Ex: $S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k \cdot 2^k$ $\qquad a_k = k \cdot a^k \qquad a_0 = 0$

$$S_n = \frac{a x^{n+1} - a}{x - 1}$$

$$S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a x^k$$

$a = 1$

$x = 2$

$1 + 2 + \dots + 2^n$

Pelo Met. da Perturbação

$$S_n + (n+1)\,2^{n+1} = \cancel{a_0}^{\,0} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} k \cdot 2^k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (k+1)\,2^{k+1}$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k \cdot 2^{k+1} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} 2^{k+1}$$

$2 + 4 + \dots + 2^{n+1}$

$$= 2 \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k \cdot 2^k + \frac{2^{n+2} - 2}{2 - 1}$$

$$= 2 \cdot S_n + 2^{n+2} - 2$$

Logo, $S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2 \Rightarrow S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2$

FAZENDO UMA CONTA PARECIDA, OBTEMOS

$$\sum_{0\leq k\leq n} k\cdot x^{k} = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} \qquad \text{PARA } x\neq 1$$

$$S_n = \frac{ax^{n+1}-a}{x-1}$$

→ HÁ UMA OUTRA FORMA DE OBTER ESTE RESULTADO

$$S_n = \sum_{0\leq k\leq n} a x^{k}$$

TOME $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n} x^{k} = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}$ E DERIVE DOS DOIS LADOS

$$\sum_{0\leq k\leq n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)\left(-(n+1)x^{n}\right)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^{n}+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

SOMAS MÚLTIPLAS

→ PODEMOS TER UMA SOMA COM DOIS OU MAIS ÍNDICES

EX: $$\sum_{1 \leq j,k \leq 3} a_j b_k = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$$

→ CONVENÇÃO DE IVERSON: $P(j,k)$ É UMA PROPOSIÇÃO SOBRE INTEIROS

(EX: $1 \leq j,k \leq 3$: $[P(1,1)] = 1$

$[P(4,1)] = 0$

E $[P(j,k)] = 1$ SE $P(j,k)$ É VERDADE

$= 0$ SE $P(j,k)$ É falso

EX: $$\sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_{j,k} a_{j,k} [P(j,k)]$$

j,k → TODOS OS INTEIROS

→ PODEMOS USAR MÚLTIPLOS SIGMAS

$$\text{EX:} \sum_{J} \sum_{K} a_{J,K} [P(J,K)] = \sum_{J} \underbrace{\left(\sum_{K} a_{J,K} [P(J,K)] \right)}_{b_J} = \sum_{J,K} a_{J,K} [P(J,K)]$$

→ DIZEMOS QUE "SOMAMOS PRIMEIRO" EM K

→ UMA SOMA DUPLA PODE SER SOMADA PRIMEIRO EM QUALQUER ÍNDICE:

→ MUDANÇA DA ORDEM DO SOMATÓRIO

$$\sum_{J} \sum_{K} a_{J,K} [P(J,K)] = \sum_{P(J,K)} a_{J,K} = \sum_{K} \sum_{J} a_{J,K} [P(J,K)]$$

EX: SIMPLIFICANDO

$$\sum_{1 \leq j,k \leq 3} a_j b_k = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_j b_k \overset{\text{DISTRIBUTIVIDADE}}{=} \sum_{j=1}^{3} \left(a_j \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{3} b_k}_{\text{NÃO DEPENDE DE } J} \right) = \left(\sum_{k=1}^{3} b_k \right) \left(\sum_{j=1}^{3} a_j \right)$$

NÃO DEPENDE DE K

→ DISTRIBUTIVIDADE GENERALIZADA

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_j b_k = \left(\sum_{j \in J} a_j \right) \left(\sum_{k \in K} b_k \right)$$

↳ SÓ FUNCIONA QUANDO J E K SÃO INDEPENDENTES.

→ O QUE ACONTECE QUANDO K DEPENDE DE J?

↳ É UMA FUNÇÃO DE J

↳ O CONJUNTO DE ÍNDICES DE UMA SOMA DEPENDE DO ÍNDICE DA OUTRA.

