• ÁRVORES GRAMATICAIS OU ÁRVORES DE ANÁLISE SINTÁTICA

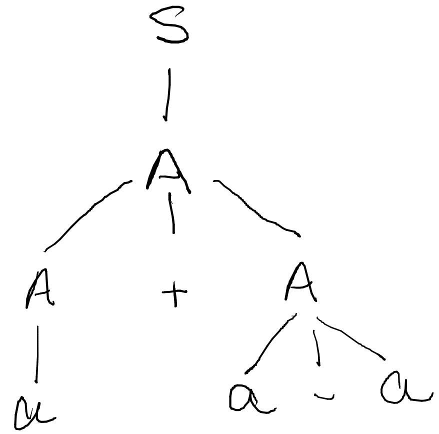
$$\left.\begin{array}{l} S \Rightarrow AB \Rightarrow aB \Rightarrow ab \\ Ab \Rightarrow ab \end{array}\right\} \text{GERAM A MESMA ÁRVORE}$$

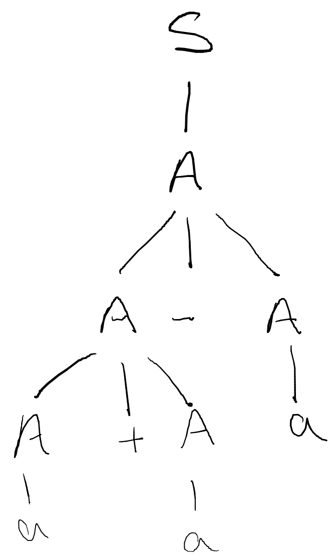
• GRAMÁTICAS ABÍGUAS

DEF: UMA GRAMÁTICA G É AMBÍGUA QUANDO HÁ UMA PALAVRA $w \in L(G)$ QUE É A COLHEITA DE DUAS ÁRVORES DISTINTAS

EX: $T = \{a, +, -\}$, $V = \{S, A\}$, $R = \begin{cases} S \rightarrow A \\ A \rightarrow A + A \mid A - A \mid a \end{cases}$

$w = a + a - a$





EXEMPLO UM POUCO MAIS GENÉRICO: L_1 E L_2 SÃO LLC COM GRAMÁTICAS

$$G_1 = (T_1, V_1, R_1), \quad G_2 = (T_2, V_2, R_2)$$

S_1 S_2

$$U = L_1 \cup L_2 \qquad G = (T, V, R)$$

$$T = T_1 \cup T_2$$

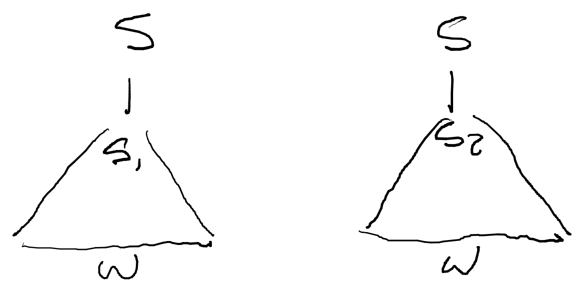
$$V = T_1 \cup T_2 \cup \{S\}$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$$

SE $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, ENTÃO G É AMBÍGUA.

POIS SE $w \in L_1 \cap L_2$ COM $S_1 \Rightarrow^* w$ E $S_2 \Rightarrow^* w$

ENTÃO



EX: A GRAMÁTICA G''_{EXP} COM AS REGRAS

$$\begin{cases} S \to E \\ E \to (E)R \mid VR \\ R \to +E \mid *E \mid \varepsilon \\ V \to \text{ID} \end{cases}$$

$$S \Rightarrow \underset{\uparrow}{u}RV \Rightarrow u+EV$$

SOMENTE
TERMINAIS

EX: $L = \{a(+a)^n : n \geq 0\} = \{a,\ a+a,\ a+a+a, \ldots\}$

$R_1 = \begin{cases} S \to A \\ A \to A+A \mid a \end{cases}$ ⇝ É AMBÍGUA

$R_2 = \begin{cases} S \to A \\ A \to A+a \mid a \end{cases}$ ⇝ NÃO É AMBÍGUA.

OBS: O PROBLEMA DE DECIDIR SE UMA GRAMÁTICA É AMBÍGUA É INDECIDÍVEL

DEF: UMA LINGUAGEM L É DITA INERENTEMENTE AMBÍGUA SE TODA GRAMÁTICA G T.Q. $L(G) = L$ É AMBÍGUA.

