Autômatos de pilha

- Um autômato de pilha não-determinístico é um autômato com uma funcionalidade extra: Memória infinita

- Memória: Pilha

  ↳ o último elemento a ser colocado é o próximo a ser lido.

  ↳ Discos perfurados em uma haste
  ⇝ lembrar é colocar um disco na haste.
  e um disco só pode ser removido se estiver no topo

Ex: $L_1 = \{vcv^R : v \in \{a,b\}^*\}$

$abaacaaba \in L_1$

$abcab \notin L_1$

Etapa 1: se ler a, empilha a
se ler b, empilha b
Etapa 2: se ler c, muda de atitude
Etapa 3: compare o símbolo lido com o que está no topo da pilha:
se são iguais, ok.
se são diferentes, pare a computação

Nesse caso temos um autômato determinístico, que não precisa adivinhar nada.

Pensamos que há dois estados "empilha" e "desempilha"

$q_1 \xrightarrow{c} q_2$

Ex: $L_2 = \{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$

A diferença é que L_1 possui um símbolo que indica o meio da palavra

Um autômato para L_2 deve adivinhar a hora certa de mudar de atitude.

Definição Formal

Def: Um autômato de pilha não-determinístico (AP) A é uma 6-tupla $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$, onde:

- Σ é o alfabeto de entrada
- Γ é o alfabeto da pilha
- Q é um conjunto finito de estados
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais
- Δ é a função de transição

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \longrightarrow \mathcal{P}_f(Q \times \Gamma^*)$$

- Note que o autômato pode efetuar uma transição sem consultar a entrada ou a pilha

Como interpretar a função de transição?

$$(p, u) \in \Delta(q, \sigma, \gamma)$$

significa que M está no estado q, lendo σ na entrada e γ na pilha; e vai para o estado p e troca γ por u na pilha

• γ PODE SER TROCADA POR UMA PALAVRA INTEIRA

• " SOMENTE REMOVIDO (TROCADA POR ε)

EX: $L = \{ v c v^R : v \in \{a,b\}^* \}$ $\quad Q = \{q_1, q_2\}$

• $\Delta(q_1, a, \varepsilon) = \{(q_1, a)\}$
$\Delta(q_1, b, \varepsilon) = \{(q_1, b)\}$

• $\Delta(q_1, c, \varepsilon) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

• $\Delta(q_2, a, a) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\Delta(q_2, b, b) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

QUAIS SÃO OS ESTADOS FINAIS?

A PALAVRA SÓ PODE SER ACEITA QUANDO FOR LIDO TOTALMENTE E A PILHA ESTIVER VAZIA.

RESP.: $F = \{q_1, q_2\} = Q$

PODEMOS VER EM TABELA

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_1	a	ε	(q_1, a)
q_1	b	ε	(q_1, b)
q_1	c	ε	(q_2, ε)
q_2	a	a	(q_2, ε)
q_2	b	b	(q_2, ε)

EX: $L_2 = \{vv^R : v \in \{a,b\}^*\}$

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_1	a	ε	(q_1, a)
q_1	b	ε	(q_1, b)
q_1	ε	ε	(q_2, ε)
q_2	a	a	(q_2, ε)
q_2	b	b	(q_2, ε)

COMPUTANDO E ACEITANDO

DEF: SEJA $M = (\Sigma, \Gamma, Q, F, q_0, \Delta)$.
UMA CONFIGURAÇÃO DE M É UM ELEMENTO

$$(q, w, u) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*, \text{ ONDE}$$

OBS: POR DEFINIÇÃO, O TOPO DA PILHA u É SEU ELTO MAIS A ESQ.

DEF: SEJA $C = (q, \sigma w, \gamma u)$ UMA CONFIGURAÇÃO DE M,
ONDE $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ E $\gamma \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$. DIZEMOS QUE
$C' = (q, w, vu)$ É UMA DAS CONFIG. SEGUINTES A C SE

$$(q', v) \in \Delta(q, \sigma, \gamma)$$

DENOTAMOS POR $C \vdash C'$

DEF: UMA COMPUTAÇÃO DE M É UMA SEQUÊNCIA $C_0, \ldots, C_K$
T.Q. C_{i+1} É UMA CONF. SEGUINTE DE C_i. ESCREVEMOS $C_0 \vdash^* C_K$

CONVENCIONAMOS QUE $C \vdash^* C$

EX: L_1, M_1 $\quad C = (q_1, abcba^2, a)$

$$(q_1, abcba^2) \vdash (q_1, bcba^2, a^2) \vdash (q_1, cba^2, ba^2)$$
$$\vdash (q_2, ba^2, ba^2) \vdash (q_2, a^2, a^2)$$
$$\vdash (q_2, a, a) \quad \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$$

EX: L_2, M_2 $\quad C = (q_1, a^2b, \varepsilon)$

$$(q_1, a^2b, \varepsilon) \vdash (q_1, ab, a) \vdash (q_1, b, a^2) \vdash (q_2, b, a^2)$$

MAS TAMBÉM

$$(q_1, a^2b, \varepsilon) \vdash (q_2, a^2b, \varepsilon)$$

OU

$$(q_1, a^2b, \varepsilon) \vdash (q_1, ab, a) \vdash (q_2, ab, a)$$

DEF: SEJA $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$ UM AP.
UMA PALAVRA $w \in \Sigma^*$ É ACEITA POR M SE EXISTE
COMPUTAÇÃO

$$(q_0, w, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

ONDE $p \in F$.

- BASTA EXISTIR UMA COMPUTAÇÃO
- A PALAVRA w TEM QUE SER TOTALMENTE CONSUMIDA
- A PILHA TEM QUE ESTAR VAZIA
- O AUTOMATO TEM QUE CHEGAR A UM ESTÁGIO FINAL.

Ex: $L = \{a^i b^i : i \geq 0\}$

$Q = \{q_1, q_2\} = F$

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_1	a	ε	(q_1, a)
q_1	b	a	(q_1, ε)
q_2	b	a	(q_2, ε)

COMO ANALISAR?

Ex: L é a linguagem formada pelas palavras $w \in \{a, b\}^*$ que possuem mesmo número de a's e b's

Vamos usar $\Gamma = \{a, b, \phi\}$, ϕ indica que a pilha está vazia

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_0	ε	ε	(q_1, ϕ)
q_1	a	ϕ	$(q_1, a\phi)$
q_1	b	ϕ	$(q_1, b\phi)$
q_1	a	a	(q_1, aa)
q_1	b	b	(q_1, bb)
q_1	a	b	(q_1, ε)
q_1	b	a	(q_1, ε)
q_1	ε	ϕ	(q_2, ε)