A Máquina de Turing Universal $\rightsquigarrow \mathcal{U}$

- Capaz de simular qualquer máquina de Turing
- Tem que receber o "programa" dessa máquina
- Temos que descrever os alfabetos, estados, e transições
- $\mathcal{U}$ é um modelo de computador programável

Obs: Há várias formas de definir $\mathcal{U}$

- Alf. de entrada $\Sigma_{\mathcal{U}} = \{0, 1, \sigma, q, X, Y, Z, \#, a, b\}$
- Alf. da fita $\Sigma_{\mathcal{U}} \cup \{\triangleright, \sqcup\}$

$$\Sigma_{\mathcal{U}} = \{0, 1, \sigma, q, X, Y, z, \#, a, b\}$$

- QUEREMOS SIMULAR A MÁQUINA M.
  - TRANSIÇÕES DE M SERÃO ENUMERADAS NA FITA DE $\mathcal{U}$ SEPARADAMENTE
  - OS SÍMBOLOS DE M SERÃO REPRESENTADOS NO SISTEMA UNÁRIO.
  - AS SETAS DE M SERÃO SÍMBOLOS DE M
  - SÍMBOLOS INICIAM POR σ E ESTADOS POR q

- SUPONHA QUE M TEM m SÍMBOLOS E n ESTADOS

  r_ÉSIMO SÍMBOLO

  - RESERVAMOS $m+3$ CASAS P/ CADA SÍMBOLO : $\sigma\, 0^{r}\, 1^{m+2-r}$
  - " $n+1$ CASAS P/ CADA ESTADO : $q\, 0^{r}\, 1^{n-r}$

SÍMBOLO	CÓDIGO
$\triangleright$	$\sigma 0 1 \cdots 1$
$\rightarrow$	$\sigma 0 0 1 \cdots 1$
$\leftarrow$	$\sigma 0 0 0 1 \cdots 1$

• CODIFICAR TRASIÇÃO

$$\Sigma_{\mathcal{U}} = \{0, 1, \sigma, q, X, Y, Z, \#, a, b\}$$

EX: $\delta(q_i, \sigma_J) = (q_r, \sigma_s)$

$$S = \boxed{X} \underbrace{\boxed{q0^i1^{n-i}}}_{n+1} \underbrace{\boxed{\sigma 0^J 1^{m+2-J}}}_{m+3} \underbrace{\boxed{q0^r1^{n-r}}}_{n+1} \underbrace{\boxed{\sigma 0^s 1^{m+2-s}}}_{m+3} \boxed{X}$$

INDICA QUE O CABEÇOTE DE M ESTÁ SOB ESTA CASA

• A DESCRIÇÃO COMPLETA É

$q0^p1^{n-p}$ ~ O ESTADO ATUAL DA MÁQUINA

$$\underbrace{\triangleright \underbrace{X s_1 X s_2 X s_3 X \cdots X s_t}_{\text{CONJUNTO DE TRANSIÇÕES}} Y}_{c(M)} \underbrace{Q}_{q_0} Z \underbrace{\underbrace{\sigma u_1}_{m+3} \sigma u_2 \# u_3 \sigma u_4 \cdots}_{c(Z)}$$

FITA ATUAL ESCRITA NOS SIMBOLOS DE $\mathcal{U}$.

EX: SEJA M COM ALFABETO $\Sigma = \{0, \triangleright, \sqcup\}$, ESTADOS $\{q_0, q_1, h\}$ $F = \{h\}$

ESTADO	ENTRADA	TRANSIÇÕES
q_0	0	$(q_1, \sqcup)$
	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
q_1	0	$(q_0, 0)$
	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

ESTADO	CÓDIGO	SÍMBOLO	CÓDIGO
q_0	q011	$\triangleright$	σ01111
		$\rightarrow$	σ00111
q_1	q001	$\leftarrow$	σ00011
h	q000	$\sqcup$	σ00001
		0	σ00000

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, \sqcup)$$

X q011 σ00000 q001 σ00001 X

PROCESSAMENTO : DUAS PARTES $\Sigma_{u} = \{0, 1, \sigma, q, X, Y, Z, \#, \underline{a, b}\}$

1) VERIFICAR SE A DESCRIÇÃO É LEGÍTIMA

→ SE X's, Y, Z, q's E σ's ESTÃO NA ORDEM CORRETA

→ SE AS REPRESENTAÇÕES TÊM O MESMO TAMANHO

2) SIMULAR A MÁQUINA CUJA DESCRIÇÃO FOI DADA

TRÊS ETAPAS :

2.1) CABEÇOTE À DIREITA ▷

VARREMOS ENTRE ▷ E Y BUSCANDO UMA QUADRUPLA QUE COMECE

COM A REP. DO PAR (Q, τ), ONDE

Q É O ESTADO REPRESENTADO ENTRE Y E Z; E

τ É O ESTADO REPRESENTADO À ESQ. DE #

SUBSTITUÍMOS 0's E 1's POR a's E b's, RESP.

