Aulas 3 e 4

Aula 3 - Não determinismo (Apostila Capítulo 4)

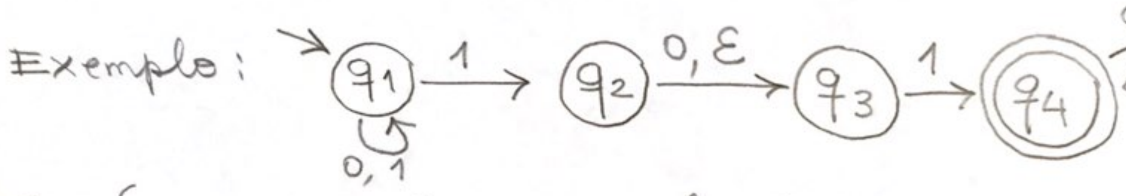
Um autômato finito não determinístico (AFN) é uma 5-upla
$$N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F),$$ onde

Q é o conjunto finito de estados, Σ é o alfabeto finito

$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q)$ é a função de transição,

$q_0 \in Q$ é o estado inicial, $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Exemplo:



$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, q_1 é o estado inicial, $F = \{q_4\}$

Δ	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$

$L(N_1) =$

$\{w \mid w$ possui pelo menos dois 1's e existe entre algum par de 1's no máximo um 0$\}$

AFD é caso particular de AFN, onde
$$\Delta(q, \varepsilon) = \emptyset \text{ e } \Delta(q, a) = \{\delta(q, a)\}, \forall q \in Q.$$

N aceita cadeia w, com $|w| = \ell$, se podemos escrever:
$w = y_1 y_2 \cdots y_m$, onde cada $y_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
e existe sequência de estados $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$
tq $r_0 = q_0$; $r_{i+1} \in \Delta(r_i, y_{i+1})$; e $r_m \in F$

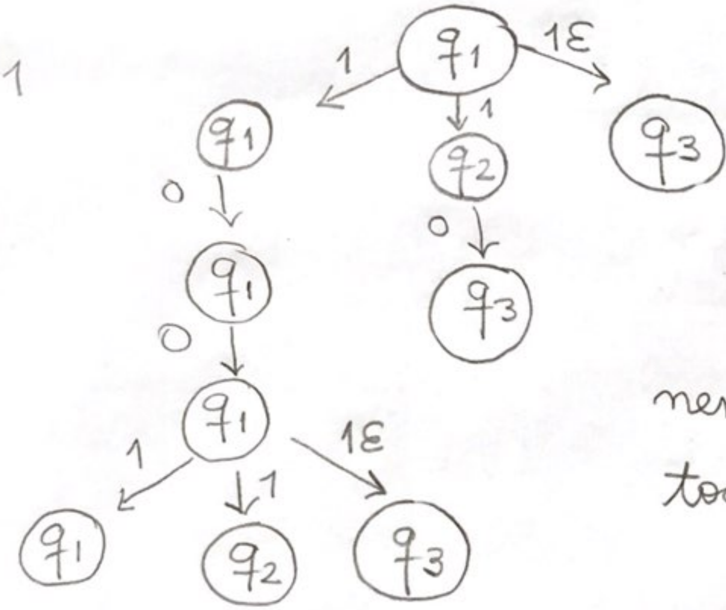
N_1 aceita 1011: $(q_1, 1011) \vdash (q_2, 011) \vdash (q_3, 11) \vdash (q_4, 1) \vdash (q_4, \varepsilon)$

Uma palavra aceita por um AFN, pode admitir mais de uma computação.

N_1 aceita 1011: $(q_1, 1011) \vdash (q_1, 011) \vdash (q_1, 11) \vdash (q_2, 1) \vdash (q_3, 1) \vdash (q_4, \varepsilon)$

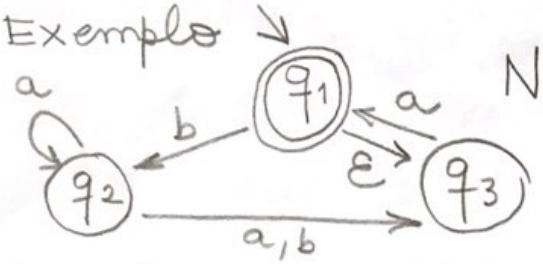
N_1 não aceita 1001: nenhuma sequência de estados usando Δ leva a estado de F.

