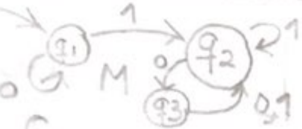
Gabarito P1 | Questão 1 | Começo com o diagrama de estados, sem destacar os estados finais!



(a) $F = \{q_1\}$. $L(M) = 0^*$ Expressão Regular

Como q_1 é estado inicial e final, temos $\varepsilon \in L(M)$.
Como $\delta(q_1, 0) = q_1$, temos $0^+ \in L(M)$, logo $0^* \subseteq L(M)$.
Por outro lado, seja $w \in L(M)$, então $(q_1, w) \vdash^* (q_1, \varepsilon)$.
Como $\delta^{-1}(q_1) = \{(q_1, 0)\}$, então 0 é a única letra que ocorre em w, logo $L(M) \subseteq 0^*$.
Conclusão $L(M)$ é a linguagem das palavras que não têm ocorrência da letra 1.
Uma gramática $G_a = (T, V, S, R_a)$ obtida de M tem
$T = \{0,1\}$, $V = \{q_1, q_2, q_3\}$, $S = q_1$, $R_a = \{q_1 \to 0q_1 | 1q_2 | \varepsilon\}$
$q_2 \to 0q_3 | 1q_2$, $q_3 \to 0q_2 | 1q_2\}$
Porém uma gramática mais simples também gera:
$T = \{0\}$, $V = \{q_1\}$, $S = q_1$, $R = \{q_1 \to 0q_1 | \varepsilon\}$.

(b) $F = \{q_3\}$ $L(M)$ é a linguagem das palavras que têm alguma letra 1 e que após a última ocorrência de 1 têm um número ímpar de zeros.
$L(M) = \Sigma^* 1 (00)^* 0$ Expressão Regular.
Se $w \in \Sigma^*$ possui algum 1 e após o último 1 possui um número ímpar de zeros, então a computação de w em M aceita w: $(q_1, w) \vdash^* (q_3, \varepsilon)$
Por outro lado se M aceita w, então w tem letra 1 para que a computação de w saia de q_1, como toda ocorrência de 1 leva a q_2, w tem algum zero, e como $\delta^{-1}(q_3) = \{(q_2, 0)\}$, w tem um número ímpar de zeros após último 1.

Convertendo o M em $G_b = (T, V, S, R_b)$ temos $T = \{0,1\}$, $V = \{q_1, q_2, q_3\}$, $S = q_1$, $R_b = \{q_1 \to 0q_1 | 1q_2,$ $q_2 \to 0q_3 | 1q_2,$ $q_3 \to 0q_2 | 1q_2 | \varepsilon\}$.

(C) $F = \{q_1, q_3\}$ $L(M)$ é a união das duas anteriores, isto é, é a linguagem das palavras que não tem letra 1 ou tem um número ímpar de zeros que seguem o último 1.

Temos a união porque o conjunto de estados finais é a união dos conjuntos de estados finais anteriores, e o restante de cada autômato é o mesmo nos três itens (a), (b) e (c).

Logo a expressão regular é

$$0^* \cup (\Sigma^* . 1 . (00)^* . 0)$$

$$= 0^* \cup \Sigma^* . 1 . (00)^* . 0$$

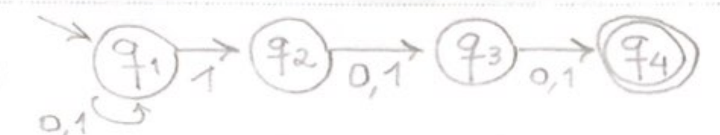
a gramática $G_c = (T, V, S, R)$ pode ser obtida de G_a e G_b por fechamento, onde $V = \{q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3', S\}$

$R = R_a \cup R_b \cup \{S \to q_1 | q_1'\}$.

Ou pode ser obtida diretamente de M:

$V = \{q_1, q_2, q_3\}$, $S = q_1$, $R = \{q_1 \to 0q_1 | 1q_2 | \varepsilon,$ $q_2 \to 0q_3 | 1q_2,$ $q_3 \to 0q_2 | 1q_2 | \varepsilon\}$.

$\boxed{\text{Questão 2}}$



N

$A = L(N) = \{w \mid w$ contém letra 1 na terceira posição a partir do final$\}$

AFN N permanece em q_1 até adivinhar que está a 3 posições do final da palavra w dada como entrada.

$A = L(N) = \{$palavras de comprimento pelo menos 3 e cuja antepenúltima letra é $1\}$

De fato, dada uma palavra da forma descrita

$$w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n 1 \sigma_{n+1} \sigma_{n+2}, \quad \text{com } n \in \{0, 1, 2, \cdots\},$$

temos a seguinte computação em N

$$(q_1, w) \vdash^{*} (q_1, 1\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}) \vdash (q_2, \sigma_{n+1}\sigma_{n+2}) \vdash (q_3, \sigma_{n+2}) \vdash (q_4, \varepsilon)$$

que comprova que N aceita w, logo $w \in L(N)$.

