Gramática Livre de Contexto

→ Regras mais flexíveis que Gram. Regular

Def: Seja $G = (T, V, S, R)$. Dizemos que G é livre de contexto (GLC) se todas as regras são do tipo $X \longrightarrow w$, com $X \in V$ e $w \in (T \cup V)^*$

Obs: Toda Gram. Reg. é livre de contexto

Nem toda Gram. livre de contexto é regular.

Ex: G_1 com $T = \{0,1\}$, $V = \{S\}$, e $R = \{S \to 0S1, S \to \varepsilon\}$

Ex: G_2 com $T = \{0,1\}$, $V = \{S, X\}$ e $R = \{S \to X1X, X \to 0X, X \to \varepsilon\}$

Def: Uma linguagem L é livre de contexto (LLC) se existe GLC G t.q. $L(G) = L$.

Ex: $L(G_1) = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ Obs: Que não é regular

Teo: A classe das linguagens regulares é um subconjunto próprio da classe das LLCs

Ex: G_2: $S \Rightarrow \underline{X}1X \Rightarrow 0\underline{X}1X \Rightarrow 0^2X1\underline{X} \Rightarrow 0^2\underline{X}1 \Rightarrow 0^2 1$

Para indicar em qual variável foi aplicada a regra

Não é difícil ver que $L(G_2) = \{0^n 1 0^m : n, m \geq 0\}$ é regular

GRAMÁTICAS QUE NÃO SÃO LIVRES DE CONTEXTO

Ex: $T = \{a, b, c\}$, $V = \{S, X, Y\}$ e $R =$

$$
\begin{array}{ll}
S \to abc & S \to aXbc \\
Xb \to bX & Xc \to Ybc^2 \\
bY \to Yb & aY \to a^2 \\
aY \to a^2X &
\end{array}
$$

Temos $a^2b^2c^2 \in L(G)$:

$$S \Rightarrow aXbc \Rightarrow abXc \Rightarrow abYbc^2 \Rightarrow aYb^2c^2 \Rightarrow a^2b^2c^2$$

Também temos $a^n b^n c^n \in L(G)$ $\forall n$.

Vamos ver que $L(G)$ não é LLC.

Ex: Gramática que gera fórmulas que sejam expressões aritméticas com soma e multiplicação

- Para saber se uma fórmula é legítima não precisamos conhecer as variáveis, apenas as posições
- Vamos usar o mesmo símbolo (id) para as variáveis

$G_{EXP} = (T, V, S, R)$ com $T = \{id, +, *, (,)\}$, $V = \{E\}$, $S = E$

Não queremos expressões como $(+id)id*$

Regras:

$$
\begin{array}{l}
E \to E + E \\
E \to E * E \\
E \to (E) \\
E \to id
\end{array}
$$

→ DERIVAR id + id * id:

$$E \Rightarrow E + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E * E \Rightarrow id + \underline{E} * E \Rightarrow id + id * E \Rightarrow id + id * id$$

OU: $E \Rightarrow \underline{E} * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow \cdots \Rightarrow id + id * id$ AMBIGUIDADE

→ PODEMOS SER MAIS SISTEMÁTICOS E APLICAR UMA REGRA SEMPRE NA VARIÁVEL MAIS À ESQUERDA DA PALAVRA

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow id + E \Rightarrow id + E * E \Rightarrow id + id * E \Rightarrow id + id * id$$

DEF: SEJA G UMA LLC E $w \in L(G)$. UMA DERIVAÇÃO MAIS À ESQUERDA DE w EM G É AQUELA NA QUAL EM CADA PASSO, A VARIÁVEL À QUAL A REGRA É APLICADA É A QUE ESTÁ MAIS À ESQUERDA DA PALAVRA.

Analog. PODEMOS DEFINIR DERIVAÇÃO MAIS À DIREITA.

→ G_{EXP} PODE SER USADA PARA DAR PRECEDÊNCIA NAS OPERAÇÕES

EX: PALÍNDROMOS

DEF: UM PALÍNDROMO É UMA PALAVRA w CUJO REFLEXO w^R É IGUAL A w.

OBS:

1) w É PALÍNDROMO SSE COMEÇA E TERMINA COM O MESMO SÍMBOLO.

