Aulas 5 e 6

Aula 5 Expressões Regulares (Apostila Capítulo 2)

Definimos uma linguagem regular L como um subconjunto de Σ^* tal que $L = L(M)$ para algum AFD M,

L é reconhecida por M.

Na verdade, como vimos, podemos usar um AFN N.

Vamos usar operações regulares para definir expressões regulares e gerar linguagens regulares.

A definição de expressão regular no alfabeto Σ é uma definição recursiva.

Considere $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, \cup, \cdot, *, (,)\}$.

construção indutiva ↑

definição recursiva ↓

Uma expressão regular é uma palavra de $(\tilde{\Sigma})^*$ que pode ser construída por <u>indução</u> a partir das seguintes regras:

1. $\emptyset$, ε e σ, onde $\sigma \in \Sigma$, são expressões regulares;
2. se r_1 e r_2 são expressões regulares, então $(r_1 \cup r_2)$ e $(r_1 \cdot r_2)$ também são expressões regulares;
3. se r é expressão regular, então $(r)^*$ também é expressão regular.

Observações: Frequentemente, omitimos o ponto de concatenação.

O operador $*$ tem precedência sobre o operador $\cdot$ e

o operador $\cdot$ tem precedência sobre o operador $\cup$, o que permite a omissão de parêntesis, sempre que possível.

Seja $L(r)$ a linguagem <u>gerada</u> pela expressão regular r.
Usamos a definição <u>recursiva</u> para descrever $L(r)$:

1. $L(\sigma) = \{\sigma\}$, $\sigma \in \Sigma$;
2. $L(\emptyset) = \emptyset$; 3. $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$;
4. $L(r_1 \cup r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$;
5. $L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1) \cdot L(r_2)$;
6. $L(r^*) = (L(r))^*$.

Para os exemplos de expressões regulares sobre o alfabeto binário $\Sigma = \{0,1\}$,

Σ abrevia a expressão regular $0 \cup 1$,

r^+ abrevia $r \cdot r^*$, logo $r^+ \cup \varepsilon = r^*$.

$L(r)$ é a linguagem da expressão regular r, muitas vezes por abuso de notação usamos r como $L(r)$.

Exemplos $\Sigma = \{0,1\}$

1. $0^*10^* = \{w \mid w$ contém um único $1\}$
2. $\Sigma^* 1 \Sigma^* = \{w \mid w$ contém pelo menos um $1\}$
3. $\Sigma^* 001 \Sigma^* = \{w \mid w$ contém 001 como subcadeia$\}$
4. $1^*(01^+)^* = \{w \mid$ todo 0 em w é seguido por pelo menos um $1\}$
5. $(\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid w$ é cadeia de comprimento par$\}$
6. $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w \mid w$ é cadeia de comprimento múltiplo de $3\}$
7. $01 \cup 10 = \{01, 10\}$

Observe a omissão de parêntesis, de acordo com precedências.

8. $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 =$
$\{w \mid w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$

9. $(0 \cup \varepsilon)1^* = 01^* \cup 1^*$ contém ε
compare com
$(0 \cup \Sigma)1^* = 01^* \cup 1^+$ não contém ε

10. $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon) = \{\varepsilon, 0, 1, 01\}$