Por outro lado, se $w = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \in L(N)$ então a computação em N que aceita w, embora N seja AFN, sempre termina assim, a última transição satisfaz:

$$(q, \sigma_n) \vdash (q_4, \varepsilon), \text{ onde } q \in \{q_1, q_2, q_3, q_4\}.$$

Como $\Delta^{-1}(q_4) = \{(q_3, 0), (q_3, 1)\}$, temos $q = q_3$ e $\sigma_n \in \{0, 1\}$.

Examinando a penúltima transição:

$$(q', \sigma_{n-1}\sigma_n) \vdash (q_3, \sigma_n) \vdash (q_4, \varepsilon), \text{ onde } q' \in \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

Como $\Delta^{-1}(q_3) = \{(q_2, 0), (q_2, 1)\}$, temos $q' = q_2$ e $\sigma_{n-1} \in \{0, 1\}$

Examinando a antepenúltima transição:

$$(q'', \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_n) \vdash (q_2, \sigma_{n-1}\sigma_n) \vdash (q_3, \sigma_n) \vdash (q_4, \varepsilon), \text{ onde } q'' \in \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \sigma_{n-2} \in \{0, 1\}.$$

Como $\Delta^{-1}(q_2) = \{(q_1, 1)\}$, temos $q'' = q_1$ e $\sigma_{n-2} = 1$.

Concluímos que a antepenúltima letra de w é 1.

Para converter o AFN N em um AFD M, observe que N não tem transições ε, logo para calcular $\delta(R, a)$, para $R \subseteq \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ e $a \in \{0,1\}$ será simples porque o alcance $E(R) = R$. Logo $\delta(R, a) = \bigcup_{r \in R} E(\Delta(r, a)) = \bigcup_{r \in R} \Delta(r, a)$.

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde $\Sigma = \{0,1\}$, $q_0 = E(q_1) = \{q_1\}$

O conjunto de estados Q será construído por demanda, ao calcularmos a tabela da função de transição δ.

δ	0	1
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

Para o cálculo, observe:

$\delta(\{q_1\}, 0) = \Delta(q_1, 0) = \{q_1\}$

$\delta(\{q_1\}, 1) = \Delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$

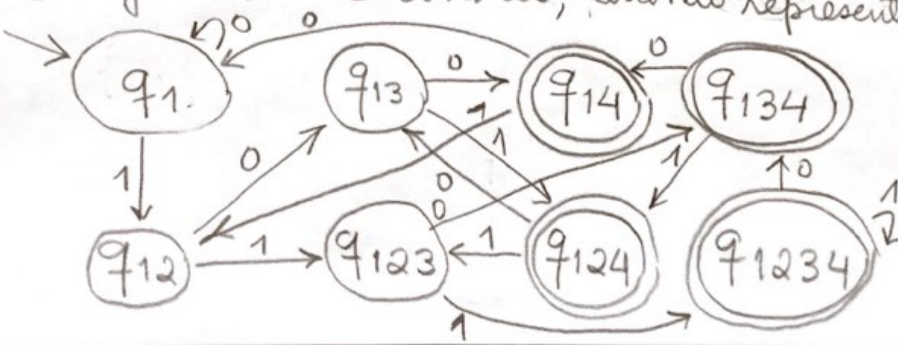
$\delta(\{q_1, q_2\}, 0) = \Delta(q_1, 0) \cup \Delta(q_2, 0) = \{q_1, q_3\}$

$\delta(\{q_1, q_2\}, 1) = \Delta(q_1, 1) \cup \Delta(q_2, 1) = \{q_1, q_2, q_3\}$

$F = \{R \subseteq Q \mid R \cap F_N \neq \emptyset\}$, onde $F_N = \{q_4\}$ são os estados finais do AFNN.

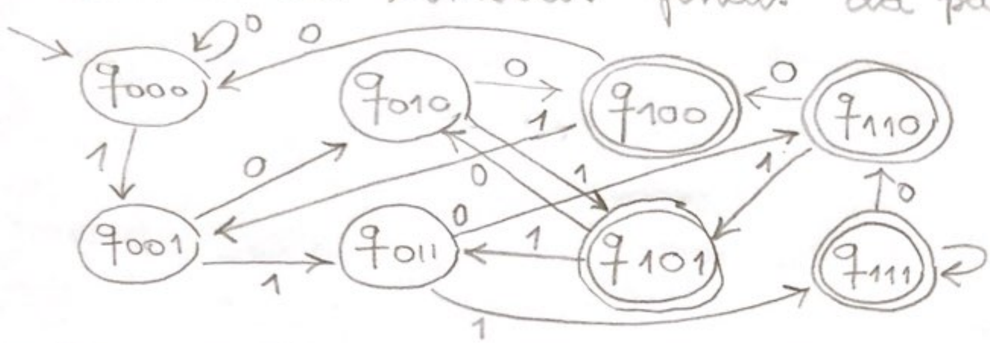
$F = \{\{q_1, q_4\}, \{q_1, q_2, q_4\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}\}$

Diagrama de estados, usando representação concisa:



$q_1 = \{q_1\}$,
$q_{123} = \{q_1, q_2, q_3\}$
e assim por diante.