1001



algumas computações nem consomem toda a palavra.

Exemplo



N_2

Δ	a	b	ε
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_2 q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

N_2 aceita: $w = a^l$, $l \geq 0$; ba^l, $l > 1$; ba^lba

N_2 não lê $w = bbb$ completamente, logo não a aceita

Sobre a cadeia vazia ε

Para AFD M: $q_0 \in F \Leftrightarrow \varepsilon \in L(M)$

Para AFN N: $q_0 \in F \Rightarrow \varepsilon \in L(N)$

Todo AFN admite um AFD equivalente, através da construção de subconjuntos

Seja $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$, construa $M = (Q^d, \Sigma, \delta^d, q_0^d, F^d)$ determinístico.

A definição chave é o alcance de estado:

$E(q) = \{$estados alcançáveis a partir de q a partir de zero ou mais transições $\varepsilon\} = \{p \in Q : (q, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon)\}$

$E(R) = \bigcup_{p \in R} E(p)$, estendo definição para conjunto

Voltemos à construção de M:

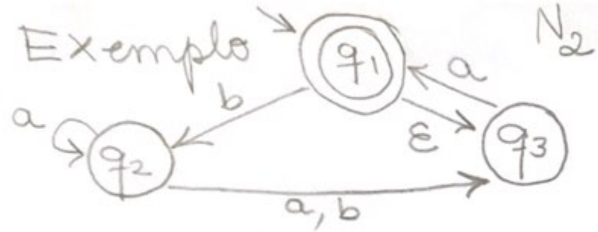
$Q^d = \mathcal{P}(Q)$, conjunto das partes de Q

$q_0^d = E(q_0)$, $F^d = \{R \in Q^d \mid R \cap F \neq \emptyset\}$

$\delta^d(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\Delta(r, a))$, $R \in Q^d$, ie, $R \subseteq Q$

Na verdade, ao construirmos M a partir de N, o conjunto Q^d contém apenas os subconjuntos de Q por demanda a partir de $E(q_0)$.

Exemplo



Δ	a	b	ε
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Construção de M determinístico a partir de N_2

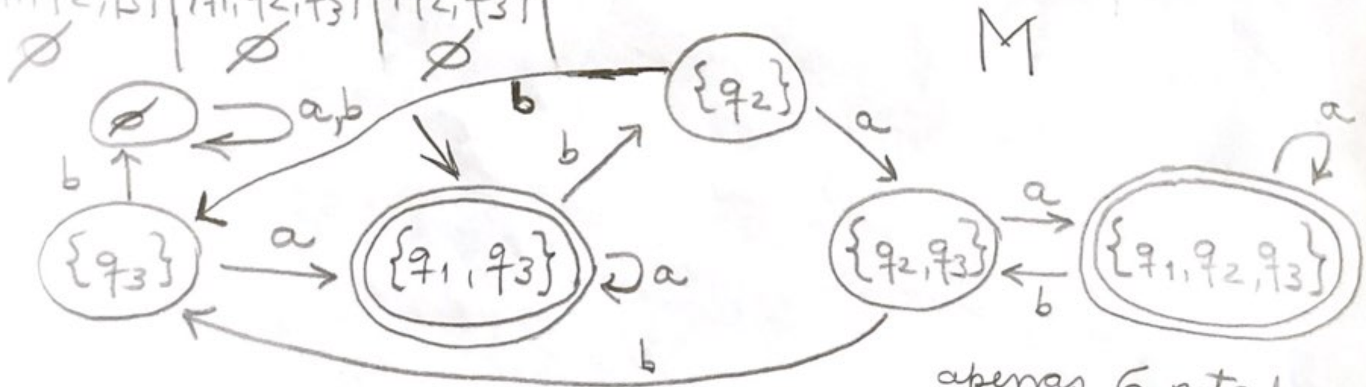
Q^d tem no máximo 8 estados, por demanda,

$q_0^d = E(q_1) = \{q_1, q_3\}$, organizamos a tabela:

δ^d	a	b
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\delta^d(\{q_1, q_3\}, a) = E(\Delta(q_1, a)) \cup E(\Delta(q_3, a)) =$
$= E(\emptyset) \cup E(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\}$

