

GRAMÁTICA

DEF: Uma **GRAMÁTICA** é uma quadrupla (T, V, S, R) em que

- T : CONJUNTO FINITO DE SÍMBOLOS - **TERMINAIS**
 - V : CONJUNTO FINITO DE SÍMBOLOS - **VARIÁVEIS**
 - $S \in V$: **SÍMBOLO INICIAL**
 - R : CONJUNTO DE **REGRAS**
- $T \cap V = \emptyset$

DEF: Uma **REGRA** tem o formato $u \rightarrow v$ em que

- u e v SÃO PALAVRAS DO ALFABETO: $u, v \in (T \cup V)^*$
- u CONTÉM Pelo MENOS UM SÍMBOLO DE V : $u \notin T^*$

DEF: DADA $G = (T, V, S, R)$ e $x, y \in (T \cup V)^*$,

DIZEMOS QUE y PODE SER DERIVADO EM UM PASSO A PARTIR DE x ,

DENOTADO POR $x \Rightarrow y$, SE EXISTE REGRA $u \rightarrow v \in R$ T.Q.

$$x = x' u x'' \quad \text{e} \quad y = x' v x''$$

\leadsto A DERIVAÇÃO (EM UM PASSO) SUBSTITUI UMA SUBPALAVRA.

DEF: Uma DERIVAÇÃO $x \Rightarrow^* y$ É UMA SEQUÊNCIA DE DERIVAÇÕES EM UM PASSO

\hookrightarrow POSSIVELMENTE ZERO

$$x \Rightarrow y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow y$$

OBS: $x \Rightarrow^* x$

DEF: A LINGUAGEM GERADA POR G É O CONJUNTO DE PALAVRAS

$$L(G) = \{w \in T^* : S \Rightarrow w\}$$

↳ APENAS COM SÍMBOLOS TERMINAIS.

DEF: DIZEMOS QUE UMA GRAMÁTICA $G = (T, V, S, R)$ É REGULAR SE CADA ELEMENTO DE R É DE UM DOS FORMATOS A SEGUIR

1. $X \rightarrow aY$ ↳ NO MÁXIMO UMA VARIÁVEL
↳ $a \in T$
2. $X \rightarrow a$ SEMPRE UMA VARIÁVEL ISOLADA
3. $X \rightarrow \epsilon$

EM QUE $X, Y \in V$ e $a \in T$

EX: $G = (T, V, S, R)$, $T = \{0, 1\}$, $V = \{X, Y, Z\}$, $S = X$

$R = \left\{ \begin{array}{ll} X \rightarrow 0X & 1 \\ X \rightarrow 1Y & 2 \\ Y \rightarrow 0 & 3 \\ Y \rightarrow 1X & 4 \\ Y \rightarrow 1Z & 5 \\ Z \rightarrow \varepsilon & 6 \end{array} \right.$

Qual é a linguagem gerada por G?

$0011 \in L(G) : X \xrightarrow{1} 0X \xrightarrow{1} 00X \xrightarrow{2} 001Y \xrightarrow{5} 0011Z \xrightarrow{6} 0011$

GRAMÁTICAS REGULARES E AUTÔMATOS FINITOS

OBJ: MOSTRAR QUE AS LINGUAGENS GERADAS POR GRAMÁTICAS REGULARES SÃO PRECISAMENTE AS LINGUAGENS REGULARES.

1. DADO GRAM. REG. G , VAMOS CRIAR UM AFND QUE ACEITA $L(G)$

2. DADO AFD A VAMOS CRIAR GRAMÁTICA REGULAR G T.q. $L(G) = L(A)$.

1) $G = (T, V, S, R)$ REGULAR

VAMOS CONSTRUIR UM AFND $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \Delta)$ t.q.