2) $\sigma w \sigma^R$ É PALÍNDROMO SSE w É PALÍNDROMO

$G_{Pal} = (T, V, S, R)$ COM $T = \{0, 1\}$ $V = \{S\}$ E

REGRAS: $S \to 0S0$, $S \to 1S1$, $S \to \varepsilon$, $S \to 0$, $S \to 1$

COMPACTANDO $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon \mid 0 \mid 1$

OBS: PODEMOS TAMBÉM CONSTRUIR G^+_{Pal} A GRAM. QUE GERA APENAS PALÍNDROMOS DE COMP. PAR.

FECHAMENTO LLC

1. **UNIÃO**: SE L_1 E L_2 SÃO LLC, ENTÃO EXISTEM

$$G_1 = (T_1, V_1, S_1, R_1) \quad E \quad G_2 = (T_2, V_2, S_2, R_2)$$

T.Q. $L(G_1) = L_1$ E $L(G_2) = L_2$

TOME $G_U = (T_U, V_U, S_U, R_U)$ EM QUE

$T_U = T_1 \cup T_2$, $V_U = V_1 \cup V_2 \cup \{S_U\}$ E

$$R_U = R_1 \cup R_2 \cup \{S_U \to S_1 \mid S_2\}$$

2. **CONCATENAÇÃO**: $G_\circ = (T_\circ, V_\circ, S_\circ, R_\circ)$ EM QUE (SUPONDO $V_1 \cap V_2 = \phi$)

$T_\circ = T_1 \cup T_2$, $V_\circ = V_1 \cup V_2 \cup \{S_\circ\}$ E

$$R_\circ = R_1 \cup R_2 \cup \{S_\circ \to S_1 S_2\}$$

3. **ESTRELA DE KLEENE**: $G_* = (T_*, V_*, S_*, R_*)$

$T_* = T_1$, $V_* = V_1 \cup \{S_*\}$ E

$$R_* = R_1 \cup \{S_* \to S_1 S_* \mid \varepsilon\}$$

4. INTERSEÇÃO: NÃO É VERDADE QUE SE L_1 E L_2 SÃO LLC, ENTÃO $L_1 \cap L_2$ É LLC

EX: $L_1 = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\}$

$L_2 = \{a^m b^n c^n : n, m \geq 0\}$

SÃO LLC, MAS $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ NÃO É LLC.

5. COMPLEMENTO: TAMBÉM NÃO VALE:

LEMBRE-SE QUE $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

SUPONHA QUE PARA TODA LLC L, TEMOS $\overline{L}$ É LLC.
LOGO, SE L_1, L_2 SÃO LLC, ENTÃO

$$\overline{L_1} \cup \overline{L_2} = \overline{L_1 \cap L_2} \text{ É LLC}$$

E $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$ É LLC. CONTRADIÇÃO COM EX ANTERIOR

6. DIFERENÇA: SUPONHA QUE PARA TODAS LLCS L_1, L_2 TEMOS $L_1 \setminus L_2$ É LLC.
MAS $L_1 = \Sigma^*$ É LLC, logo

$\overline{L_2} = \Sigma^* \setminus L_2$ É LLC, UMA CONTRADIÇÃO

EX: $L_{IN} = \{a^i b^j c^k : i = j \text{ ou } j = k, \ i,j,k \geq 0\}$ É LLC

DE FATO $L_{in} = L_1 \cup L_2$ EM QUE

$$L_1 = \{a^i b^j c^k : i = j, \ i,j,k \geq 0\} = L_4 \cdot c^*$$

CONCATENAÇÃO

$$L_2 = \{a^i b^j c^k : j = k, \ i,j,k \geq 0\} = a^* \cdot L_5$$

EM QUE

$$L_4 = \{a^i b^i : i \geq 0\} \quad \text{E} \quad L_5 = \{b^i c^i : i \geq 0\}$$

E L_4 E L_5 SÃO REGULARES

$$T = \{a, b, c\}, \quad V = \{S', S'', S''', S_1, S_2, S_3, S_4\}$$

$$R = \{ S \rightarrow S' \mid S'',$$

$$S' \rightarrow S_1 S_4, \quad S'' \rightarrow S_3 S_2$$

$$S_1 \rightarrow a S_1 b \mid \varepsilon$$

$$S_2 \rightarrow b S_2 c \mid \varepsilon$$

$$S_3 \rightarrow a S_3 \mid \varepsilon$$

$$S_4 \rightarrow S_4 c \mid \varepsilon \}$$