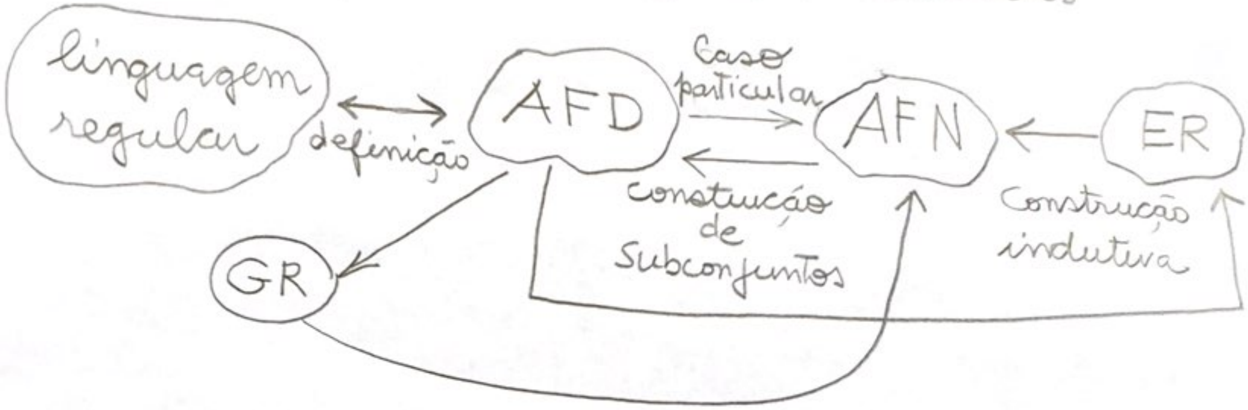
11. $1^*\emptyset = \emptyset$

Veja Aula 1, página 1.4
$L^0 = \{\varepsilon\}$; $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$; $\{\varepsilon\} \circ L = L \circ \{\varepsilon\} = L$; $\emptyset \circ L = L \cdot \emptyset = \emptyset$

12. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$

identidades: $r \cup \emptyset = r$; $r \bullet \varepsilon = r$ absorve
$r \cup \varepsilon$ depende: $r \cup \varepsilon = r \Leftrightarrow r$ contém ε
$r \bullet \emptyset$ depende: $r \bullet \emptyset = r \Leftrightarrow r = \emptyset$

Equivalência com Autômatos



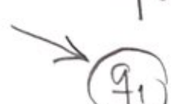
$ER \longrightarrow AFN$

Dada uma expressão regular r, constua o AFN A tal que $L(r) = L(A)$.

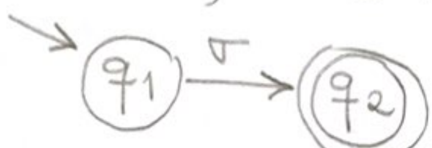
Constucção por <u>indução</u> na estrutura de r ↑

se $r = \varepsilon$, tome $A = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ tq
$Q = \{q_1\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_1\}$ e
$\Delta(q_1, \sigma) = \phi$, $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

se $r = \phi$, modifique acima $F = \phi$



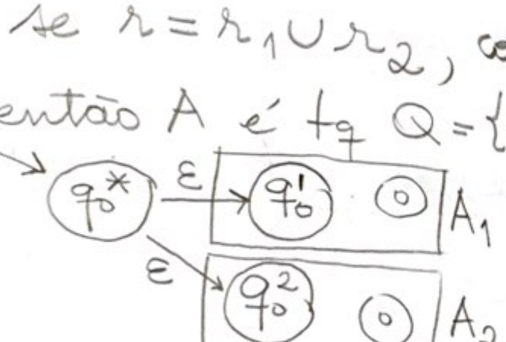
se $r = \sigma$, onde $\sigma \in \Sigma$, tome 5.7



$Q = \{q_1, q_2\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_2\}$
$\Delta(q_1, \sigma) = \{q_2\}$
$\Delta(q_1, \alpha) = \varnothing$, $\alpha \neq \sigma$, $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
$\Delta(q_2, \gamma) = \varnothing$, $\gamma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

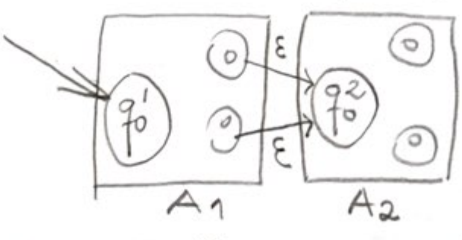
Para união, concatenação e estrela, usamos fechamento para AFN:

se $r = r_1 \cup r_2$, considere $A_i = (Q_i, \Sigma, \Delta_i, q_0^i, F_i)$ para r_i, então A é tq $Q = \{q_0^*\} \cup Q_1 \cup Q_2$, $q_0 = q_0^*$, $F = F_1 \cup F_2$, e