$$L(A) = L(G)$$

• $\Sigma = T$

• $Q = V \cup \{q_f\}$

• $q_0 = S$

• $F = \{q_f\}$

• Δ DEFINIDO POR

a) se $X \rightarrow aY \in R$, ADICIONAMOS

$$Y \xrightarrow{\Delta} \Delta(X, a)$$

b) se $X \rightarrow a \in R$, ADICIONAMOS

$$q_f \xrightarrow{\Delta} \Delta(X, a)$$

c) se $X \rightarrow \varepsilon \in R$, ADICIONAMOS

$$q_f \xrightarrow{\Delta} \Delta(X, \varepsilon)$$

ε^T
 \downarrow

• Δ DEFINIDO POR

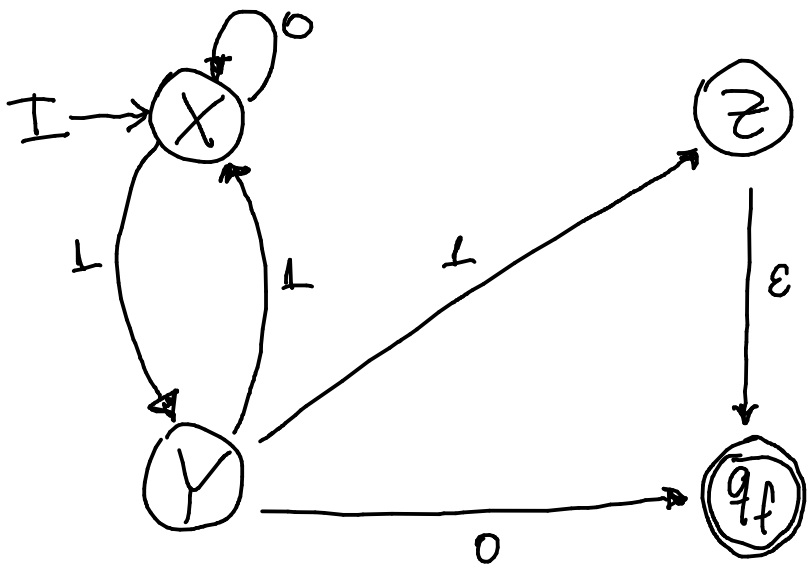
a) SE $X \rightarrow aY \in R$, ADICIONAMOS $Y \in \Delta(X, a)$

b) SE $X \rightarrow a \in R$, ADICIONAMOS $q_f \in \Delta(X, a)$

c) SE $X \rightarrow \epsilon \in R$, ADICIONAMOS $q_f \in \Delta(X, \epsilon)$

EX: $R = \{ X \xrightarrow{a} 0X, X \xrightarrow{a} 1Y, Y \xrightarrow{b} 0, Y \xrightarrow{a} 1X, Y \xrightarrow{a} 1Z, Z \xrightarrow{c} \epsilon \}$

$S = X$



$X \Rightarrow 0X$	$(X, 011)$
$\Rightarrow 00X$	$\vdash (X, 011)$
$\Rightarrow 001Y$	$\vdash (X, 11)$
$\Rightarrow 0011Z$	$\vdash (Y, 1)$
$\Rightarrow 0011$	$\vdash (Z, \epsilon)$
$\Rightarrow 0011$	$\vdash (qf, \epsilon)$

2) DADO AFD $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$

VAMOS CONSTRUIR GRAM. REG. $G = (T, V, S, R)$ T.q. $L(G) = L(A)$

• $T = \Sigma$

• $V = Q$

• $S = q_0$

• R :

