONJUNTO DE TODAS AS SEQ. BINÁRIAS FINITAS.
- A INTERPRETAÇÃO e^M DE e É ϵ
- A INTERPRETAÇÃO DE f_0 É A FUNÇÃO UNÁRIA f_0^M QUE CONCATENA O A UMA PALAVRA: $f_0^M(s) = s0$.
- A INTERPRETAÇÃO DE f_1 É A FUNÇÃO UNÁRIA f_1^M QUE CONCATENA O A UMA PALAVRA: $f_1^M(s) = s1$.
- A INTERPRETAÇÃO DE P É

$$P^M = \{(s,t) : \text{EXISTE UMA SEQUÊNCIA } (i_1, \dots, i_m) \text{ T.Q. } s \text{ É } s_{i_1} \cdots s_{i_m} \text{ E } t \text{ É } t_{i_1} \cdots t_{i_m}\}$$

Como $\models \phi$ vale, temos $\mathcal{M} \models \phi$.

Note que pela def de $P^{\mathcal{M}}$, temos $(s_i, t_i) \in P^{\mathcal{M}}$, mas $s_i = f_{s_i}(\epsilon) = f_{s_i}(e^{\mathcal{M}})$ e $t_i = f_{t_i}(\epsilon) = f_{t_i}(e^{\mathcal{M}})$.
Logo, $\mathcal{M} \models \phi_1$

Afirmamos que $\mathcal{M} \models \phi_2$ que diz que sempre que (s,t) está em P, temos $(ss_i, tt_i) \in P$ para todo $i = 1, \dots, k$.
→ Isso é claro: se $(i_1, \dots, i_m)$ é a seq. de construção de (s,t), então $(i_1, \dots, i_m, i)$ é a seq. de construção de (ss_i, tt_i).

Como $\mathcal{M} \models \phi_1$, $\mathcal{M} \models \phi_2$, temos $\mathcal{M} \models \phi_1 \wedge \phi_2$,
e como $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$ e $\mathcal{M} \models \phi$, então $\mathcal{M} \models \phi_3$.

Pela definição de ϕ_3 e $P^{\mathcal{M}}$, há solução para C.

Volta: suponha que C possui solução, digamos $(i_1, \dots, i_n)$

→ Temos que mostrar que todo modelo $\mathcal{M}'$ que possui constante $e^{\mathcal{M}'}$, funções unárias $f_0^{\mathcal{M}'}$ e $f_1^{\mathcal{M}'}$, e predicado binário $P^{\mathcal{M}'}$ satisfaz ϕ.

Pela definição de $\to$, se $\mathcal{M}' \not\models \phi_1$ ou $\mathcal{M}' \not\models \phi_2$, então $\mathcal{M}' \models \phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$.

Então podemos supor que $\mathcal{M}' \models \phi_1$ e $\mathcal{M}' \models \phi_2$, e portanto, $\mathcal{M}' \models \phi_1 \wedge \phi_2$. Temos que mostrar que $\mathcal{M}' \models \phi_3$.

→ Vamos "interpretar" seqs binárias finitas no modelo.

$$INT(\epsilon) = e^{M'}$$
$$INT(s0) = f_0^{M'}(INT(s))$$
$$INT(s1) = f_1^{M'}(INT(s))$$

→ ISSO É SUFICIENTE PARA PENSAR EM A' COMO AS SEQS BIN.

→ TODA SEQ. BIN. TEM INTERPRETAÇÃO.

$$INT(b_1 b_2 \cdots b_l) = f_{b_l}^{M'}\left(\cdots f_{b_2}^{M'}\left(f_{b_1}^{M'}(e^{M'})\right)\right) = f_{b_1 \cdots b_l}^{M'}(e^{M'})$$

→ COMO $M' \models \phi_1$, TEMOS $\left(f_{s_i}^{M'}(e^{M'}), f'_{t_i}(e^{M'})\right) \in P^{M'}$ PARA TODO $i = 1, \ldots, k$

$$\left(f_{s_i}^{M'}(e^{M'}), f'_{t_i}(e^{M'})\right) = \left(INT(s_i), INT(t_i)\right)$$

→ COMO $M' \models \phi_2$, TEMOS QUE SEMPRE QUE $(s,t) \in P^{M'}$, TEMOS $\left(f_{s_i}(s), f_{t_i}(t)\right) \in P^{M'}$ PARA $i = 1, \ldots, k$.

$$\left(f_{s_i}(s), f_{t_i}(t)\right) = \left(INT(ss_i), INT(tt_i)\right)$$

→ LOGO, COMO $\left(INT(s_{i_1}), INT(t_{i_1})\right) \in P^{M'}$, OBTEMOS

$$\left(INT(s_{i_1} s_{i_2}), INT(t_{i_1} t_{i_2})\right) \in P^{M'}$$
$$\vdots$$
$$\left(INT(s_{i_1} \cdots s_{i_m}), INT(t_{i_1} \cdots t_{i_m})\right) \in P^{M'}$$

→ MAS $INT(s_{i_1} \cdots s_{i_m})$ E $INT(t_{i_1} \cdots t_{i_m})$ SÃO O MESMO ELEMENTO DE A'. ISSO MOSTRA QUE $M' \models \exists z P(z,z)$, OU SEJA

$$M' \models \phi_3$$

COMO DESEJADO $\blacksquare$

OBSERVAÇÕES FINAIS

1) ϕ é satisfazível se existe $\mathcal{M} \in \mathcal{L}$ t.q. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{L}} \phi$

- Há fórmulas não satisfazíveis : $\exists x\, (P(x) \land \neg P(x))$

→ Além disso ϕ é não-satisfazível sse $\neg\phi$ é válida

→ Como não podemos decidir validade, também não podemos decidir satisfatibilidade.

2) Pela completude e corretude, temos

$$\vdash \phi \quad \text{sse} \quad \models \phi$$

→ Como não podemos decidir validade, não podemos decidir provabilidade.