SOMAS INFINITAS

$1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$

$1-1+1-1 = \frac{1}{2}$

→ UM SOMATÓRIO DE UM NÚMERO INFINITO DE TERMOS NÃO ESTÁ BEM DEFINIDO.

→ PARECE NATURAL DEFINIR DE TAL FORMA QUE

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$2S = 2 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots}_{S} = 2 + S$$

→ MAS ESSE TIPO DE MANIPULAÇÃO TAMBÉM DÁ

$$\left.\begin{aligned} T &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots \\ 2T &= 2 + 4 + 8 + \cdots = T - 1 \end{aligned}\right\} \quad T = -1$$

→ Vamos buscar definir $\sum_{k \in K} a_k$

→ Suponha inicialmente que $a_k \geq 0$ para todo k

→ Razoável: se há uma cota superior, i.e., uma constante A t.q.

$$\sum_{k \in F} a_k \leq A$$

Note que não depende da ordem.

para todo subconjunto finito $F \subseteq K$

→ Neste caso, definimos $\sum_{k \in K} a_k$ como o menor A com essa prop.

→ Se não tal constante, então para todo A, existe $F \subseteq K$ t.q.

$$\sum_{k \in F} a_k > A$$

→ Se não tal constante, então dizemos $\sum_{k \in K} a_k = \infty$.

→ NO CASO EM QUE K É O CONJUNTO DE INTEIROS NÃO NEGATIVOS, TEMOS

$$\sum_{k \geq 0} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

EX: $$\sum_{k \geq 0} x^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{SE } 0 \leq x < 1 \\ \infty & \text{SE } x \geq 1 \end{cases}$$

EX: $$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k \geq 0} k^{-2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{0}^{n} k^{-2} = \lim_{n \to \infty} \frac{k^{-1}}{-1} \Big|_0^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{(k+1)} \Big|_0^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{1} \right) = 1$$

$\rightarrow$ O QUE ACONTECE QUANDO a_k PODE SER NEGATIVO?

EX: $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$

$$= \underbrace{(1 - 1)}_{0} + \underbrace{(1 - 1)}_{0} + \underbrace{(1 - 1)}_{0} \cdots = 0$$

$$= 1 \underbrace{(-1 + 1)}_{0} \underbrace{(-1 + 1)}_{0} \underbrace{(-1}_{0} \cdots = \underline{1}$$

$$\sum_{k\geq 0} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \overset{x=-1}{=} \frac{1}{2}$$

↳ EMBORA SEJA UMA SOMA DE NÚMEROS INTEIROS

EX: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ ONDE $a_k = \frac{1}{k+1}$ SE $k \geq 0$ $\quad a_k = \frac{1}{k-1}$ $k < 0$

1) $\cdots -\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + (1) + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$

$1 + 0 + 0 + 0 \cdots = 1$

2) $\cdots \left(-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\left(-\cancel{\frac{1}{3}}\left(-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + 1\right) + \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = 1$

3) $\cdots -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\left(-\cancel{\frac{1}{3}}\left(-\cancel{\frac{1}{2}} + 1 + \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7}$

O n-ÉSIMO PARÊNTESES SERÁ

$$-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = 1 + H_{2n} - H_{n+1}$$

MAS $\lim_{n \to \infty} (H_{2n} - H_{n+1}) = \ln 2$

• DADO UM NÚMERO REAL x PODEMOS ESCREVÊ-LO COMO

$$x = x^{+} - x^{-} \quad \text{ONDE} \quad x^{+} = x[x>0] \quad \text{E} \quad x^{-} = -x \cdot [x<0]$$

$$= x[x>0] + x \cdot [x<0]$$

$$= x \underbrace{\left([x>0] + [x<0]\right)}$$

NOTE QUE $x^{+}, x^{-} \geq 0$ MAS SEMPRE UM DELES É IGUAL A ZERO.

$\rightarrow$ LOGO $\sum a_k^{+}$ E $\sum a_k^{-}$ SÃO SOMAS QUE JÁ SABEMOS RESOLVER

NOSSA DEFINIÇÃO ENTÃO É BASICAMENTE

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k^+ - \sum_{k\in K} a_k^-$$

A NÃO SER QUE AS DUAS SOMAS SEJAM ∞ (DEIXAMOS INDEFINIDO)

• SEJA $A^+ = \sum_{k\in K} a_k^+$ E $A^- = \sum_{k\in K} a_k^-$,

→ SE A^+ E A^- SÃO FINITOS, DIZEMOS QUE $\sum_{k\in K} a_k$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE PARA $A^+ - A^-$

→ SE $A^+ = \infty$ E A^- É FINITO DIZEMOS QUE $\sum_{k\in K} a_k$ DIVERGE P/ ∞

→ SE $A^- = \infty$ E A^+ É FINITO DIZEMOS QUE $\sum_{k\in K} a_k$ DIVERGE P/ $-\infty$

REGRA DE TRANSFORMAÇÃO

→ **DISTRIBUTIVIDADE** : SE $\sum_{k \in K} a_k$ CONVERGE ABS PARA A E c É UMA CONSTANTE, ENTÃO $\sum_{k \in K} c \cdot a_k$ CONV. ABS. P/ $c \cdot A$.

→ **ASSOCIATIVIDADE**: SE $\sum_{k \in K} a_k$ E $\sum_{k \in K} b_k$ CONV. ABS. P/ A E B, ENTÃO $\sum_{k \in K} (a_k + b_k)$ CONV. ABS. P/ $A + B$.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DAS SOMAS MÚLTIPLAS

→ SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES COM DOIS OU MAIS ÍNDICES, PODEM SER SOMADOS PRIMEIRO EM QUALQUER ÍNDICE.

→ SE J E $\{K_j : j \in J\}$ SÃO CONJUNTOS DE ÍNDICES TAIS QUE

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K_j}} a_{j,k} \quad \text{CONV. ABS. P/ } A$$

ENTÃO PARA CADA $j \in J$ EXISTE A_j T.Q.

(i) $\sum_{k \in K_j} a_{jk}$ CONVERGE P/ A_j; E

(ii) $\sum_{j \in J} A_j$ CONVERGE P/ A