EQUIVALÊNCIA ENTRE A.P. E GLC

TEOREMA: UMA LINGUAGEM É LIVRE DE CONTEXTO SE E SOMENTE SE É ACEITA POR UM AUTÔMATO DE PILHA.

→ VAMOS CONSTRUIR UM A.P. QUE ACEITA A LINGUAGEM GERADA POR UMA GLC DADO; E

→ VAMOS CONSTRUIR UMA GLC QUE GERA A LINGUAGEM QUE É ACEITA POR UM A.P. DADO

1) GLC → AP

- SIMULA AS DERIVAÇÕES MAIS À ESQ.

SEJA $G = (T, V, S, R)$

COMO CONSTRUO O AUTÔMATO $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$?

→ $\Sigma = T$

→ $\Gamma = T \cup V$

1) GLC → AP

- Simula as derivações mais à esq.

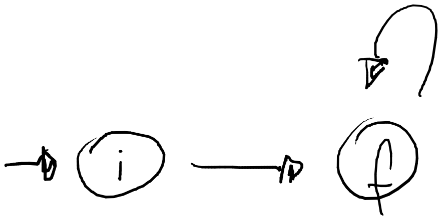
Seja $G = (T, V, S, R)$

Como construo o autômato $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$?

→ $\Sigma = T$

→ $\Gamma = T \cup V$

→ $Q = \{i, f\}$, $q_0 = i$, $F = \{f\}$



- $\Delta(i, \varepsilon, \varepsilon) = \{(f, S)\}$

- Se temos a regra $X \to \alpha$, criamos a transição

$$(f, \alpha) \in \Delta(f, \varepsilon, X)$$

→ símbolo lido na entrada

→ símbolo no topo da pilha

→ colocar na pilha

→ estado para onde vou

→ estado atual

EX: $S \rightarrow Sc \mid aSb \mid \varepsilon$

Δ =

EST	ENTRADA	PILHA	TRANS.
i	ε	ε	(f, S)
f	ε	S	(f, Sc) (f, aSb) (f, ε)

EST	ENTRADA	PILHA	TRANS.
f	a	a	(f, ε)
f	b	b	(f, ε)
f	c	c	(f, ε)

abc^2 É DERIVADA POR $S \Rightarrow Sc \Rightarrow Sc^2 \Rightarrow aSbc^2 \Rightarrow abc^2$

A COMPUTAÇÃO FICA

$(i, abc^2, \varepsilon) \vdash (f, abc^2, S) \vdash (f, abc^2, Sc)$

$\vdash (f, abc^2, Sc^2)$

$\vdash (f, abc^2, aSbc^2)$

PRECISAMOS COMEÇAR ⇒ A COMPARAR

$\vdash (f, bc^2, Sbc^2)$

$\vdash (f, bc^2, bc^2) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$

MAIS FORMALMENTE

$\Sigma = T$

$\Gamma = T \cup V$

$Q = \{i, f\}$

$q_0 = i$

$F = \{f\}$

PRECISAMOS PROVAR QUE ESTE AUTÔMATO ACEITA TODAS AS PALAVRAS GERADAS POR G.

$$\Delta : \{i, f\} \times (T \cup \{\varepsilon\}) \times (T \cup V \cup \{\varepsilon\}) \longrightarrow \{i, f\} \times (T \cup V)^*$$

$$\Delta(q, \sigma, \gamma) = \begin{cases} (f, S) & \text{se } q = i \text{ e } \sigma = \gamma = \varepsilon \\ (f, u) : X \rightarrow u \in R & \text{se } q = f, \sigma = \varepsilon \text{ e } \gamma = X \in V \\ (f, \varepsilon) & \text{se } q = f \quad \sigma = \gamma \in T \end{cases}$$

PROVA: DADA $w \in L(G)$, VAMOS MOSTRAR QUE EXISTE COMPUTAÇÃO $(i, w, \varepsilon) \vdash^* (f, \varepsilon, \varepsilon)$ DE M.