EX: $\{a^n b^m c^m d^n : n, m > 0\} \cup \{a^n b^n c^m d^m : n, m > 0\}$

LINGUAGENS REGULARES

- SEMPRE É POSSÍVEL OBTER UMA GRAMÁTICA QUE NÃO É AMBÍGUA PARA UMA LINGUAGEM REGULAR.

ALG: DADA GRAMÁTICA G PARA UMA LINGUAGEM REGULAR DEVOLVE GRAMÁTICA G' NÃO AMBÍGUA T.Q. $L(G) = L(G')$

1) DETERMINAR AFND M T.Q. $L(M) = L(G)$
2) DETERMINAR AFD M' T.Q. $L(M') = L(M)$
3) DETERMINAR GRAMÁTICA G' T.Q. $L(G') = L(M')$

GRAM REG. $G \rightarrow$ AFND
$\rightarrow$ AFD
$\rightarrow$ GRAMÁTICA REG. NÃO AMBÍGUA

BOMBEAMENTO

- COMO PROVAR QUE UMA LINGUAGEM NÃO É LLC

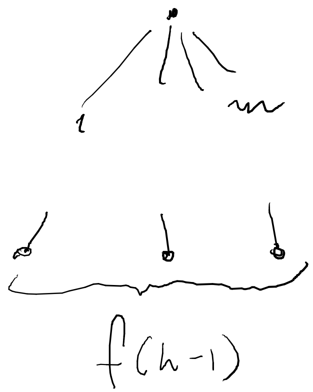
EX: $L_{abc} = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ NÃO É LLC

- VAMOS MOSTRAR QUE TODA LLC POSSUI UMA PROPRIEDADE ESPECIAL QUE POSSAMOS TESTAR

DEF: DIZEMOS QUE UMA ÁRVORE É m-ÁRIA (ENÉ) SE CADA VÉRTICE TEM NO MÁXIMO m FILHOS.

DEF: A ALTURA DE UMA ÁRVORE É O COMPRIMENTO DE UM CAMINHO MAIS LONGO ENTRE A RAIZ E UMA FOLHA

DEF: $f(h)$ = MÁX NÚMERO DE FOLHAS DE UMA ÁRVORE m-ÁRIA COM ALTURA h



EX: $f(1) = m$

TEMOS QUE $f(h) = m \cdot f(h-1) = m^h$

DEF: A AMPLITUDE $\alpha(G)$ DE UMA GRAMÁTICA G É O COMPRIMENTO MÁXIMO DAS PALAVRAS QUE APARECEM À DIREITA DAS REGRAS

EX: $X \to 0X1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$ TEM AMPLITUDE 3

OBS: TODA ÁRVORE GRAMATICAL DE G É $\alpha(G)$-ÁRIA

LEMA: SEJA G UMA GLC. SE X É UMA VARIÁVEL DE G E W É A COLHEITA DE UMA X-ÁRVORE DE ALTURA h ENTÃO

$$|w| \leq \alpha(G)^h$$

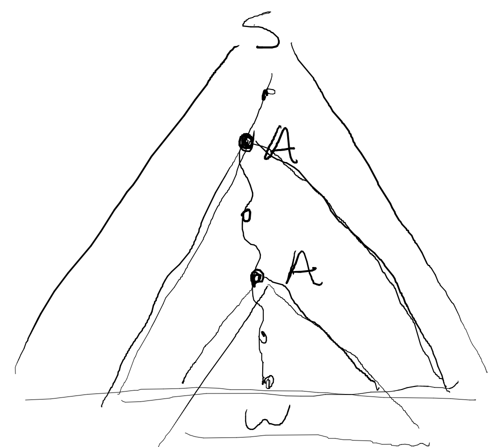
MAS SE A COLHEITA É MUITO GRANDE, ENTÃO A ÁRVORE É MUITO ALTA

EX: SUPONHA $|V| = 10$ E $\alpha(G) = 3$

SEJA w T.Q. $|w| > 3^{11}$.

