EQUIVALÊNCIA ENTRE A.P. E GLC

TEOREMA: UMA LINGUAGEM É LIVRE DE CONTEXTO SE E SOMENTE SE É ACEITA POR UM AUTÔMATO DE PILHA.

$\rightsquigarrow$ VAMOS CONSTRUIR UM A.P. QUE ACEITA A LINGUAGEM GERADA POR UMA GLC DADO; E

$\rightsquigarrow$ VAMOS CONSTRUIR UMA GLC QUE GERA A LINGUAGEM QUE É ACEITA POR UM A.P. DADO

1) GLC $\rightsquigarrow$ AP

- SIMULA AS DERIVAÇÕES MAIS À ESQ.

SEJA $G = (T, V, S, R)$

COMO CONSTRUO O AUTÔMATO $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$?

$\rightsquigarrow \Sigma = T$

$\rightsquigarrow \Gamma = T \cup V$

1) GLC $\rightarrow$ AP

- SIMULA AS DERIVAÇÕES MAIS À ESQ.

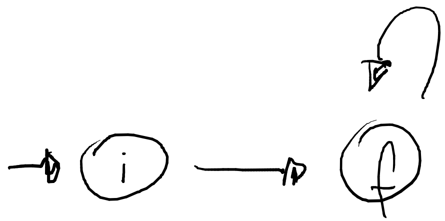
SEJA $G = (T, V, S, R)$

COMO CONSTRUO O AUTÔMATO $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$?

$\rightsquigarrow \Sigma = T$

$\rightsquigarrow \Gamma = T \cup V$

$\rightsquigarrow Q = \{i, f\}$, $q_0 = i$, $F = \{f\}$



- $\Delta(i, \varepsilon, \varepsilon) = \{(f, S)\}$

- SE TEMOS A REGRA $X \rightarrow \alpha$, CRIAMOS A TRANSIÇÃO

$$(f, \alpha) \in \Delta(f, \varepsilon, X)$$

ε $\rightarrow$ símbolo lido na entrada

X $\rightarrow$ símbolo no topo da pilha

f (em (f, α)) $\rightarrow$ ESTADO PARA ONDE VOU

α $\rightarrow$ colocar na pilha

f (em $\Delta(f, \ldots)$) $\rightarrow$ ESTADO ATUAL

EX: $S \to Sc \mid aSb \mid \varepsilon$

Δ =

EST	ENTRADA	PILHA	TRANS.
i	ε	ε	(f, S)
f	ε	S	(f, Sc)
			(f, aSb)
			(f, ε)

EST	ENTRADA	PILHA	TRANS.
f	a	a	(f, ε)
f	b	b	(f, ε)
f	c	c	(f, ε)

abc^2 É DERIVADA POR $S \Rightarrow Sc \Rightarrow Sc^2 \Rightarrow aSbc^2 \Rightarrow abc^2$

A COMPUTAÇÃO FICA

$$(i, abc^2, \varepsilon) \vdash (f, abc^2, S) \vdash (f, abc^2, Sc)$$
$$\vdash (f, abc^2, Sc^2)$$
$$\vdash (f, abc^2, aSbc^2)$$
$$\vdash (f, bc^2, Sbc^2)$$
$$\vdash (f, bc^2, bc^2) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$$

PRECISAMOS COMEÇAR → A COMPARAR

MAIS FORMALMENTE

PRECISAMOS PROVAR QUE ESTE AUTÔMATO ACEITA TODAS AS PALAVRAS GERADAS POR G.

$\Sigma = T$

$\Gamma = T \cup V$

$Q = \{i, f\}$

$q_0 = i$

$F = \{f\}$

$$\Delta : \{i, f\} \times (T \cup \{\varepsilon\}) \times (T \cup V \cup \{\varepsilon\}) \longrightarrow \{i, f\} \times (T \cup V)^*$$

$$\Delta(q, \sigma, \gamma) = \begin{cases} (f, S) & \text{se } q = i \text{ e } \sigma = \gamma = \varepsilon \\ (f, u) : X \to u \in R & \text{se } q = f,\ \sigma = \varepsilon \text{ e } \gamma = X \in V \\ (f, \varepsilon) & \text{se } q = f \quad \sigma = \gamma \in T \end{cases}$$

PROVA: DADA $w \in L(G)$, VAMOS MOSTRAR QUE EXISTE COMPUTAÇÃO $(i, w, \varepsilon) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$ DE M.

- SABEMOS QUE HÁ DERIVAÇÃO $S \Rightarrow^* w$

SUPONHA QUE APÓS ALGUMAS ETAPAS DA DERIVAÇÃO

$$S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha X v \xRightarrow{X \to u} \alpha u v = \alpha \alpha' Y v' \Rightarrow w = \alpha \alpha' w''$$

ONDE $\alpha \in T^*$ E X É A VARIÁVEL MAIS À ESQ.