$\Delta(q, \sigma) = \Delta_i(q_i, \sigma)$, se $q_i \in Q_i$
$\Delta(q_0^*, \varepsilon) = \{q_0^1, q_0^2\}$
$\Delta(q_0^*, \sigma) = \varnothing$, para $\sigma \in \Sigma$.

se $r = r_1 r_2$, considere A_i para r_i, então A é tq $Q = Q_1 \cup Q_2$, $q_0 = q_0^1$, $F = F_2$ e



$\Delta(q, \sigma) = \Delta_1(q, \sigma)$, se $(q \in Q_1$ e $q \notin F_1)$ ou se $(q \in F_1$ e $\sigma \neq \varepsilon)$
$\Delta(q, \varepsilon) = \Delta_1(q, \varepsilon) \cup \{q_0^2\}$, se $q \in F_1$
$\Delta(q, \sigma) = \Delta_2(q, \sigma)$, se $q \in Q_2$

se $r = r_1^*$ considere A_1 para r_1 e construa A tq $Q = Q_1 \cup \{q_0^*\}$, $q_0 = q_0^*$, $F = F_1 \cup \{q_0^*\}$, e

$\Delta(q_0^*, \varepsilon) = \{q_0^1\}$, $\Delta(q_0^*, \sigma) = \varnothing$, $\sigma \in \Sigma$
$\Delta(q, \sigma) = \Delta_1(q, \sigma)$, $q \in Q_1$ e $q \notin F_1$ ou $q \in F_1$ e $\sigma \neq \varepsilon$
$\Delta(q, \varepsilon) = \Delta_1(q, \varepsilon) \cup \{q_0^1\}$, se $q \in F_1$.

Aula 6 Bombeamento para Linguagens Regulares (Apostila Capítulo 6)

Existem linguagens que não pertencem à classe das linguagens regulares. O lema do bombeamento estabelece uma condição necessária para uma linguagem ser regular, e é usado para provar que algumas linguagens não são regulares.

A ideia é: se A é regular, então A é reconhecida por algum AFD. Digamos que $|Q| = n$ e que existe uma palavra $w \in A$ com $|w| \geq n$. Logo a computação de w pelo AFD é

$(q_0, w) \vdash^* (q_{|w|}, \varepsilon)$, com $q_{|w|} \in F$.

Como $|Q| = n$, existem i, j com $q_i = q_j$ na sequencia $q_0, q_1, \ldots, q_{|w|}$ e existe um ciclo no autômato, e se repetirmos a subpalavra de w que leva q_i a q_j, um número arbitrário, inclusive zero, de vezes, obtemos palavra em A.

Lema do Bombeamento: Se L é linguagem regular, então existe um inteiro positivo p tq para toda palavra $w \in L$, com $|w| \geq p$, existe decomposição $w = xyz$ tq (1) $|xy| \leq p$, (2) $|y| > 0$, (3) $xy^iz \in L$ para todo $i \geq 0$.

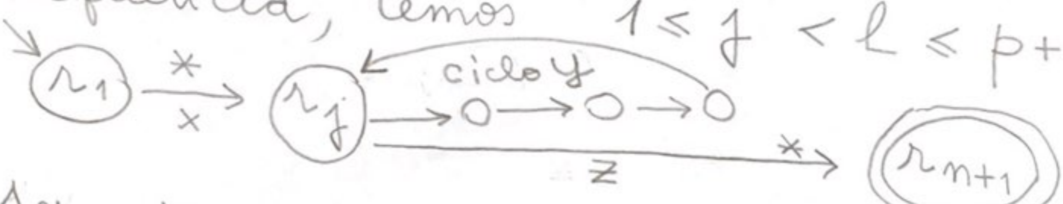
observação: Toda L finita é regular e $p = \max_{w \in L} |w| + 1$ funciona por vacuidade.

observação: Sem a condição (2) o lema é trivialmente verdade com $y = \varepsilon$.

prova: seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 6.3
um AFD que reconhece L e seja $p = |Q|$.
Seja $s = s_1 s_2 \dots s_n$ palavra de L
com $|s| = n \geq p$. seja $r_1 r_2 \cdots r_{n+1}$ a sequência
de estados para M computar s, temos
$r_1 = q_0$, $r_{n+1} \in F$ e $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Como a sequência tem
mais que p estados,
há repetição.