SE NÃO ENCONTRARMOS TAL QUADRUPLA, ESTAMOS EM UM ESTADO FINAL

2.2) O estado Q e símbolo τ mais à esq. correspondem à ação de M

no Q e τ devem ser copiados para os campos correspondentes

entre Y e Z, depois de #

Se τ representa $\leftarrow$ ou $\rightarrow$ movemos a posição de #

$\sigma 0^1 1^{m+1}$: $\rightarrow$ Move # para o lugar do próximo σ

$\sigma 0^2 1^m$: $\leftarrow$ Move # para o lugar do σ anterior

$\sigma 0^j 1^{m+2-j}$ substitui o seg após # por $\sigma 0^j 1^{m+2-j}$

$j \geq 2$

2.3) Rebobina a fita substituindo a's e b's por 0's e 1's.

O PROBLEMA DE PARADA

DEF: DADA UMA M.T. M, DENOTAMOS POR $c(M)$ O "PROGRAMA" DE M PARA A M.T. UNIVERSAL $\mathcal{U}$.

- CONSIDERE A LINGUAGEM

MÁQ. DE TURING COM ALF. DE ENTRADA $\Sigma_{\mathcal{U}}$

$$H = \{ c(M) \triangleright w : \text{A MÁQUINA } M \text{ PARA COM ENTRADA } w \in \Sigma_{\mathcal{U}}^{*} \} \subseteq \Sigma_{\mathcal{U}}^{*}$$

- SEJA $T_{\Sigma_{\mathcal{U}}}$ UMA MÁQUINA QUE LÊ w E RETORNA $c(w)$

- CONSIDERE A MÁQUINA $T_{\Sigma_{\mathcal{U}}}$ QUE LÊ $\triangleright c(M) \triangleright w$ E RETORNA $\triangleright c(M) \triangleright c(w)$

- H É RECURSIVAMENTE ENUMERÁVEL: A MÁQUINA $M_H = T_{\Sigma_{\mathcal{U}}} \to \mathcal{U}$ É UMA MÁQUINA QUE ACEITA H.

• CONSIDERE A LINGUAGEM

$$H' = \{ c(M) : \text{A M.T. } M \text{ PARA COM ENTRADA } c(M) \in \Sigma_u^* \}$$

$\rightsquigarrow$ M T.q. $c(M) \in L_{aceita}(M)$

<u>PROP:</u> H' É R.E.

<u>PROVA</u>: CONSIDERE A MÁQUINA C QUE TRANSFORMA $\triangleright c(M)$ EM $\triangleright c(M) z c(M)$

E SEJA $M_{H'}$ A MÁQUINA $C \longrightarrow M_H$

SE $c(M) \in H'$, ENTÃO $M_{H'}$ ACEITA $c(M)$

• CONSIDERE $\overline{H'} \subseteq \Sigma_{u}^{*}$

1) $w = c(M)$ E M NÃO PARA COM ENTRADA $c(M)$
2) $w = c(M)$ E M NÃO PROCESSA PALAVRAS EM Σ_{u}^{*}
3) w NÃO É UM PROGRAMA DE M.T.

PERGUNTA $\overline{H'}$ É R.E?

Teorema: $\overline{H'}$ não é R.E.

Prova: Suponha que $\overline{H'}$ é R.E. e seja N uma M.T. de aceita $\overline{H'}$

Pergunta: $c(N) \in H'$ ou $c(N) \in \overline{H'}$?

Caso 1: $c(N) \in H'$. Pela def. de H', então N para com $c(N)$

isso implica que $c(N)$ é aceita por N, portanto

$c(N) \in L_{aceita}(N) = \overline{H'}$. Uma contradição

Caso 2: $c(N) \in \overline{H'}$: $c(N)$ é do tipo 1,

Logo N é uma M.T. que não para com $c(N)$

$c(N) \notin L_{aceita}(N) = \overline{H'}$

Portanto, não há M.T. que aceita $\overline{H'}$ ∎