a) SE $q' = \delta(q, a)$, ADICIONAMOS $q \rightarrow aq'$ ΔR

b) SE $q \in F$, ADICIONAMOS $q \rightarrow \epsilon$ ΔR

a) se $q' = \delta(q, a)$, ADICIONAMOS $q \rightarrow a q' \Delta R$

b) se $q \in F$, ADICIONAMOS $q \rightarrow \epsilon \Delta R$

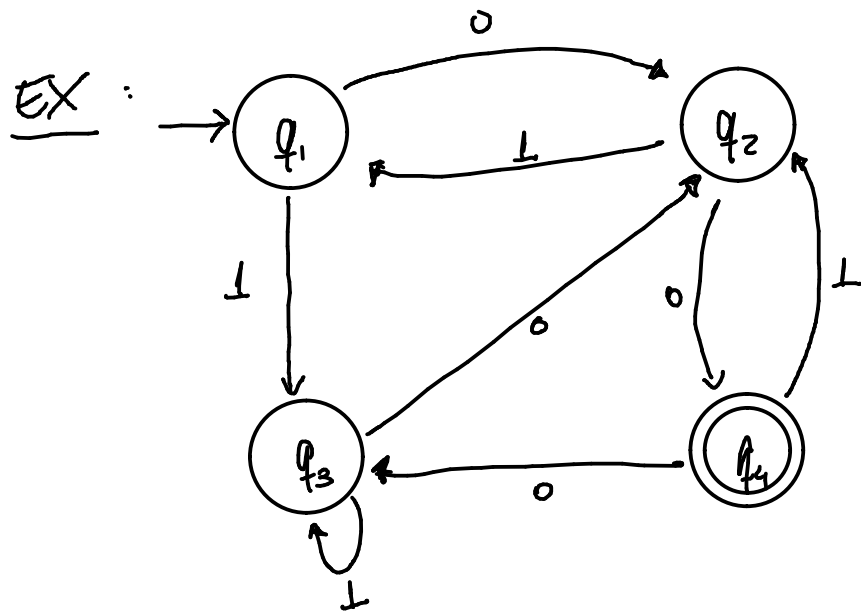
$$T = \Sigma = \{0, 1\}$$

$$V = Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$S = q_0 = q_1$$

$$R = \begin{matrix} & a & b \\ 1 & \left\{ \begin{array}{l} q_1 \rightarrow 0q_2, q_1 \rightarrow 1q_3 \\ q_2 \rightarrow 0q_4, q_2 \rightarrow 1q_1 \\ q_3 \rightarrow 0q_2, q_3 \rightarrow 1q_3 \\ q_4 \rightarrow 0q_3, q_4 \rightarrow 1q_2 \end{array} \right. & \end{matrix}$$

$$\stackrel{c}{\Rightarrow} 01100$$



01100 : (q1, 01100)
 1 (q2, 1100)
 1 (q1, 100)
 1 (q3, 00)
 1 (q2, 0)
 1 (q4, ε)

q1
 $\Rightarrow 0q_2$ 1a
 $\Rightarrow 01q_1$ 2b
 $\Rightarrow 011q_3$ 1b
 $\Rightarrow 0110q_2$ 3a
 $\Rightarrow 01100q_4$ 2a

TEOREMA: AS SEGUINTEs AFIRMAÇÕES SÃO EQUIVALENTES

- 1) L É UMA LINGUAGEM REGULAR
- 2) L É ACEITO POR UM AFD
- 3) L É ACEITA POR UM AFND
- 4) L PODE SER GERADA POR UMA EXPRESSÃO REGULAR
- 5) L PODE SER GERADA POR UMA GRAMÁTICA REGULAR

GRAMÁTICA LIVRE DE CONTEXTO

~> REGRAS MAIS FLEXÍVEIS QUE A GRAMÁTICA REGULAR (GLC)

DEF: DIZEMOS QUE UMA GRAMÁTICA $G = (T, V, S, R)$ É LIVRE DE CONTEXTO SE TODAS AS SUAS REGRAS SÃO DO TIPO

$$X \rightarrow w$$

COM $X \in V$ E $w \in (T \cup V)^*$

Lembre-se que

Gram. REG:

$$X \rightarrow aY$$

$$X \rightarrow a$$

$$X \rightarrow \epsilon$$

OBS: TODA GRAMÁTICA REGULAR É LIVRE DE CONTEXTO

NEM TODA GRAMÁTICA LIVRE DE CONTEXTO É REGULAR

EX: $R = \{ S \rightarrow OS, S \rightarrow I, X \rightarrow XX \}$

EX: G_1 com $T = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$ e $R = \{S \rightarrow 0S1, S \rightarrow \epsilon\}$

$$L(G_1) = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$$

EX: G_2 com $T = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$ e $R = \{S \rightarrow X1X, X \rightarrow 0X, X \rightarrow \epsilon\}$

$$L(G_2) = \{0^m 1 0^m : m \in \mathbb{N}\} = 0^* 1 0^*$$

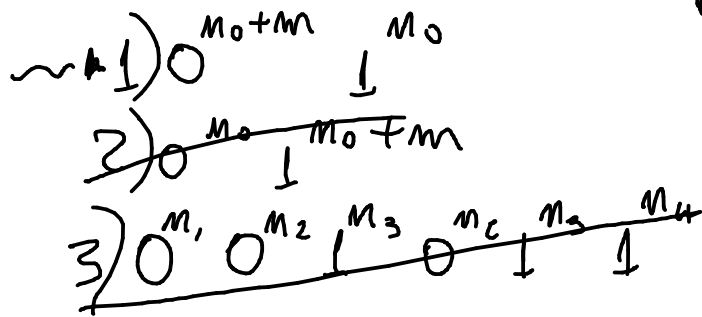
(LLC)

DEF: Uma linguagem L é **livre de contexto** se existe GLC G t.q. $L(G) = L$.