$\delta^d(\{q_1, q_3\}, b) = E(\Delta(q_1, b)) \cup E(\Delta(q_3, b)) =$
$= E(\{q_2\}) \cup E(\emptyset) = \{q_2\}$



apenas 6 estados
por demanda

Comparar a computação em N_2 e em M:

em N_2: $(q_1, aaa) \vdash (q_3, aaa) \vdash (q_1, aa) \vdash (q_3, aa) \vdash (q_1, a) \vdash (q_3, a)$
$\vdash (q_1, \varepsilon)$

em M: $(\{q_1, q_3\}, aaa) \vdash (\{q_1, q_3\}, aa) \vdash (\{q_1, q_3\}, a) \vdash (\{q_1, q_3\}, \varepsilon)$

Aula 4 - Fecho (Apostila Capítulo 5)

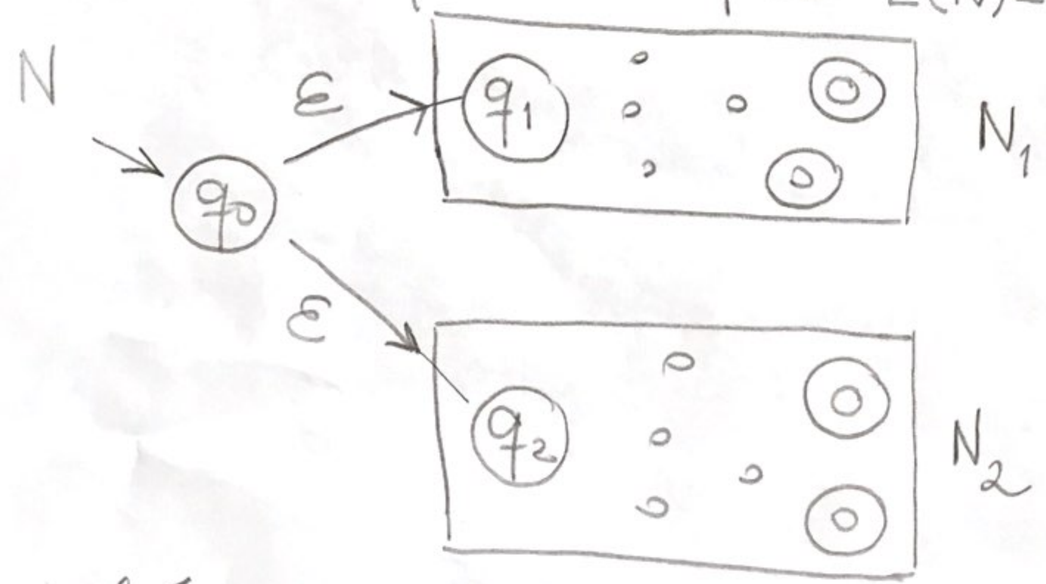
a classe das linguagens regulares é fechada por união, interseção, complemento, diferença, concatenação e estrela.

Quando estudamos AFD, primeiro vimos complemento, depois através de produto cartesiano, vimos união e interseção, a identidade $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ dá a diferença.

Veremos a conveniência do não determinismo para simplificar construções.

Simplifica união:

Sejam N_1 e N_2 dois AFN's,
construa N que satisfaz $L(N) = L(N_1) \cup L(N_2)$



incluímos um estado auxiliar q_0 e transições ε em paralelo

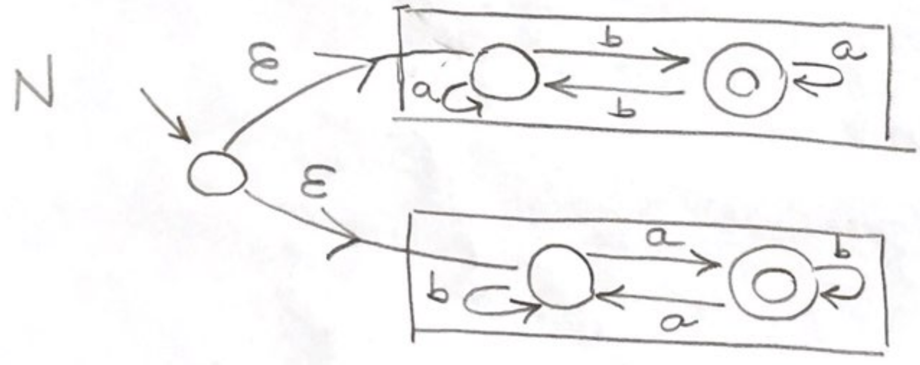
Sejam $N_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, q_i, F_i)$ AFN que reconhece A_i