SE UMA ÁRVORE T T.Q. $C(T) = w$

ENTÃO A ALTURA DE T É PELO MENOS 12



Lema de Bombeamento p/ LLC: Seja G uma GLC. Existe inteiro p, que depende apenas de G t.q. se $w \in L(G)$ e $|w| \geq p$, então existe decomposição de w como $w = uvxyz$, onde

1) $vy \neq \varepsilon$
2) $|vxy| \leq p$
3) $uv^n x y^n z \in L(G)$, para todo $n \geq 0$

Prova:

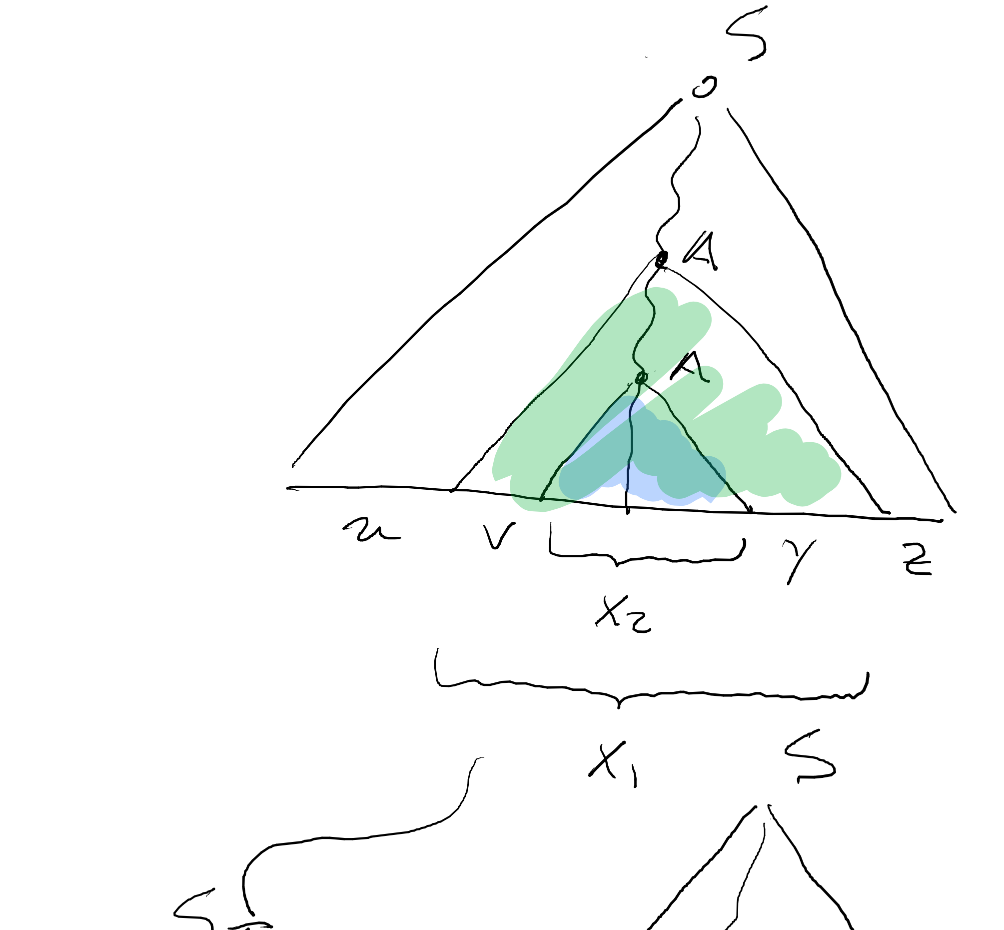
- Seja K o número de variáveis de G e tome $p = \alpha(G)^{K+1}$
- Seja $w \in L(G)$ com $|w| \geq p$, e seja T uma árvore de derivação p/ w.
- T tem altura pelo menos $K+1$
- Há caminho da raiz para uma folha que repete uma variável, digamos A
- Sejam v_1 e v_2 os dois últimos vértices rotulados com A

