FUNÇÕES INTEIRAS

- PISOS E TESOS

$\lfloor x \rfloor$ = MAIOR INTEIRO MENOR OU IGUAL A x (floor)

$\lceil x \rceil$ = MENOR INTEIRO MAIOR OU IGUAL A x (ceil)

EX: $x = \frac{1}{2}$

$\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$

$\neq$

$-\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

OBSERVAÇÕES

1) $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$

2) $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ SE E SOMENTE SE x É INTEIRO

SE x NÃO É INTEIRO, ENTÃO $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$

3) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \text{ INTEIRO} \\ 1 & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$

4) $x - 1 < \lfloor x \rfloor$ E $\lceil x \rceil < x + 1$: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

5) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ E $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

RESUMINDO

$$\lfloor x \rfloor = n \iff x - 1 < n \leq x < n + 1$$

$$\lceil x \rceil = n \iff n - 1 < x \leq n < x + 1$$

- É possível mover um inteiro para dentro do piso/teto

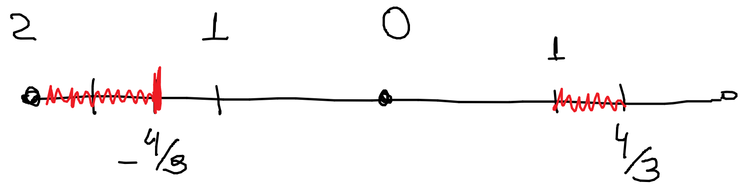
$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$
$$\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$$

- Outras propriedades, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lcl}
x < n & & \lfloor x \rfloor < n \\
n < x & \iff & n < \lceil x \rceil \\
x \leq n & & \lceil x \rceil \leq n \\
n \leq x & & n \leq \lfloor x \rfloor
\end{array}$$

PARTE FRACIONÁRIA.

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$



EX: $\{3/2\} = 1/2$

$$\{4/3\} = 4/3 - 1 = 1/3$$

$$\{-4/3\} = -4/3 - \lfloor -4/3 \rfloor$$

$$= -4/3 + 2 = 2/3$$

OBS: $$\{x\} + \{-x\} = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{SE } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

NOTE QUE SE $x = n + \theta$, EM QUE $n \in \mathbb{Z}$ E $0 \leq \theta < 1$,

ENTÃO $\lfloor x \rfloor = n$ E $\{x\} = \theta$

SE $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \lfloor y \rfloor + \{y\} \rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

SABEMOS QUE

$$0 \leq \{x\}, \{y\} < 1$$

$$0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \leq 1$$

EX: $\log_2 35$ $\quad \lceil \log_2 35 \rceil$

COMO $\underset{32}{2^5} < 35 < \underset{64}{2^6}$, TEMOS $5 < \log_2 35 < 6$

$$\Rightarrow \lceil \log_2 35 \rceil = 6$$

- QUAL O NÚMERO DE BITS NECESSÁRIO P/ ESCREVER n EM BINÁRIO $\lceil \log_2 n \rceil$?

EX: 0, 1 $\rightsquigarrow$ 1 BIT

2 − 3 $\rightsquigarrow$ 2 BITS

⋮

$2^K - 2^{K+1} - 1 \rightsquigarrow K+1$ BITS

SE n PRECISA DE m BITS, ENTÃO

$$2^{m-1} \leq n < 2^m$$

LOGO, $m - 1 \leq \log_2 n < m$. PORTANTO $\lfloor \log_2 n \rfloor = m - 1$

$\Rightarrow m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

O QUE ACONTECE COM $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$?

$x \in [m, m+1) \; [m+1, m+2)$

ENTÃO $\lfloor x \rfloor = m$

FÁCIL: $\lfloor x \rfloor$, POIS $\lfloor x \rfloor$ JÁ É INTEIRO

EX: $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$ É VERDADEIRO OU FALSO?

VERDADE QUANDO x É INTEIRO

$\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$

TOME $m = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$. TEMOS $m \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m+1$

$$m^2 \leq \lfloor x \rfloor < (m+1)^2$$

$$x \geq (m+1)^2$$
$$\lfloor x \rfloor \geq (m+1)^2$$

$$m^2 \leq x - \{x\} < (m+1)^2$$

$$\underline{m^2 + \{x\}} \leq x < (m+1)^2 + \{x\}$$

ENTÃO $m^2 \leq x < (m+1)^2$

$$m \leq \sqrt{x} < m+1$$

$$m \leq \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor < m+1 \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor = m$$

EXERCÍCIO: PROVE QUE $\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$.