EX: $\sum_{J=1}^{1000} \sum_{K=J+1}^{1000} 1$

EM GERAL, TEMOS

$$\sum_{J\in \mathcal{J}} \sum_{K\in K(J)} a_{J,K} = \sum_{K\in K'} \sum_{J\in J'(K)} a_{J,K}$$

$$\sum_{J} \sum_{K} a_{J,K} [J\in \mathcal{J}][K\in K(J)]$$

$$= \sum_{K} \sum_{J} a_{J,K} [K\in K'][J\in J'(K)]$$

INDEPENDENTES

→ Os CONJUNTOS K' E $J'(K)$ DEVEM SATISFAZER

$$[P(J,K)] = [J\in \mathcal{J}][K\in K(J)] = [K\in K'][J\in J'(K)]$$

→ ESSAS FATORAÇÕES SÃO SEMPRE POSSÍVEIS

PODEMOS TOMAR $\mathcal{J} = K' = \mathbb{Z}$

$$K(J) = \{K\in \mathbb{Z} : P(J,K)\}$$

$$J'(K) = \{J\in \mathbb{Z} : P(J,K)\}$$

```
A = []
For J in Range(-∞, ∞):
    For K in Range(-∞, ∞):
        IF ?? (J,K) :        P(J,K)
            A.APPEND((J,K))
S = 0
For (i,J) in A:
    S += a_{J,K}
```

EX. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k}$ ~> $\displaystyle\sum_{j}\sum_{k} a_{j,k}\,[P(j,k)]$

- TEMOS $[1 \leq j \leq n][j \leq k \leq n] = [1 \leq j \leq k \leq n] = [1 \leq k \leq n][1 \leq j \leq k]$

ISSO NOS DÁ O SOMATÓRIO $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}$

EX: $\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j \cdot a_k = S_{\triangledown}$

$$\begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_n \cdot a_1 & & & a_n \cdot a_n \end{bmatrix}$$

$\frac{n^2}{2}$ OPERAÇÕES

⇝ COMO A MATRIZ É SIMÉTRICA TEMOS $S_{\triangledown} = S_{\triangle}$

⇝ O SOMATÓRIO DEVE PARECER COM METADE DO SOMATÓRIO DA MATRIZ.

$$2S_{\triangledown} = S_{\triangledown} + S_{\triangle} = \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_j a_k + \sum_{1 \leq j = k \leq n} a_j a_k$$

NOTE QUE $\displaystyle\sum_{1 \leq j,k \leq n} a_j a_k = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2$ $\displaystyle\sum_{1 \leq j = k \leq n} a_j a_k = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^2$

LOGO, TEMOS $\displaystyle S_{\triangledown} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)$ $\Big\}$ $2n$ OPERAÇÕES

EX: $S = \sum_{1 \leq j < k \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$ SIMETRIA $(a_k - a_j)(b_k - b_j) = (a_j - a_k)(b_j - b_k)$

TROQUEI J E K

$$\text{LOGO, } S = \sum_{1 \leq j < k \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1 \leq k < j \leq m} (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

$$\overset{\text{SIMETRIA}}{=} \sum_{1 \leq k < j \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

NOTE QUE OR AND NOT

$$[1 \leq j < k \leq m] + [1 \leq k < j \leq m] = [1 \leq j, k \leq m] - [1 \leq j = k \leq m]$$

$$2S = \sum_{1 \leq j < k \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j) + \sum_{1 \leq k < j \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

0

$$= \sum_{1 \leq j, k \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j) - \sum_{1 \leq j = k \leq m} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

$$2S = \sum_{1 \leq j,k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1 \leq j,k \leq n} (a_k b_k - a_k b_j - a_j b_k + a_j b_j)$$

$$= 2 \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_j b_j - 2 \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_j b_k$$

$$= 2 \cdot n \sum_{1 \leq j \leq n} a_j b_j - 2 \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_j \right) \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_k \right)$$

REORGANIZANDO, TEMOS

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

→ ISSO NOS DÁ AS DESIGUALDADES DE CHEBYCHEV PARA SEQUÊNCIAS MONÓTONAS

1) $$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \quad \text{SE} \quad \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \end{array} \quad \text{OU} \quad \begin{array}{l} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \end{array}$$

2) $$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \quad \text{SE} \quad \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \end{array}$$

Voltando à Comutatividade

- Se $p(j) : J \to J$ é permutação, então $\displaystyle\sum_{j \in J} a_j = \sum_{j \in J} a_{p(j)}$

Mas o que acontece quando $f : J \to K$

- Neste caso, temos $\displaystyle\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k \cdot \# f^{-1}(k)$

↳ o número de elementos em J que mandam em k

$|\{j \in J : f(j) = k\}|$

$a_k [f(j) = k] = a_{f(j)}$

Quando f é bijetiva temos $\# f^{-1}(k) = 1 \ \forall k$.

Provamos isso:

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_k [f(j) = k] = \sum_{k \in K} a_k \cdot \sum_{j \in J} [f(j) = k]$$