- SABEMOS QUE HÁ DERIVAÇÃO $S \Rightarrow^* w$

SUPONHA QUE APÓS ALGUMAS ETAPAS DA DERIVAÇÃO

$$S \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underline{\alpha X v} \xRightarrow{X \to u} \alpha\, \underline{u v} = \alpha\, \underline{\alpha' Y v'} \Rightarrow w = \alpha \alpha' w''$$

ONDE $\alpha \in T^*$ E X É A VARIÁVEL MAIS À ESQ.

ISSO QUER DIZER QUE $w = \alpha w'$ PARA ALGUM $w' \in T^*$

OBS: EM CADA PASSO DA DERIVAÇÃO SUBSTITUÍMOS UMA VARIÁVEL $X \in V$ POR UMA PALAVRA $u \in (T \cup V)^*$ USANDO A REGRA $X \to u \in R$

ISSO CORRESPONDE A UMA SEQUÊNCIA NA COMPUTAÇÃO

NOSSA COMPUTAÇÃO TERÁ O TRECHO

$$(i, w, \varepsilon) \Rightarrow (f, w, S) \Rightarrow^* (f, \alpha w', \alpha X v) \Rightarrow^* (f, w', X v) \Rightarrow (f, w', u v) \Rightarrow^* (f, w'', Y v')$$

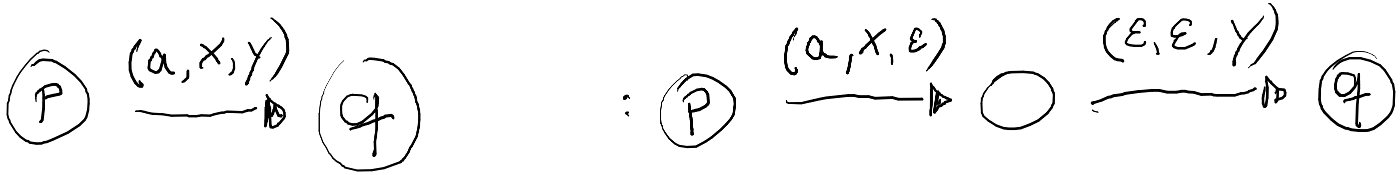
2) AP → GLC

⤳ AUTÔMATO CORDATO :

1) POSSUI APENAS UM ÚNICO ESTADO FINAL

3) CADA TRANSIÇÃO OU COLOCA OU REMOVE ALGO DA PILHA, MAS NÃO AMBOS.

↳ PODEMOS FAZER ISSO DIVIDINDO CADA TRANSIÇÃO E ADICIONANDO UM ESTADO INTERMEDIÁRIO



PARA PAR DE ESTADOS p, q CRIAMOS UMA VARIÁVEL $A_{p,q}$ QUE GERA TODAS AS PALAVRAS QUE LEVAM M DE p A q INICIANDO E ACABANDO COM PILHA VAZIA

- ⤳ A PRIMEIRA OPERAÇÃO TEM QUE SER DE COLOCAR x NA PILHA
- ⤳ A ÚLTIMA OPERAÇÃO É DE REMOÇÃO

HÁ DUAS POSSIBILIDADES

1) O SÍMBOLO COLOCADO NO INÍCIO SOMENTE É REMOVIDO AO FINAL

REGRA: $A_{pq} \rightarrow a A_{rs} b$, ONDE a É O SÍMBOLO LIDO AO INCLUIR X
E b É O SÍMBOLO LIDO AO REMOVER X
r É O ESTADO APÓS p, s É O ESTADO ANTES DE q.

2) O SÍMBOLO É REMOVIDO AO FINAL É DIFERENTE DO INICIAL
MAS O SÍMBOLO INICIAL É REMOVIDO EM ALGUM MOMENTO INTERMEDIÁRIO

REGRA: $A_{pq} \rightarrow A_{pr} A_{rq}$ ONDE r É O ESTADO NO QUAL A PILHA FICA VAZIA.

