GLC X AP

O objetivo é entender o seguinte resultado

Teorema: Uma linguagem é livre de contexto se e somente se é aceita por autômato de pilha não-determinístico.

Em particular, vamos construir um AP que aceita a linguagem gerada por uma dada GLC; e
vamos construir uma GLC que gera a linguagem reconhecida por um dado AP.

1) GLC $\longrightarrow$ AP

- Temos que transformar as variáveis e regras em estados e transições
- A pilha desempenha papel fundamental (do contrário seria um AFD)
- Na verdade, os estados vão desempenhar papel secundário
- Vamos construir um autômato que simula as derivações mais à esq.

- Seja $G = (T, V, S, R)$
- Claramente o alfabeto do autômato M tem que ser $\Sigma = T$.
- Cada derivação de G corresponde a uma transição de M
- O alfabeto da pilha é $\Gamma = T \cup V$

- Vamos ter apenas dois estados: i e f
- Como a derivação começa por S, o autômato inicia empilhando S.

$$\Delta(i, \varepsilon, \varepsilon) = \{(f, S)\}$$

- Se temos a regra $X \to \alpha$, criamos a transição

$$(f, \alpha) \in \Delta(f, \varepsilon, X)$$

- A PRINCÍPIO O AUTÔMATO NÃO LÊ A PALAVRA.
- ELE DERIVA A PALAVRA NA PILHA, E "DEPOIS" COMPARA A PALAVRA

- O AUTÔMATO É "OBRIGADO" A COMPARAR SE O TOPO DA PILHA FOR UM TERMINAL.

EX: $S \rightarrow Sc \mid aSb \mid \varepsilon$

CRIAMOS A

ESTADO	ENTRADA	PILHA	TRANS.
i	ε	ε	(f, S)
f	ε	S	(f, Sc)
			(f, aSb)
			(f, ε)

abc^2 É DERIVADA POR

$$S \Rightarrow Sc \Rightarrow Sc^2 \Rightarrow aSbc^2 \Rightarrow abc^2$$

A COMPUTAÇÃO FICA

$$(i, abc^2, \varepsilon) \vdash (f, abc^2, S) \vdash (f, abc^2, Sc) \vdash (f, abc^2, Sc^2)$$
$$\vdash (f, abc^2, aSbc^2)$$

E AÍ PRECISAMOS COMEÇAR A COMPARAR

f	a	a	(f, ε)
f	b	b	(f, ε)
f	c	c	(f, ε)

QUE NOS PERMITE TERMINAR A COMPUTAÇÃO

$$(f, abc^2, aSbc^2) \vdash (f, bc^2, Sbc^2) \vdash (f, bc^2, bc^2) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$$

MAIS FORMALMENTE

$\Sigma = T$
$\Gamma = T \cup V$
$Q = \{i, f\}$
$q_0 = i$
$F = \{f\}$
$\Delta : \{i,f\} \times (T \cup \{\varepsilon\}) \times (T \cup V \cup \{\varepsilon\}) \to \{i,f\} \times (T \cup V)^*$

$$\Delta(q,\sigma,\gamma) = \begin{cases} (f, S) & \text{SE } q = i \text{ E } \sigma = \gamma = \varepsilon \\ \underbrace{\{(f,u) : S \to u \in R\}}_{\text{SUBSTITUIÇÕES}} & \text{SE } q = f, \sigma = \varepsilon \text{ E } \gamma = X \in V \\ \underbrace{(f, \varepsilon)}_{\text{REMOÇÕES}} & \text{SE } q = f \text{ E } \sigma = \gamma \in T \end{cases}$$

- O NÚMERO DE PASSOS DA COMPUTAÇÃO ACABA SENDO MAIOR DO QUE DA DERIVAÇÃO DEVIDO ÀS REMOÇÕES

<u>TEOREMA</u>: SE G É UMA GLC E M É O AUTÔMATO CONSTRUÍDO COMO MOSTRADO, ENTÃO $L(G) = L(M)$

<u>PROVA</u>: SEJA $w \in L(G)$. VAMOS MOSTRAR QUE $w \in L(M)$

TEMOS QUE MOSTRAR QUE $(i, w, \varepsilon) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$

SABEMOS QUE $S \Rightarrow^* w$

SUPONHA QUE APÓS ALGUMAS ETAPAS DA DERIVAÇÃO, TEMOS

$$S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha X v$$

ONDE $\alpha \in T^*$ E X É A VARIÁVEL MAIS A ESQ.

ISSO IMPLICA QUE $w = \alpha\beta$, PARA ALGUM $\beta \in T^*$.

VAMOS MOSTRAR QUE SEMPRE CONSEGUIMOS UMA COMPUTAÇÃO QUE DEIXA UMA VARIÁVEL NO TOPO DA PILHA

SE FORMOS CONSTRUINDO A COMPUTAÇÃO, TEMOS NESSA ETAPA

$$(i, w, \varepsilon) \vdash (f, w, S) \vdash^* (f, \beta, Xv)$$

ASSIM, SE A PRÓXIMA REGRA É $X \to u$

$$\cdots \Rightarrow \alpha X v \Rightarrow \alpha u v$$

COMO X ESTÁ NO TOPO DA PILHA, PODEMOS FAZER

$$(f, \beta, Xv) \vdash (f, \beta, uv)$$

DIGAMOS QUE $uv = \gamma Y v'$, ONDE $Y \in V$ É A VARIÁVEL MAIS À ESQ.
LOGO, $\gamma \in T^*$, CONCLUÍMOS QUE γ É PREFIXO DE β

$$\beta = \gamma \beta'$$

$$(f, \beta, uv) = (f, \gamma\beta', \gamma Y v') \vdash (f, \beta', Yv')$$

POR INDUÇÃO, TEMOS $(f, \beta', Yv') \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$, O QUE IMPLICA

$$(i, w, \varepsilon) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$$

E LOGO, $w \in L(M)$. O QUE IMPLICA QUE $L(G) \subseteq L(M)$

FALTA MOSTRAR QUE $L(M) \subseteq L(G)$.