Então $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ é AFN que reconhece $A_1 \cup A_2$, onde $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$, mesmo alfabeto Σ, q_0 é o estado inicial de N, $F = F_1 \cup F_2$ é o conjunto dos estados finais de N, e

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \Delta_1(q,a), & q \in Q_1 \\ \Delta_2(q,a), & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\}, & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset, & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

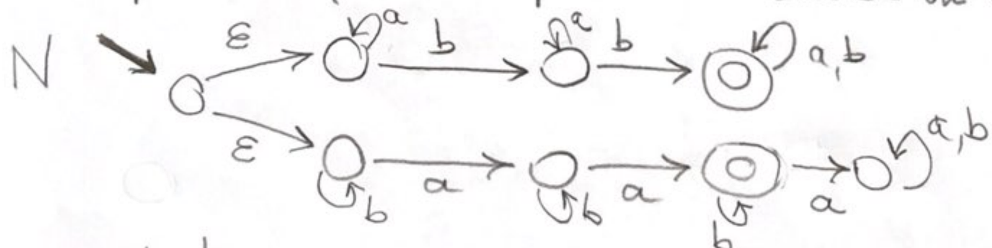
$q \in Q$,
$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Exemplo: $A = \{w \mid w$ contém # ímpar de b's ou # ímpar de a's $\}$



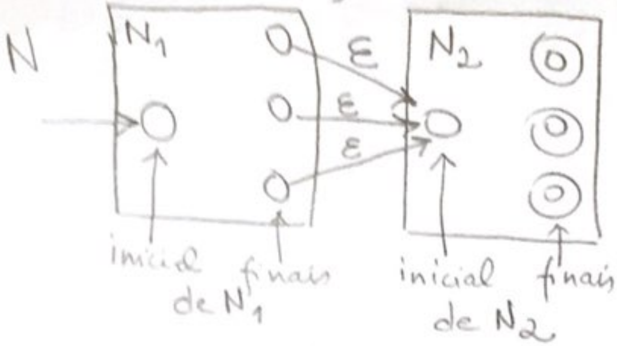
Compare com a construção em AFD usando produto Cartesiano.

Exemplo: $A = \{w \mid w$ tem pelo menos dois b's ou exatamente dois a's$\}$



Para interseção, precisa fazer o AFD equivalente.

Concatenação



Casos degenerados

$A_2 = \phi$ ○ $F_2 = \phi$

$A_2 = \{\varepsilon\}$ ◎ $F_2 = \{q_0\}$

atenção, na concatenação

$L_1 L_2 = \{w_1 \cdot w_2 : w_1 \in L_1 \text{ e } w_2 \in L_2\}$

$\{\varepsilon\} \cdot L = L \cdot \{\varepsilon\} = L \quad \phi \cdot L = L \cdot \phi = \phi$

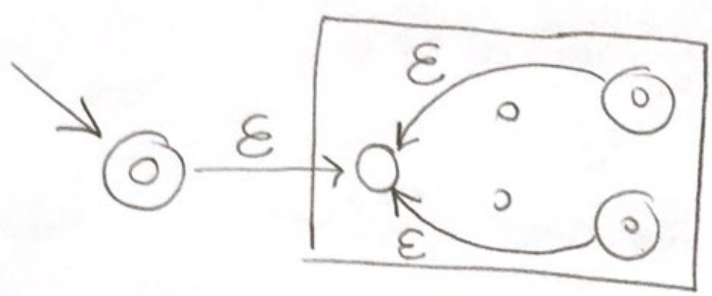
Se $N_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, q_i, F_i)$ reconhece A_i,

então $N = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Delta, q_1, F_2)$ reconhece $A_1 \cdot A_2$

onde

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \Delta_1(q,a), & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \Delta_1(q,a), & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \Delta_1(q,a) \cup \{q_2\}, & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \Delta_2(q,a), & q \in Q_2 \end{cases}$$

Estrela



aqui há necessidade de estado auxiliar novo

e de novas transições ε

veja apostila, página 70.