Vamos renomear os 8 estados, observando que cada estado corresponde a uma possível subcadeia com os três símbolos finais da palavra aceita no estado



$q_1 \leftrightarrow q_{000}$ $\quad q_{12} \leftrightarrow q_{001}$

$q_{13} \leftrightarrow q_{010}$ $\quad q_{123} \leftrightarrow q_{011}$

$q_{14} \leftrightarrow q_{100}$ $\quad q_{124} \leftrightarrow q_{101}$

$q_{134} \leftrightarrow q_{110}$ $\quad q_{1234} \leftrightarrow q_{111}$

Todo $q \in Q$ satisfaz: todas as palavras aceitas em q terminam com o mesmo símbolo de Σ.

Observe que a nomenclatura dada aos estados, na forma q_{xyz}, com $x, y, z \in \Sigma$, satisfaz:

$$\delta(q_{xyz}, 0) = q_{yz0} \quad e \quad \delta(q_{xyz}, 1) = q_{yz1}.$$

Dessa forma, após pelo menos 3 passos de uma computação no AFD, se o autômato se encontra no estado q_{xyz}, sabemos que as últimas três letras consumidas foram x, y, z nesta ordem.

Os estados finais são os da forma q_{1xy}, com $x, y \in \Sigma$, que indica que a antepenúltima letra consumida na computação da palavra foi 1.

Questão 3 (a) $L_1 = \{a^i b^j c^r : i, j, r \geq 0$ e, se $i = 1$ então $j = r\}$

Mostraremos que toda $w \in L_1$ tal que $w \neq \varepsilon$ admite subpalavra bombeável.

Dois casos. Caso 1: $i \neq 1$, e $j > 0$ ou $r > 0$.

Se $j > 0$, a subpalavra bombeável é $y = b$.

Se $r > 0$, a subpalavra bombeável é $y = c$.

Caso 2: $i = 1$, ou $i > 1$ e $j = r = 0$.

a subpalavra bombeável é $y = a$.

Mostraremos que $\varepsilon \in L_1$ não admite subpalavra bombeável.

$\varepsilon = a^0 b^0 c^0 \in L_1$.

Qualquer subpalavra y bombeável tem comprimento positivo e não pode ser subpalavra de ε.

(b) $L_2 = \{a b^j c^j : j \geq 0\}$ não é linguagem regular.

Suponha que L_2 é linguagem regular. Pelo lema do bombeamento, existe um inteiro positivo p tal que toda palavra $w \in L_2$ com $|w| \geq p$, existe decomposição $w = xyz$ com ① $|xy| \leq p$ ② $|y| > 0$ e ③ tal que para todo $k \geq 0$, $xy^kz \in L_2$.

Considere $w = a b^p c^p \in L_2$. Como $|w| = 1 + 2p$, então existe uma decomposição $w = xyz$ satisfazendo ①, ② e ③.

Como $|xy| \leq p$, temos $xy = ab^{|xy|-1}$.

Caso 1: a ocorre em x, temos $x = ab^{|x|-1}$ e $y = b^{|xy|-|x|}$.

Como $|y| \geq 1$, temos $|xy| - |x| \geq 1$.

$xy^2z = a\,b^{|x|-1}\,b^{2(|xy|-|x|)}\,b^{p-(|xy|-1)}\,c^p.$

Como

$\cancel{|x|-1} + 2|xy| - \cancel{2|x|} + p - \cancel{|xy|} + \cancel{1} = |xy| - |x| + p = |y| + p$.

assim $xy^2z = a\,b^{|y|+p}\,c^p$, e como $|y|>0$, temos $|y|+p \neq p$, o que implica $xy^2z \notin L_2$, uma contradição.

Caso 2. a não ocorre em x, temos $x=\varepsilon$ e $y = ab^{|y|-1}$.
Como a ocorre 1 vez em y, a ocorre 2 vezes em y^2, e a ocorre 2 vezes em xy^2z, o que implica $xy^2z \notin L_2$, uma contradição.

Concluímos que L_2 não é linguagem regular.

(c) $L_3 = ab^*c^*$ é uma linguagem regular definida pela expressão regular.

$L_1 \cap L_3 = \{ab^jc^j : j \geq 0\} = L_2$

Usando fechamento por interseção em linguagens regulares, temos que se L_1 é regular, então $L_1 \cap L_3$ também é, mas provamos em (b) que L_2 não é regular.

Concluímos que L_1 não é linguagem regular, apesar de L_1 satisfazer o bombeamento