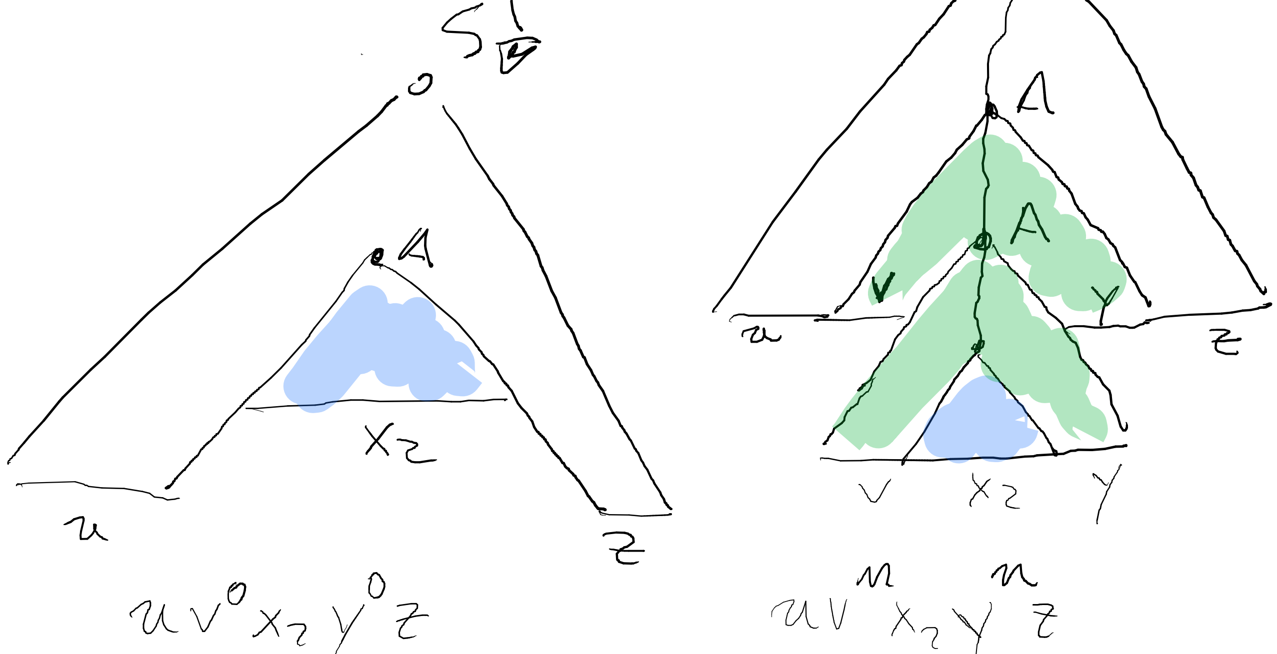
- Seja τ_i com raiz em v_i, $i=1,2$
- Seja $x_i = c(\tau_i)$

$\Rightarrow$ x_2 é subpalavra de x_1

$\Rightarrow$ $x_1 = v x_2 y$

- Como T é a menor possível, temos $|vy| \neq 0 \Rightarrow vy \neq \varepsilon$
- Como T_1 tem altura no máximo $k+1$, $|v x_2 y| \leq \alpha(G)^{k+1} = p$





- Como usar?

1) Supõe que a linguagem L é LCC
2) Considere uma gramática para L. Tome p dado pelo lema de Bomb.
   e escolha palavra $w \in L$ com $|w| \geq p$
3) Mostre que não é possível bombear w.

1) $vy \neq \varepsilon$
2) $|vxy| \leq p$
3) $uv^n x y^n z \in L(G)$, para todo $n \geq 0$

$w = uvxyz$

Ex: $L_{abc} = \{a^m b^m c^m : m \geq 0\}$

Se L_{abc} é LLC, então existe GLC para L.

Seja p dado pelo lema de Bomb.

Tome $w = a^m b^m c^m$ com $m \geq p$

$w = uvxyz$ com $|vxy| \leq p$

$a \cdots a \; b \cdots b \; c \cdots c$

vxy $\quad$ vxy $\quad$ vxy

vxy $\quad$ vxy

1) $vxy \subseteq a^m$ $\quad$ Tome $w' = uv^2xy^2z = a^{m'} b^m c^m$ com $m' > m$
   $\notin L_{abc}$
2) $vxy \subseteq a^m b^m$

$v, y \subseteq a^m b^m$

$a^{m'} b^{m'} c^m$

EX: $L_{PRIMOS} = \{ 0^p : p \text{ É PRIMO POSITO} \} = \{00, 000, 00000, 0^7, 0^{11}, \dots\}$

SE L_{PRIMOS} É LLC, ENTÃO EXISTE p DADO PELO LEMA DE BOMB.

SEJA m UM PRIMO MAIOR QUE p.

TOME $w = 0^m \in L_{PRIMOS}$

ESCREVA $w = uvxyz$ COM $|vxy| \leq p$ E $vy \neq \varepsilon$

TEMOS $|vy| = k > 0$

PELO LEMA DE BOMB. $xv^n xy^n z \in L_{PRIMOS}$ $\forall n$

TOME $n = m + 1$, TEMOS $w' = uv^{m+1}xy^{m+1}z$ ← É PRIMO?

$$= 0^{m + m \cdot k} = 0^{m(k+1)}$$

COMO $m(k+1)$ NÃO É PRIMO, $w' \notin L_{PRIMOS}$

LOGO L_{PRIMOS} NÃO É LIVRE DE CONTEXTO.