FORMALMENTE: SEJA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, \{q_f\})$

DEFINIMOS $G_M = (T, V, S, R)$ POR

- $T = \Sigma$
- $V = \{A_{p,q} : p,q \in Q\}$
- $S = A_{q_0,q_f}$
- REGRAS

1) $p,q,r,s \in Q$, $u \in \Gamma$, $a,b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

SE $(r,u) \in \Delta(p,a,\varepsilon)$ E $(q,\varepsilon) \in \Delta(s,b,u)$

$$A_{pq} \to a A_{rs} b$$

2) $p,q,r \in Q$, $A_{pq} \to A_{pr} A_{rq}$

3) PARA CADA $p \in Q$, $A_{pp} \to \varepsilon$

AF: SE A_{pq} GERA x, ENTÃO x LEVA p A q COM A PILHA VAZIA

SE $A_{rq} \Rightarrow^{*} x$ POSSUI UM PASSO , ENTÃO FOI USADA A REGRA $A_{pp} \to \varepsilon$ OU SEJA $x = \varepsilon$. MAS ε É CLARAMENTE UMA PALAVRA QUE VAI DE p A p COM A PILHA VAZIA

SUPONHA QUE $A_{pq} \Rightarrow^{*} x$ POSSUI MAIS DO QUE UM PASSO.

1) $A_{pq} \Rightarrow a A_{rs} b \Rightarrow^{*} x$.

ENTÃO $x = a x' b$ E $(r,u) \in \Delta(p,a,\varepsilon)$ E $(q,\varepsilon) \in \Delta\ s,b,u)$

E $A_{rs} \Rightarrow^{*} x'$, E x' LEVA M DE r A s COM PILHA VAZIA ✓

2) $A_{pq} \Rightarrow A_{pr} A_{rs} \Rightarrow^{*} x$. ENTÃO $x = yz$ E $A_{pr} \Rightarrow^{*} y$ $A_{rs} \Rightarrow^{*} z$ ✓

AF: SE x LEVA M DE p A q COM A PILHA VAZIA, ENTÃO $A_{pq} \Rightarrow^* x$

$$(p, x, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

SE A COMPUTAÇÃO TEM ZERO PASSOS, ENTÃO $x = \varepsilon$, MAS $A_{pp} \to \varepsilon$

1) SE O SÍMBOLO COLOCADO NA PILHA NO COMEÇO É REMOVIDO SOMENTE NO FINAL

EXISTEM $r, s \in Q$ T.q. $(r, u) \in \Delta(p, a, \varepsilon)$ e $(q, \varepsilon) \in \Delta(s, b, u)$

MAS $A_{pq} \to a A_{rs} b \Rightarrow^* a x' b = x$ $\quad x = a \; x' \; b$

2) SE A PILHA FOI ESVAZIADA EM $r \neq q$, ENTÃO $x = yz$

E EXISTEM $(p, y, \varepsilon) \vdash^* (r, \varepsilon, \varepsilon)$ e $(r, z, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

ISSO IMPLICA QUE $A_{pn} \Rightarrow^* y$ e $A_{rq} \Rightarrow^* z$

LOGO $A_{pq} \Rightarrow A_{pr} A_{rq} \Rightarrow^* yz = x$

- LINGUAGEM REGULAR

$\Longleftrightarrow$

- GRAMÁTICAS REGULARES

$\Longleftrightarrow$

- AUTÔMATOS FINITOS

- LINGUAGENS LIVRES DE CONTEXTO

  $\rightsquigarrow$ GRAMÁTICAS LIVRES DE CONTEXTO

  $\rightsquigarrow$ AUTÔMATOS DE PILHA

TEOREMA: AS SEGUINTES AFIRMAÇÕES SÃO EQUIVALENTES

1) L É UMA LINGUAGEM LIVRE DE CONTEXTO
2) L É GERADA POR UMA GRAMÁTICA LIVRE DE CONTEXTO
3) L É ACEITA POR UM AUTÔMATO DE PILHA

- VIMOS QUE A INTERSEÇÃO DE DUAS LLC'S NÃO É NESC. UMA LLC.