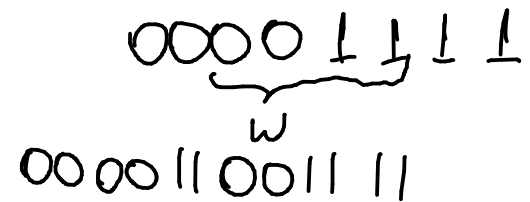
EX: $L(G_1) = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma linguagem livre de contexto

que **NÃO É REGULAR**

$w = xyz$
 $x y^k z \in L$



$\notin L(G_1)$



Teo: A classe das linguagens regulares é um subconjunto próprio

DA classe das LLCs

EX: G_2 com $T = \{0, 1\}$, $V = S$ e $R = \{S \xrightarrow{(1)} X \perp X, X \xrightarrow{(2)} 0X, X \xrightarrow{(3)} \epsilon\}$

$$L(G_2) = \{0^m \perp 0^m : m \in \mathbb{N}\} = 0^* \perp 0^*$$

$$0^2 \perp \in L(G_2)$$

$$S \Rightarrow \underline{X} \perp \underline{X} \xrightarrow{(2)} 0 \underline{X} \perp \underline{X} \xrightarrow{(2)} 00 \underline{X} \perp \underline{X} \xrightarrow{(3)} 00 \perp \underline{X} \xrightarrow{(3)} 00 \perp$$

$$\Rightarrow \underline{X} \perp \underline{X} \xrightarrow{(3)} \underline{X} \perp \xrightarrow{(2)} 0 \underline{X} \perp \xrightarrow{(2)} 00 \underline{X} \perp \xrightarrow{(3)} 00 \perp$$

↳ INDICA EM QUAL VARIÁVEL APLICAMOS A REGRA

GRAMÁTICAS QUE NÃO SÃO LIVRES DE CONTEXTO

ex: $T = \{a, b, c\}$, $V = \{S, X, Y\}$

$$R = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \quad S \rightarrow abc & 5 \quad S \rightarrow aXbc \\ 2 \quad Xb \rightarrow bX & 6 \quad Xc \rightarrow Ybc^2 \\ 3 \quad bY \rightarrow Yb & 7 \quad aY \rightarrow a^2 \\ 4 \quad aY \rightarrow a^2X & \end{array} \right. \quad \left. \vphantom{R} \right\}$$

TEMOS $a^2b^2c^2 \in L(G)$

$$\begin{aligned} S &\stackrel{5}{\Rightarrow} a\underline{X}bc \stackrel{2}{\Rightarrow} ab\underline{X}c \stackrel{6}{\Rightarrow} ab\underline{Y}bc^2 \\ &\stackrel{3}{\Rightarrow} \underline{aY}b^2c^2 \stackrel{7}{\Rightarrow} a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

TEMOS QUE $a^m b^m c^m \in L(G) \quad \forall m$

CONJ. $L(G) = \{a^m b^m c^m : m \in \mathbb{N}\}$

EX: GRAMÁTICA QUE GERA UMA FÓRMULA LEGÍTIMA,

$G_{exp} = (T, V, S, R)$ COM $T = \{id, +, *, (,)\}$, $V = \{E\}$, $S = E$

REGRAS :

$$E \rightarrow E + E$$

$$E \rightarrow E * E$$

$$E \rightarrow (E)$$

$$E \rightarrow id$$

$$3 \cdot x + 7$$

$$3 \cdot y + 7$$

$$7 \cdot y + 3$$

→ NÃO PRECISAMOS CONHECER AS VARIÁVEIS, APENAS SUAS POSIÇÕES

→ NÃO QUEREMOS EXPRESSÕES DO TIPO $(+id) id * E T^*$

→ O MESMO SÍMBOLO id PARA VARIÁVEIS

REGRAS :

$$E \rightarrow E + E$$

$$E \rightarrow E * E$$

$$E \rightarrow (E)$$

$$E \rightarrow id$$

AMBÍGUA

$$\underline{\underline{7 + 8.52}}$$

~> DERIVAR id + id * id

$$E \Rightarrow E + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E * E \Rightarrow id + \underline{E} * E \Rightarrow id + id * \underline{E} \Rightarrow \underline{id + id * id}$$

$$E \Rightarrow \underline{E * E} \Rightarrow \underline{E + E * E} \Rightarrow id + \underline{E} * E \Rightarrow id + id * \underline{E} \Rightarrow \underline{\underline{id + id * id}}$$

REGRAS :

$$E \rightarrow (E + E)$$

$$E \rightarrow (E * E)$$

$$E \rightarrow id$$

AMBÍGUA

~> DERIVAR ~~id + id * id~~ ~> $\left((id + id) * id \right) \text{ ou } \left(id + (id * id) \right)$ 7 + 8.52

$$E \Rightarrow E + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E * E \Rightarrow id + \underline{E} * E \Rightarrow id + id * \underline{E} \Rightarrow id + id * id$$

$$E \Rightarrow \underline{E * E} \Rightarrow \underline{E + E * E} \Rightarrow id + \underline{E} * E \Rightarrow id + id * \underline{E} \Rightarrow id * id$$

DEF: SEJA G UMA GLC E $w \in L(G)$.