ISSO QUER DIZER QUE $w = \alpha w'$ PARA ALGUM $w' \in T^*$

OBS: EM CADA PASSO DA DERIVAÇÃO SUBSTITUÍMOS UMA VARIÁVEL $X \in V$ POR UMA PALAVRA $u \in (T \cup V)^*$ USANDO A REGRA $X \to u \in R$

ISSO CORRESPONDE A UMA SEQUÊNCIA NA COMPUTAÇÃO

NOSSA COMPUTAÇÃO TERÁ O TRECHO

$$(i, w, \varepsilon) \Rightarrow (f, w, S) \Rightarrow^* (f, \alpha w', \alpha X v) \Rightarrow^* (f, w', X v) \Rightarrow (f, w', u v) \Rightarrow^* (f, w'', Y v')$$

2) AP → GLC

→ AUTÔMATO CORDATO :

1) POSSUI APENAS UM ÚNICO ESTADO FINAL

3) CADA TRANSIÇÃO OU COLOCA OU REMOVE ALGO DA PILHA, MAS NÃO AMBOS.

↳ PODEMOS FAZER ISSO DIVIDINDO CADA TRANSIÇÃO E ADICIONANDO UM ESTADO INTERMEDIÁRIO

$$p \xrightarrow{(a,X,Y)} q \quad : \quad p \xrightarrow{(a,X,\varepsilon)} \bigcirc \xrightarrow{(\varepsilon,\varepsilon,Y)} q$$

PARA PAR DE ESTADOS p,q CRIAMOS UMA VARIÁVEL $A_{p,q}$ QUE GERA TODAS AS PALAVRAS QUE LEVAM M DE p A q INICIANDO E ACABANDO COM PILHA VAZIA

→ A PRIMEIRA OPERAÇÃO TEM QUE SER DE COLOCAR X NA PILHA

→ A ÚLTIMA OPERAÇÃO É DE REMOÇÃO

HÁ DUAS POSSIBILIDADES

1) O SÍMBOLO COLOCADO NO INÍCIO SOMENTE É REMOVIDO AO FINAL

REGRA: $A_{pq} \to a A_{rs} b$, ONDE a É O SÍMBOLO LIDO AO INCLUIR X
E b É O SÍMBOLO LIDO AO REMOVER X
r É O ESTADO APÓS p, s É O ESTADO ANTES DE q.

2) O SÍMBOLO REMOVIDO AO FINAL É DIFERENTE DO INICIAL
MAS O SÍMBOLO INICIAL É REMOVIDO EM ALGUM MOMENTO INTERMEDIÁRIO

REGRA: $A_{pq} \to A_{pr} A_{rq}$ ONDE r É O ESTADO NO QUAL A PILHA FICA VAZIA.

FORMALMENTE: SEJA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, \{q_f\})$

DEFINIMOS $G_M = (T, V, S, R)$ POR

- $T = \Sigma$
- $V = \{A_{p,q} : p, q \in Q\}$
- $S = A_{q_0, q_f}$
- REGRAS

1) $p, q, r, s \in Q$, $u \in \Gamma$, $a, b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

SE $(r, u) \in \Delta(p, a, \varepsilon)$ E $(q, \varepsilon) \in \Delta(s, b, u)$

$A_{pq} \to a A_{rs} b$

2) $p, q, r \in Q$, $A_{pq} \to A_{pr} A_{rq}$

3) PARA CADA $p \in Q$, $A_{pp} \to \varepsilon$

AF: SE A_{pq} GERA x, ENTÃO x LEVA p A q COM A PILHA VAZIA

SE $A_{pq} \Rightarrow^* x$ POSSUI UM PASSO, ENTÃO FOI USADA A REGRA $A_{pp} \to \varepsilon$

OU SEJA $x = \varepsilon$. MAS ε É CLARAMENTE UMA PALAVRA QUE VAI DE p A p

COM A PILHA VAZIA

SUPONHA QUE $A_{pq} \Rightarrow^* x$ POSSUI MAIS DO QUE UM PASSO.

1) $A_{pq} \Rightarrow a A_{rs} b \Rightarrow^* x$.

ENTÃO $x = a x' b$ E $(r, u) \in \Delta(p, a, \varepsilon)$ E $(q, \varepsilon) \in \Delta(s, b, u)$

E $A_{rs} \Rightarrow^* x'$, E x' LEVA M DE r A s COM PILHA VAZIA ✓

2) $A_{pq} \Rightarrow A_{pr} A_{rs} \Rightarrow^* x$. ENTÃO $x = yz$ E $A_{pr} \Rightarrow^* y$ $A_{rs} \Rightarrow^* z$ ✓

AF: SE x LEVA M DE p A q COM A PILHA VAZIA, ENTÃO $A_{pq} \Rightarrow^* x$

$(p, x, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

SE A COMPUTAÇÃO TEM ZERO PASSOS, ENTÃO $x = \varepsilon$, MAS $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$

1) SE O SÍMBOLO COLOCADO NA PILHA NO COMEÇO É REMOVIDO SOMENTE NO FINAL

EXISTEM $r, s \in Q$ T.q. $(r, u) \in \Delta(p, a, \varepsilon)$ E $(q, \varepsilon) \in \Delta(s, b, u)$

MAS $A_{pq} \rightarrow a A_{rs} b \Rightarrow^* a x' b = x$ $\quad$ $x = a \ x' \ b$

2) SE A PILHA FOI ESVAZIADA EM $r \neq q$, ENTÃO $x = yz$

E EXISTEM $(p, y, \varepsilon) \vdash^* (r, \varepsilon, \varepsilon)$ E $(r, z, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

ISSO IMPLICA QUE $A_{pr} \Rightarrow^* y$ E $A_{rq} \Rightarrow^* z$

LOGO $A_{pq} \Rightarrow A_{pr} A_{rq} \Rightarrow^* yz = x$