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \{a^n b^n c^m : n,m \geq 0\} \\ L_2 = \{a^m b^n c^n : n,m \geq 0\} \end{array}\right\} \quad L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$$

PROP: SE L É LLC E R É LR, ENTÃO $L \cap R$ É LLC E $L - R$ É LLC

PROVA:

$$Q_\cap = Q_L \times Q_R$$

$$q_{0\cap} = (q_{0L}, q_{0R})$$

$$F_\cap = F_L \times F_R$$

$$((p,p'), u) \in \Delta_\cap((q,q'), \sigma, \gamma) \text{ SE } \begin{array}{l} (p,u) \in \Delta_L(q,\sigma,\gamma) \\ p' \in \delta_R(q',\sigma) \end{array}$$

$L - R$ É LLC PORQUE $\overline{R}$ É REGULAR E $L - R = L \cap \overline{R}$

TEORIA DA COMPUTABILIDADE

↳ ESTUDA O QUE PODE SER RESOLVIDO ALGORITMICAMENTE

- ↳ DECIDÍVEIS
- → INDECIDÍVEIS

TEORIA DA COMPLEXIDADE

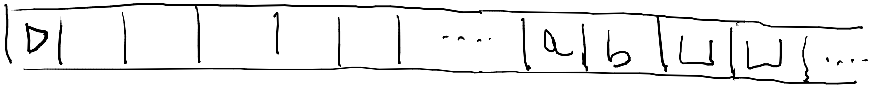
↳ EFICIÊNCIA DE TAIS ALGORITMOS

- ↳ TRATÁVEL
- → INTRATÁVEL

MÁQUINAS DE TURING

- ELEMENTOS

1) FITA INFINITA À DIREITA



→ CADA CASA PODE CONTER UM SÍMBOLO OU ESTAR EM BRANCO

[illegible]

$\sqcup \longleftrightarrow \varepsilon$

$\sqcup\,\sqcup\,\sqcup \qquad \varepsilon\,\varepsilon\,\varepsilon$

$\nparallel \qquad \parallel$

$\sqcup \qquad \varepsilon$

→ A PRIMEIRA CASA POSSUI O SÍMBOLO ▷

E ELA NÃO PODE SER MODIFICADA

→ SÓ HÁ UM NÚMERO FINITO DE CASAS PREENCHIDAS

2) UM CABEÇOTE

→ SEMPRE SOBRE UMA CASA DA FITA

→ PODE LER E ESCREVER

→ PODE SE MOVER P/ ESQ. OU DIR

↳ EXCETO QUANDO ESTIVER SOBRE O ▷ } SÓ PODE SE MOVER PARA A DIREITA

3) UM CONJUNTO FINITO DE ESTADOS

A TRANSIÇÃO

DADO O ESTADO ATUAL E O SÍMBOLO LIDO,
A MÁQUINA MUDA O ESTADO E EXECUTA UMA AÇÃO

AÇÕES:

1) MOVER O CABEÇOTE P/ ESQ. (EXCETO SE ESTIVER SOBRE ▷);

2) MOVER O CABEÇOTE P/ DIR;

3) MANTER O CABEÇOTE E ESCREVER UM NOVO SÍMBOLO NA CASA ATUAL.

DEF: UMA MÁQUINA DE TURING DETERMINÍSTICA

É UMA 6-TUPLA $(\Sigma_0, \Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ T.Q.