Seja r_j, r_ℓ o primeiro par de estados iguais,
como r_ℓ ocorreu nas primeiras $p+1$ posições da
sequência, temos $1 \leq j < \ell \leq p+1$.



Sejam $x = s_1 s_2 \cdots s_{j-1}$, $y = s_j s_{j+1} \cdots s_{\ell-1}$, $z = s_\ell s_{\ell+1} \cdots s_n$.
Logo x leva M de r_1 a r_j, y de r_j a $r_j = r_\ell$,
z de r_ℓ a r_{n+1}. Logo M aceita xy^iz, para todo $i \geq 0$
condição (3). Além disso, $j \neq \ell$ implica $|y| > 0$, Condição (2)
E $\ell \leq p+1$ implica $\ell - 1 \leq p$, e $|xy| = \ell - 1 \leq p$,
Condição (1). Todas as três condições para
a decomposição $s = xyz$ são satisfeitas.
∎

Aplicar o Lema do Bombeamento para 6.4
$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Suponha por contradição que L é regular.
Logo, pelo Lema do Bombeamento,
existe um inteiro positivo p tq
para toda palavra $w \in L$ com $|w| \geq p$
existe uma decomposição $w = xyz$ tq
(1) $|xy| \leq p$ (2) $|y| > 0$ (3) $xy^i z \in L$ para todo $i \geq 0$.
Temos uma condição necessária do tipo $\exists \forall \exists \forall$.
Provaremos para L a negação: $\forall \exists \forall \exists$

$\forall p \; \exists w \; \forall$ decomposição $w = xyz$ $\exists i$ $xy^i z \notin L$ *
não bombeado

Seja $w = 0^p 1^p$ a palavra w é escolhida em função de p arbitrário
Qualquer decomposição $w = xyz$ satisfaz (1), (2), e (3).
(1) $x = 0^l$, $y = 0^m$, $z = 0^{p-l-m} 1^p$ (2) $m > 0$,
(3) bombeando $xy^i z = 0^l 0^{mi} 0^{p-l-m} 1^p = 0^{p+m(i-1)} 1^p$
se $xy^i z \in L$, então $p + m(i-1) = p$, logo $m(i-1) = 0$.
Como $m \neq 0$, temos $i - 1 = 0$ e $i = 1$. Só bombeamos $i = 1$, não bombeamos outra potência.

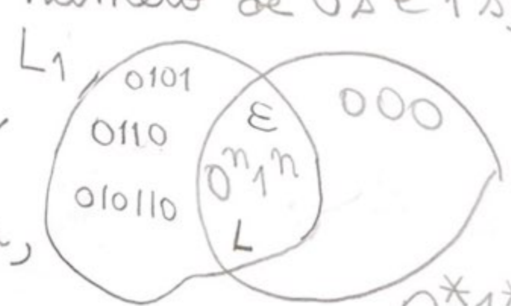
Estabelecendo * para L, provamos que L não satisfaz a condição necessária.

6.5

Considere agora uma linguagem que possivelmente satisfaz o Lema do Bombeamento mas que não é regular por fechamento.

