

# Aula 10 Fechamento LLC (Apostila capítulo 8)

Consideramos seis operações: união, interseção, complemento, diferença, estrela e concatenação.

Vimos que LR é fechada para as seis operações. Veremos que LLC nem sempre é fechada.

Como de costume, para união, concatenação, interseção e diferença, usamos pares de linguagens definidas sobre o mesmo alfabeto.

1. **União**  $L_i = L(G_i)$ ,  $G_i = (T, V_i, S_i, R_i)$   
assuma  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Definimos  $G_0 = (T, V, S, R)$  que gera  $L_1 \cup L_2$ .

Ideia semelhante quando construímos um AFN, dados dois AFN's.

Novo símbolo inicial  $S$ , regras  $S \rightarrow S_1 | S_2$ , depois do primeiro passo de derivação, a derivação fica restuta às regras de uma das gramáticas:  
 $G_0 = (T, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 | S_2\}).$

2. Concatenação  $G_0 = (T, V, S, R_0)$  gera  $L_1 \cdot L_2$   
 Novo símbolo inicial  $S$ , regra  $S \rightarrow S_1 S_2$ .  
 $G_0 = (T, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, S, R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\})$

3. Estrela  $G_* = (T, V_*, S_*, R_*)$  gera  $L_1^*$   
 Novo símbolo inicial  $S$ , regras  $S \rightarrow S_1 S | \epsilon$   
 $G_* = (T, V_1 \cup \{S\}, S, R_1 \cup \{S \rightarrow S_1 S | \epsilon\})$

Atenção: Fechamento Diferença  $\rightarrow$  complemento  $\rightarrow$  interseção

4. Interseção. Não vale fechamento!

Exemplo  $L_1$  e  $L_2$  LLC mas  $L_1 \cap L_2$  não é.

$L_1 = \{a^n b^n c^m : m, n \geq 0\}$  e  $L_2 = \{a^m b^n c^n : m, n \geq 0\}$

$G_1 = (\{a, b, c\}, \{X, Y, Z\}, X, R_1)$

$R_1 = \{X \rightarrow YZ, Y \rightarrow aYb | \epsilon, Z \rightarrow cZ | \epsilon\}$

$R_2 = \{X \rightarrow YZ, Y \rightarrow aY | \epsilon, Z \rightarrow bZc | \epsilon\}$

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$  não LLC por bombeamento.

5. Complemento. Lei de De Morgan  $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  LLC. Suponha LLC fechada por complemento. Logo  $\overline{L_1}$  e  $\overline{L_2}$  LLC, logo  $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$  também LLC e finalmente  $L_1 \cap L_2$  LLC contraia 4.

6. Diferença. Suponha LLC e que LLC fechada por diferença.  $\overline{L} = \Sigma^* - L$ . Como  $\Sigma^*$  é regular, contraia 5.



Exemplo:

$$L_{in} = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0, \text{ e } i=j \text{ ou } j=k\}$$

Vamos concluir que  $L_{in}$  é LLC aplicando sucessivas operações de fechamento.

$$L_1 = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \text{ e } i=j\}$$

$$L_2 = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \text{ e } j=k\}$$

$$\text{Temos que } L_{in} = L_1 \cup L_2$$

Além disso,  $L_1 = L_3 \cdot c^*$  e  $L_2 = a^* L_4$ , onde

$$L_3 = \{a^i b^j : i, j \geq 0 \text{ e } i=j\}$$

$$L_4 = \{b^j c^k : j, k \geq 0 \text{ e } j=k\}$$

Resumindo numa tabela:

Linguagem	$L_3$	$L_4$	$a^*$	$c^*$
T	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$
V	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
símbolo inicial	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
R	$S_1 \rightarrow aS_1 / \epsilon$	$S_2 \rightarrow bS_2 / \epsilon$	$S_3 \rightarrow aS_3 / \epsilon$	$S_4 \rightarrow cS_4 / \epsilon$

Observe que  $a^*$  e  $c^*$  são LR e temos GR correspondentes.