- Σ_0 ALFABETO DE ENTRADA
- Σ ALFABETO DA FITA
- Q ESTADOS
- $q_0 \in Q$ ESTADO INICIAL
- $F \subseteq Q$ ESTADOS FINAIS
- $\delta : (Q - F) \times \Sigma \longrightarrow Q \times \left((\Sigma - \{\triangleright\}) \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} \right)$

$\Sigma_0 \subseteq \Sigma$

$\sqcup, \triangleright \in \Sigma$

$\triangleright \notin \Sigma_0$

$\leftarrow, \rightarrow \notin \Sigma$

A MÁQUINA PARA SSE QUANDO ALCANÇA UM ESTADO FINAL

⇝ PODE NUNCA PARAR

⇝ RESTRIÇÕES EM δ QUANDO LEMOS $\triangleright$: SE $q \in Q - F$, ENTÃO $\delta(q, \triangleright) = (q', \rightarrow)$

⇝ CADA CASA DA FITA NÃO PODE CONTER MAIS DO QUE UM SÍMBOLO.

A MÁQUINA COMEÇA A COMPUTAÇÃO NO ESTADO q_0

A FITA INICIA COM $\triangleright$ NA CASA MAIS À ESQ.

E APENAS COM SÍMBOLOS DE Σ_0 OU ⊔

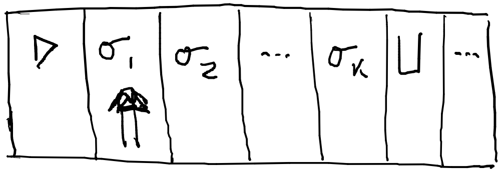
↓

UM NÚMERO
FINITO

↝ PRECISAMOS DIZER EM QUE CASA COMEÇA O CABEÇOTE.

↳ EM GERAL, COMEÇA À DIREITA DE $\triangleright$.

CONFIGURAÇÃO



EQUIV. $w = \triangleright \underline{\sigma_1} \sigma_2 \cdots \sigma_k$

- UMA COMPUTAÇÃO É SEQUÊNCIA DE PARES (q, w), ONDE $q \in Q$ E $w \in \Sigma^*$ É UMA CONFIGURAÇÃO COMO ACIMA.

↝ O ESTADO NO PRIMEIRO PAR DEVE SER q_0

↝ PODE APARECER NO MÁXIMO UM ESTADO FINAL, SEMPRE NO ÚLTIMO PAR

PODEMOS TER

$$(q_0, w_0) \vdash (q_1, w_1) \vdash \cdots \vdash (q_t, w_t) \quad , \quad q_i \in Q - F \;,\; 0 \leqslant i < t$$

$$q_t \in F$$

OU

$$(q_0, w_0) \vdash (q_1, w_1) \vdash \cdots \vdash (q_t, w_t) \vdash \cdots \quad q_i \in Q - F \quad \forall i$$

EX: $M_1 = (\Sigma_0, \Sigma, Q, q_0, F, \delta)$

- $\Sigma_0 = \{a\}$
- $\Sigma = \{a, \rhd, \sqcup\}$
- $Q = \{q_0, q_1, h\}$
- $F = \{h\}$
- δ :

δ	a	$\rhd$	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \sqcup)$	$(q_0, \rightarrow)$	$(h, \sqcup)$
q_1	(q_0, a)	$(q_1, \rightarrow)$	$(q_0, \rightarrow)$

SE $w = \rhd a a \sqcup a a a$

δ	a	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \sqcup)$	$(q_0, \rightarrow)$	$(h, \sqcup)$
q_1	(q_0, a)	$(q_1, \rightarrow)$	$(q_0, \rightarrow)$