PROP: SEJA f UMA FUNÇÃO CONTÍNUA, ESTRITAMENTE CRESCENTE E TAL QUE

(*) SE $f(x) \in \mathbb{Z}$, ENTÃO $x \in \mathbb{Z}$

EX: $\sqrt[k]{\ }$, $\log_a$, $a \in \mathbb{Z}$

ENTÃO TEMOS $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ E $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

$f(x)$ $f(\lceil x \rceil)$

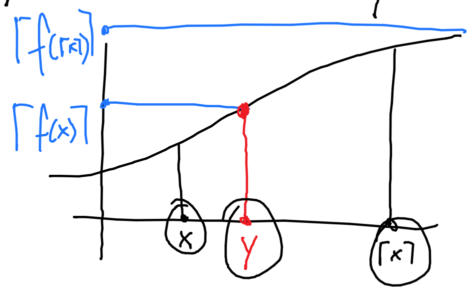
$(m-2, m-1]$ $(m-1, m]$

PROVA (TETO): SE $x = \lceil x \rceil$, NÃO HÁ O QUE FAZER: $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

ENTÃO PODEMOS SUPOR QUE $x < \lceil x \rceil$. COMO f É EST. CRESC., ENTÃO $f(x) < f(\lceil x \rceil)$

LOGO, TEMOS $\lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

SE $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, COMO f É CONTÍNUA ENTÃO EXISTE y COM $x \leq y < \lceil x \rceil$ T.q. $f(y) = \lceil f(x) \rceil$



POR (*) COMO $f(y) \in \mathbb{Z}$, TEMOS $y \in \mathbb{Z}$

MAS ENTÃO y É UM INTEIRO EM $[x, \lceil x \rceil)$, UM ABSURDO

Intervalos

- Int. fechado: $[\alpha..\beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$
- Int. aberto: $(\alpha..\beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$
- Int semi abertos: $(\alpha..\beta]$ e $[\alpha, \beta)$

Pergunta: Quantos inteiros estão contidos em tais intervalos?

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, então $[\alpha..\beta)$ contém exatamente $\beta - \alpha$ inteiros

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\underline{n \in [\alpha..\beta)} \iff \alpha \leqslant n < \beta \iff \lceil\alpha\rceil \leqslant n < \lceil\beta\rceil$$

$$\iff \underline{n \in [\lceil\alpha\rceil..\lceil\beta\rceil)}$$ Possui $\lceil\beta\rceil - \lceil\alpha\rceil$ inteiros

$$n\ (\alpha..\beta], \iff \alpha < n \leqslant \beta \iff \lfloor\alpha\rfloor < n \leqslant \lfloor\beta\rfloor$$

$$\iff n \in (\lfloor\alpha\rfloor..\lfloor\beta\rfloor]$$

Logo, $[\alpha..\beta)$ e $(\alpha..\beta]$ possuem $\lceil\beta\rceil - \lceil\alpha\rceil$ e $\lfloor\beta\rfloor - \lfloor\alpha\rfloor$ inteiros, resp.

$[\alpha .. \beta)$ E $(\alpha .. \beta]$ POSSUEM $\lceil \beta \rceil - \lceil \alpha \rceil$ E $\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$ INTEIROS, RESP.

Analogamente

$[\alpha .. \beta]$ POSSUI $\lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1$ INTEIROS

$(\alpha .. \beta)$ POSSUI $\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$ INTEIROS

<u>PROBLEMA:</u> QUANTOS INTEIROS n ENTRE 1 E 1000000 SÃO DIVISÍVEIS POR $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$?

EX: SE $1 \leq n \leq 7$, $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 1$

SE $8 \leq n \leq 26$, TEMOS $\sqrt[3]{n} < 3$. LOGO $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 2$

ENTÃO CONTAMOS OS PARES.

SEJA V O NÚMERO DE INTEIROS n ENTRE 1 E 1000000 DIVISÍVEIS POR $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$

$$V = \sum_{n=1}^{10^6} [n \text{ É DIVISÍVEL POR } \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor] = \sum_{k,n} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor] [k \backslash n] [1 \leq n \leq 10^6]$$

$$= \sum_{k,m,n} [k^3 \leq n < (k+1)^3] [n = m \cdot k] [1 \leq n \leq 10^6]$$

$$= \overset{10^6}{1} + \sum_{k,m} [k^3 \leq m \cdot k < (k+1)^3] [1 \leq k \leq 10^2] = 1 + \sum_{k,m} \left[m \in \left[k^2 \,..\, \frac{(k+1)^3}{k}\right)\right] [1 \leq k \leq 10^2]$$

SEJA V O NÚMERO DE INTEIROS n ENTRE 1 E 1000000 DIVISÍVEIS POR $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$

$$V = \sum_{n=1}^{10^6} [n \text{ é divisível por } \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor] = \sum_{k,n} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor] [k \backslash n] [1 \leqslant n \leqslant 10^6]$$

$$= \sum_{k,m,n} [k^3 \leqslant n < (k+1)^3] [n = m \cdot k] [1 \leqslant n \leqslant 10^6]$$

$$= 1 + \sum_{k,m} [k^3 \leqslant m \cdot k < (k+1)^3] [1 \leqslant k \leqslant 10^2]$$

$$= 1 + \sum_{k,m} \left[m \in \left[k^2 .. \frac{(k+1)^3}{k}\right)\right] [1 \leqslant k \leqslant 10^2]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{10^2} \left(\left\lceil \frac{(k+1)^3}{k} \right\rceil - \lceil k^2 \rceil \right) = 1 + \sum_{k=1}^{100} (3k + 4) = 1 + 4 \cdot 100 + 3 \frac{101 \cdot 100}{2}$$