1) A SEQUÊNCIA COMEÇA COM S
2) APLICAMOS UMA REGRA À VARIÁVEL MAIS A ~~ESQ~~.
3) OBTEMOS

AUTÔMATOS DE PILHA CORDATOS

- GOSTARÍAMOS DE, DADO UM AUTÔMATO M, CONSTRUIR UMA GLC G T.Q. $L(M)=L(G)$.
- VAMOS DEFINIR UM TIPO ESPECIAL DE AUTÔMATO.

DEF: DIZEMOS QUE UM AP N É CORDATO SE

1) A ÚNICA TRANSIÇÃO DE i É $\Delta(i,\varepsilon,\varepsilon)=\{(q,\beta)\}$, ONDE $q\in Q$ E $\beta\in\Gamma$
2) N TEM APENAS UM ESTADO FINAL f
3) A PILHA SÓ FICA VAZIA EM f
4) NÃO HÁ TRANSIÇÕES DE f

DADO AP $M=(\Sigma,\Gamma,Q,q_0,F,\Delta)$, CONSTRUÍMOS AP CORDATO $N=(\Sigma',\Gamma',Q',q_0',F',\Delta')$ T.Q.

$\Sigma'=\Sigma$

$\Gamma'=\Gamma\cup\{\beta\}$ COM $\beta\notin\Gamma$

$Q'=Q\cup\{i,f\}$ COM $i,f\notin Q$

$q_0'=i$

$F'=\{f\}$

Δ' DEFINIDA POR

i	ε	ε	(q_0,β)
$q\neq i,f$	σ	$\gamma\neq\beta$	$\Delta(q,\sigma,\gamma)$
$q\neq i,f$	$\sigma\neq\varepsilon$	β	$\Delta(q,\sigma,\varepsilon)$
$q\neq i,f,\ q\notin F$	ε	β	$\Delta(q,\varepsilon,\varepsilon)$
$q\neq i,f,\ q\in F$	ε	β	$\Delta(q,\varepsilon,\varepsilon)\cup\{(f,\varepsilon)\}$

- N COLOCA β NO FUNDO DA PILHA, DEPOIS SE COMPORTA IGUAL A M. QUANDO ACABA E A PILHA ESTÁ VAZIA, PASSA PARA f E TERMINA.

A GRAMÁTICA DE UM AUTÔMATO DE PILHA

- CLARAMENTE TEMOS $T = \Sigma$.
- DEVEMOS DEFINIR AS VARIÁVEIS E REGRAS

AS VARIÁVEIS SERÃO TRIPLAS EM $Q \times \Gamma \times Q$

→ COMO TEMOS $\Delta(i, \varepsilon, \varepsilon) = \{(i', \beta)\}$, A VARIÁVEL INICIAL SERÁ $S = (i', \beta, f)$

→ PARA CADA TRANSIÇÃO $(p, u) \in \Delta(q, \sigma, \gamma)$, ONDE $u \in \Gamma^*$
CONSTRUÍMOS $n^{|u|}$ REGRAS, ONDE n É O NÚMERO DE ESTADOS.

- SE $u = \varepsilon$: $(q, \gamma, p) \to \sigma$

- SE $u = \gamma_1 \cdots \gamma_k$:

  PARA CADA TUPLA $(r_1, \dots, r_k) \in Q^k$

$$(q, \gamma, r_k) \to \sigma\, (p, \gamma_1, r_1)(r_1, \gamma_2, r_2) \cdots (r_{k-1}, \gamma_k, r_k)$$

LEMA: SEJAM p E q ESTADOS DE N. ENTÃO

$$(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) \text{ SE E SOMENTE SE } (q, X, p) \Rightarrow^* w$$

NOTE QUE, COLOCANDO $(q, X, p) = (i, \beta, f)$

TEMOS
$$\begin{aligned} &(i, w, \beta) \\ &\parallel \\ &(q, w, X) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon) = (f, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

SSE

$$S = (i, w, \beta) \Rightarrow^* w$$

PARA FINALIZAR

- VIMOS QUE A INTERSEÇÃO DE DUAS LLCs NÃO É NECESSARIAMENTE UMA LLC.
- VAMOS VER QUE $L \cap R$ E $L - R$ É LLC SE L É LLC E R É REGULAR

- A IDEIA É A MESMA USADA EM AUTÔMATOS REGULARES.
  - → NOSSO AUTÔMATO VAI SIMULAR EM PARALELO AS COMPUTAÇÕES DAS DUAS LINGUAGENS
  - → COMO O AUTÔMATO REGULAR NÃO USA A PILHA, PRECISAMOS DE APENAS UMA PILHA

- TEMOS

$$Q_\cap = Q \times Q'$$
$$q_{0\cap} = (q_0, q_0')$$
$$F_\cap = F \times F'$$
$$((p,p'), u) \in \Delta_\cap((q,q'), \sigma, \gamma) \text{ SE } (p,u) \in \Delta(q,\sigma,\gamma)$$
$$\text{E } p' = \delta'(q', \sigma)$$

- PARA MOSTRAR A DIFERENÇA, BASTA LEMBRARMOS QUE

1) $L - R = L \cap \overline{R}$; E
2) R É REGULAR SSE $\overline{R}$ É REGULAR.