Usando fechamento para concatenação de GLC 10.4

Linguagens	$L_3 \cdot c^*$	$a^* \cdot L_4$
$T$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$V$	$\{S', S_1, S_4\}$	$\{S'', S_2, S_3\}$
símbolo inicial	$S'$	$S''$
$R$	$S' \rightarrow S_1 \cdot S_4$ $S_1 \rightarrow a S_1 b \mid \epsilon$ $S_4 \rightarrow c S_4 \mid \epsilon$	$S'' \rightarrow S_3 \cdot S_2$ $S_2 \rightarrow b S_2 c \mid \epsilon$ $S_3 \rightarrow a S_3 \mid \epsilon$

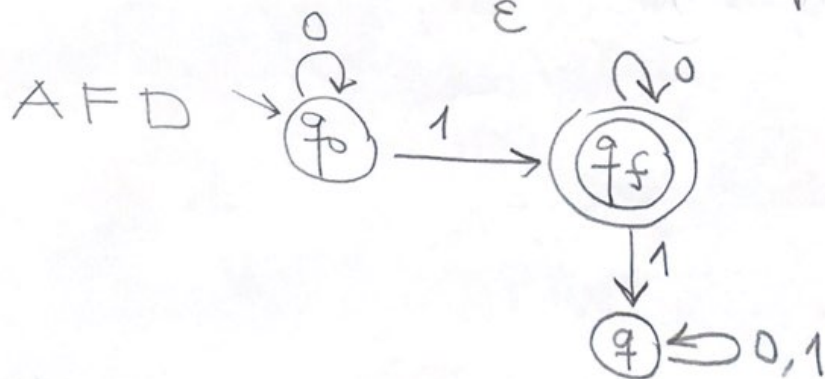
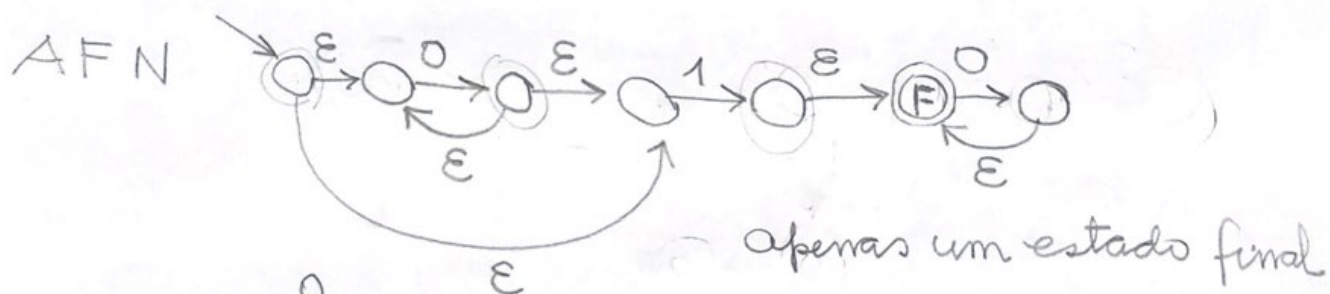
Usando fechamento para união de GLC  
 $T = \{a, b, c\}$ ,  $V = \{S, S', S'', S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ,  
 símbolo inicial  $S$ .

$R = \{S \rightarrow S', S \rightarrow S'', S' \rightarrow S_1 \cdot S_4, S'' \rightarrow S_3 \cdot S_2,$   
 $S_1 \rightarrow a S_1 b \mid \epsilon, S_2 \rightarrow b S_2 c \mid \epsilon,$   
 $S_4 \rightarrow c S_4 \mid \epsilon, S_3 \rightarrow a S_3 \mid \epsilon\}$

Voltando aos exemplos da página 9.4  
 $T = \{0, 1\}$ ,  $V = \{S, X\}$ , símbolo inicial  $S$ , e  
 $R = \{S \rightarrow X1X, X \rightarrow 0X / \epsilon\}$ .

$$L = \{0^n 1 0^m : n, m \geq 0\} = 0^* 1 0^*$$

Uma LLC gerou a linguagem LLC  $L$   
 que é uma LR gerada por uma ER.



GR  $T = \{0, 1\}$ ,  $V = \{q_0, q_f, q\}$ ,  $S = q_0$   
 $R = \{q_0 \rightarrow 0q_0 / 1q_f, q_f \rightarrow 0q_f / 1q, q \rightarrow 0q / 1q, q_f \rightarrow \epsilon\}$