Aula 9 Gramática Livre de Contexto
(Apostila Capítulo 8)

Uma gramática livre de contexto GLC é uma gramática $G = (T, V, S, R)$ onde todas as regras são da forma $X \to v$, onde $X \in V$ e $v \in (T \cup V)^*$

Compare com a definição para GR, onde uma regra de R é do tipo (1) $X \to aY$, (2) $X \to a$, ou (3) $X \to \varepsilon$, onde $X, Y \in V$ e $a \in T$. Gramática linear à direita.

Uma GR é um caso particular de uma GLC. Mantivemos a restrição do lado esquerdo, constituído de uma variável, mas na GLC não há restrição do lado direito, qualquer palavra em terminais e variáveis é permitida. A substituição numa GLC não depende do contexto.

Exemplo: $G = (T, V, S, R)$ $T = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, o símbolo inicial é S, e $R = \{S \to 0S1, S \to \varepsilon\}$. G é uma GLC que não é uma GR.

Uma linguagem livre de contexto LLC é uma linguagem que pode ser gerada por uma GLC.

Derivação em um passo numa GLC é $u \Rightarrow v$ onde (1) $u = sXt$, com $s, t \in (T \cup V)^*$ e $X \in V$; (2) $v = szt$ com $szt \in (T \cup V)^*$; e (3) $X \to z \in R$.

Uma derivação é uma sequência de uma ou mais derivações em um passo, notação $\Rightarrow^+$ 9.2

$L(G) = \{ w \in T^* :$ existe derivação $S \Rightarrow^+ w$ em $G \}$

L é LLC se existe G uma GLC tal que $L = L(G)$.

Qual é a $L(G)$ para o exemplo?

Provaremos por indução no número n de passos de derivação: se $S \Rightarrow^n w$ em G e $w \notin T^*$, então $w = 0^n S 1^n$.

base $n = 1$ $\quad S \Rightarrow w$ derivada em um passo e $w \notin T^*$, então $w = 0S1$.

Suponha para $k \geq 1$ que $S \Rightarrow^k w$ em G e $w \notin T^*$ implica $w = 0^k S 1^k$.

Então $S \Rightarrow^{k+1} w$ em G em k+1 passos

$$\underbrace{S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow}_{k \text{ passos}} \underbrace{0^k S 1^k}_{HI} \Rightarrow \underbrace{0^{k+1} S 1^{k+1}}_{w \notin T^*}$$

Por outro lado, como a única regra em G que permite eliminar a variável S é $S \to \varepsilon$, então toda palavra w derivada em G, $S \Rightarrow^* w$ é da forma $w = 0^n 1^n$ para algum $n \geq 0$.

Conclusão: $L(G) = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ é uma LLC.

Será que a linguagem pode ser gerada por uma GR?

Não, porque usamos o bombeamento para provar que não é regular.

Numa GR, as derivações têm um padrão bem particular, e não tenho escolha de qual variável será substituída.

Numa GLC, posso ter escolha.

Exemplo $T=\{a,b,c\}$, $V=\{X,Y,Z\}$, $S=X$,
$R=\{X\to aYb, X\to bbY, Y\to ZcX, Y\to ca, Z\to ZaaZ, Z\to\varepsilon\}$

Derivação: $X \Rightarrow aYb \Rightarrow aZcXb \Rightarrow$ escolho variável para substituir.

Já vimos exemplo de gramática GLC que não é GR, tal que a linguagem LLC gerada não é LR.

Exemplo: $T=\{a,b,c\}$, $V=\{S,X,Y\}$, símbolo inicial S,
$R=\{S\to abc \mid aXbc,\ Xb\to bX,\ Xc\to Ybc^2,\ bY\to Yb,\ aY\to a^2 \mid a^2X\}$

Derivação: $S \Rightarrow a\underline{Xb}c \Rightarrow ab\underline{Xc} \Rightarrow abYbc^2 \Rightarrow \underline{aY}b^2c^2 \Rightarrow a^2b^2c^2$

Podemos derivar qualquer $a^nb^nc^n$, $n\geq 1$.

$S \Rightarrow a\boxed{Xb}c \Rightarrow ab\boxed{Xc} \Rightarrow a\boxed{bY}bc^2 \Rightarrow \boxed{aY}b^2c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2\boxed{Xb^2}c^2 \Rightarrow a^2b\boxed{Xb}c^2 \Rightarrow a^2b^2\boxed{Xc}^2 \Rightarrow a^2b^2Ybc^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2bYb^2c^3 \Rightarrow a^2Yb^3c^3 \Rightarrow a^3b^3c^3$

Mostraremos, através do Bombeamento para LLC que a linguagem $\{a^nb^nc^n \mid n\geq 1\}$ não é LLC, não pode ser gerada por uma GLC.

Exemplo: $T=\{0,1\}$, $V=\{S,X\}$, símbolo inicial S, e
$R=\{\, S \to X1X,\ X \to 0X \mid \epsilon \,\}$
É uma GLC que não é GR.
Derivação: $S \Rightarrow \underline{X}1X \Rightarrow 0\underline{X}1X \Rightarrow 0^2X1\underline{X} \Rightarrow 0^2X1 \Rightarrow 0^21$
outra: $S \Rightarrow X1\underline{X} \Rightarrow \underline{X}10X \Rightarrow 0X10\underline{X} \Rightarrow 0\underline{X}10^2X \Rightarrow 010^2X \Rightarrow 010^2$

suponha $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, onde $w \in (T \cup S)^*$ foi derivada.
Em w temos exatamente um 1, e no máximo duas ocorrências da variável X, sendo uma de cada lado do 1. Portanto w pode ser:
0^nX10^mX ou 0^n10^mX ou 0^nX10^m ou 0^n10^m,
e concluímos que se $w \in T^*$ e $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, então
$w = 0^n10^m$, para $n, m \geq 0$.
A linguagem gerada é $L = \{0^n10^m : n, m \geq 0\}$
Na verdade a linguagem L é regular gerada pela expressão regular 0^*10^*.

Exemplo: Um palíndromo é uma palavra cujo reflexo é igual a ela própria, isto é w é um palíndromo sse $w^R = w$.
Veja: Lista 2, exercício 7(iv), e também Apostila exemplo 8.14 onde há um erro.