SE $w = \triangleright a a \sqcup a a a$

DEPENDE DE ONDE O CABEÇOTE COMEÇA

CASO 1: COMEÇA NA PRIMEIRA CASA

$$(q_0, \underline{\triangleright} a a \sqcup a a a) \vdash (q_0, \triangleright \underline{a} a \sqcup a a a)$$
$$\vdash (q_1, \triangleright \underline{\sqcup} a \sqcup a a a)$$
$$\vdash (q_0, \triangleright \sqcup \underline{a} \sqcup a a a)$$
$$\vdash (q_1, \triangleright \sqcup \underline{\sqcup} \sqcup a a a)$$
$$\vdash (q_0, \triangleright \sqcup \sqcup \underline{\sqcup} a a a)$$
$$\vdash (h, \triangleright \sqcup \sqcup \underline{\sqcup} a a a)$$

CASO 2: COMEÇA NA SEGUNDA CASA

↳ "QUASE" IGUAL AO CASO 1

CASO 3: COMEÇA NA TERCEIRA CASA

$$(q_0, \triangleright a \underline{a} \sqcup a a a) \vdash (q_1, \triangleright a \underline{\sqcup} \sqcup a a a)$$
$$\vdash (q_0, \triangleright a \sqcup \underline{\sqcup} a a a)$$
$$\vdash (h, \triangleright a \sqcup \underline{\sqcup} a a a)$$

CASO 4: COMEÇA NA CASA 4

$$(q_0, \triangleright a a \underline{\sqcup} a a a) \vdash (h, \triangleright a a \underline{\sqcup} a a a)$$

↝ APAGA a E MOVE P/ DIREITA ATÉ ACHAR $\sqcup$

↝ SEMPRE PARA PORQUE A FITA POSSUI UM NÚMERO FINITO DE CASAS OCUPADAS.

EX: $M_2 = (\Sigma_0, \Sigma, Q, q_0, F, \delta)$

$\Sigma_0 = \{a\}$

$\Sigma = \{a, \triangleright, \sqcup\}$

$Q = \{q_0, h\}$

$F = \{h\}$

δ	a	$\triangleright$	$\sqcup$
q_0	$(q_0, \leftarrow)$	$(q_0, \rightarrow)$	$(h, \sqcup)$

1) SE ESTÁ SOBRE $\triangleright$ E $w = \triangleright aa\sqcup aaa$

$$(q_0, \underline{\triangleright} aa\sqcup aaa) \vdash (q_0, \triangleright \underline{a} a\sqcup aaa) \vdash (q_0, \underline{\triangleright} aa\sqcup aaa)$$

2) CASA 1 OU 2: MESMA COISA, PORÉM MAIS LONGO

3) QUINTA CASA

$$(q_0, \triangleright aa\sqcup \underline{a} aa) \vdash (q_0, \triangleright aa\underline{\sqcup} aaa) \vdash (h, \triangleright aa\underline{\sqcup} aaa)$$

⇝ ESSA MÁQUINA "REBOBINA" ATÉ A PRIMEIRA CASA EM BRANCO

DECISOR, ACEITADOR, RECURSIVO, RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEL

DEF: UM DECISOR É UMA MÁQUINA DE TURING $M = (\Sigma_0, \Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ T.q.

1) M POSSUI DOIS ESTADOS FINAIS (DE PARADA): UM DE ACEITAÇÃO s
E UM DE REJEIÇÃO n

$F = \{s, n\}$

2) M SEMPRE PARA (ALCANÇA UM ESTADO FINAL) COM QUALQUER PALAVRA DE Σ_0^* COLOCADA COMO ENTRADA NO INÍCIO DA FITA

- UM DECISOR COM ALFABETO DE ENTRADA Σ_0 DECIDE UMA LINGUAGEM $L \subseteq \Sigma_0^*$ (OU, EQUIV. $L \subseteq \Sigma_0^*$ É DECIDIDA POR M) SE

$$w \in L \iff M \text{ PARA NO ESTADO } s \text{ COM } w$$

- COMO M É DECISOR, ISSO IMPLICA QUE

$$w \notin L \iff M \text{ PARA NO ESTADO } n \text{ COM } w$$