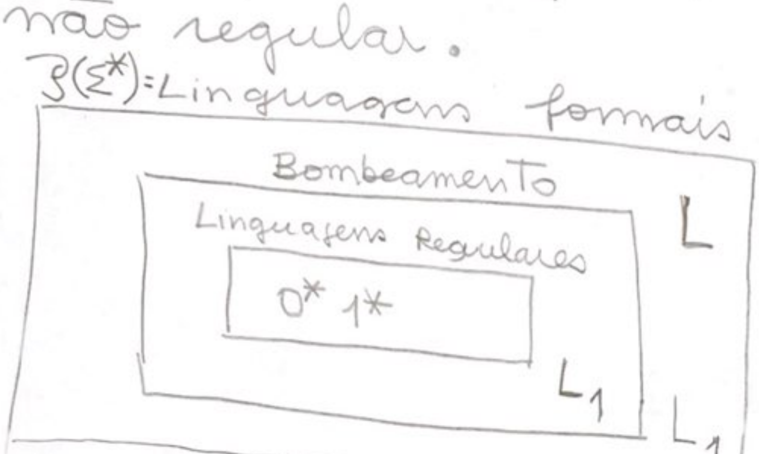
$L_1 = \{w \mid w$ contém o mesmo número de 0's e 1's$\}$.

Considere o diagrama



$L = L_1 \cap 0^*1^*$ não é regular, mas 0^*1^* é regular.

Pelo fechamento em linguagens regulares para interseção, temos: se L_1 é regular, então L é regular, uma contradição que prova L_1 não regular.



Em que região do diagrama está a linguagem L_1?

Exemplo 6.8 da apostila: linguagem não regular que satisfaz o Lema do Bombeamento.

6.6

Provar que $L = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é regular.

1ª tentativa $w = 0^p 0^p \in L$, qualquer $w = xyz$,

(1) $x = 0^l$, $y = 0^m$, $z = 0^{2p-l-m}$ (2) $m > 0$,

(3) bombeando $xy^iz = 0^l 0^{mi} 0^{2p-l-m} = 0^{2p+m(i-1)}$

se $xy^iz \in L$, então $0^{2p+m(i-1)} = 0^k 0^k$, logo

$2p + m(i-1) = 2k$, logo $m(i-1) = 2(k-p)$

não existe contradição se m é par.

Precisamos: toda xyz tem $xy^iz \notin L$.

Para xyz com m par, conseguimos bombear todo i.

2ª tentativa $w = 0^p 1 0^p 1 \in L$, qualquer $w = xyz$,

(1) $x = 0^l$, $y = 0^m$, $z = 0^{p-l-m} 1 0^p 1$, (2) $m > 0$,

(3) bombeando $xy^iz = 0^l 0^{mi} 0^{p-l-m} 1 0^p 1 = 0^{p+m(i-1)} 1 0^p 1$

se $xy^iz \in L$, então $0^{p+m(i-1)} 1 0^p 1 = ss$. Logo, s começa com 0 e termina com 1.

Preciso partir aqui

Logo $p + m(i-1) = p$, e $m(i-1) = 0$, e como $m \neq 0$, temos $i = 1$, e só bombeamos $i = 1$, não bombeamos outra potência.

. .

6.7

Provar que $L = \{ 0^j 1^k \mid j > k \}$ não é regular.

Seja $\omega = 0^{p+1} 1^p \in L$, qualquer $\omega = xyz$ satisfaz

(1) $x = 0^{\ell}$, $y = 0^m$, $z = 0^{p+1-\ell-m} 1^p$, (2) $m > 0$,

(3) bombeando $xy^i z = 0^{\ell} 0^{mi} 0^{p+1-\ell-m} 1^p =$

$= 0^{p+1+m(i-1)} 1^p$

se $xy^i z \in L$, então $p+1+m(i-1) > p$, logo

$1 + m(i-1) > 0$.

se $i = 0$, então $1 - m > 0$ implica $1 > m$,

e contradiz (2).

Observe que só não bombeamos uma potência,

só não bombeamos para trás $i = 0$,

porque $0^p 1^p \notin L$.

Observe que para os outros valores de i,

temos $i > 0$ e $1 + m(i-1) > 0$, conseguimos

bombear.