UMA DERIVAÇÃO MAIS À ESQUERDA DE w EM G É AQUELA NA QUAL EM CADA PASSO, A VARIÁVEL À QUAL A REGRA FOI APLICADA É A VARIÁVEL MAIS À ESQUERDA DA PALAVRA,

ANALOGAMENTE, PODEMOS DEFINIR DERIVAÇÃO MAIS À DIREITA

EX: PALÍNDROMOS

DEF: UM PALÍNDROMO É UMA PALAVRA w CUJO REFLEXO w^R É IGUAL A w .

EX: LOL , 00 111 00100111

OBS:

- 1) w É UM PALÍNDROMO SE COMEÇA E TERMINA COM O MESMO SÍMBOLO σ , E
- 2) $w = \sigma w' \sigma$ EM QUE w' É UM PALÍNDROMO.

$G_{PAL} = (T, V, S, R)$ COM $T = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, E

$R = \{ S \rightarrow 0S0, S \rightarrow 1S1, S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow 0, S \rightarrow 1 \}$

COMPACTA : $S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \epsilon \mid 0 \mid 1$

OBS: COMO GERAR APENAS PALÍNDROMOS DE COMPRIMENTO PAR?

FECHAMENTO LLC

SUPONDO $V_1 \neq V_2$

1. UNIÃO : SEJAM L_1 E L_2 DUAS LLCs.

SEJA $G_i = (T_i, V_i, S_i, R_i)$ A GRAMÁTICA QUE GERA L_i , $i=1,2$.

TOME $G_U = (T_U, V_U, S_U, R_U)$ EM QUE

$$T_U = T_1 \cup T_2$$

$$V_U = V_1 \cup V_2 \cup \{S_U\}$$

$$R_U = R_1 \cup R_2 \cup \{S_U \rightarrow S_1 \mid S_2\}$$

SE $w_i \in L_i$. ENTÃO $S_i \stackrel{R_i}{\Rightarrow}^* w_i$. LOGO $S_U \Rightarrow S_i \stackrel{R_i}{\Rightarrow} w_i$, $i=1,2$

$$\text{LOGO } L(G_U) = L_1 \cup L_2$$

2.
CONCATENAÇÃO

$$G_{\bullet} = (T_{\bullet}, V_{\bullet}, S_{\bullet}, R_{\bullet})$$

SUPONDO $V_1 \neq V_2$

$$T_{\bullet} = T_1 \cup T_2$$

$$V_{\bullet} = V_1 \cup V_2 \cup \{S_{\bullet}\}$$

$$R_{\bullet} = R_1 \cup R_2 \cup \{S_{\bullet} \rightarrow S_1 S_2\}$$

$$w_1 \in L_1$$

$$w_2 \in L_2$$

$$w_1 w_2 \in L_{\bullet} = L_1 L_2$$

3.
ESTRELA DE KLEENE

$$G_{*} = (T_{*}, V_{*}, S_{*}, R_{*})$$

$$T_{*} = T_1, \quad V_{*} = V_1 \cup S_{*}$$

$$R_{*} = R_1 \cup \{S_{*} \rightarrow S, S_{*} \mid \epsilon\}$$

$$w \in L_1, \quad w_1, w_2, \dots, w_k \in L$$

$$w_{*} \in L_{*}, \quad w_1, w_2, \dots, w_k \in L_{*}$$

$$\epsilon, w, ww, w \dots w$$

LEMBRE-SE QUE $\{a^n b^m c^n : n \in \mathbb{N}\}$ NÃO É LLC

4. INTERSECÇÃO : NÃO É VERDADE QUE SE L_1, L_2 SÃO LLC,
ENTÃO $L_1 \cap L_2$ É LLC.

EX: $L_1 = \{a^n b^m c^m : n, m \in \mathbb{N}\}$ SÃO LLC

$L_2 = \{a^m b^n c^n : n, m \in \mathbb{N}\}$

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$ QUE NÃO É LLC

OBS: JÁ SABEMOS QUE $L_{ab} = \{a^n b^m : n \in \mathbb{N}\}$ E $L_{bc} = \{b^n c^m : n \in \mathbb{N}\}$
SÃO LLC.

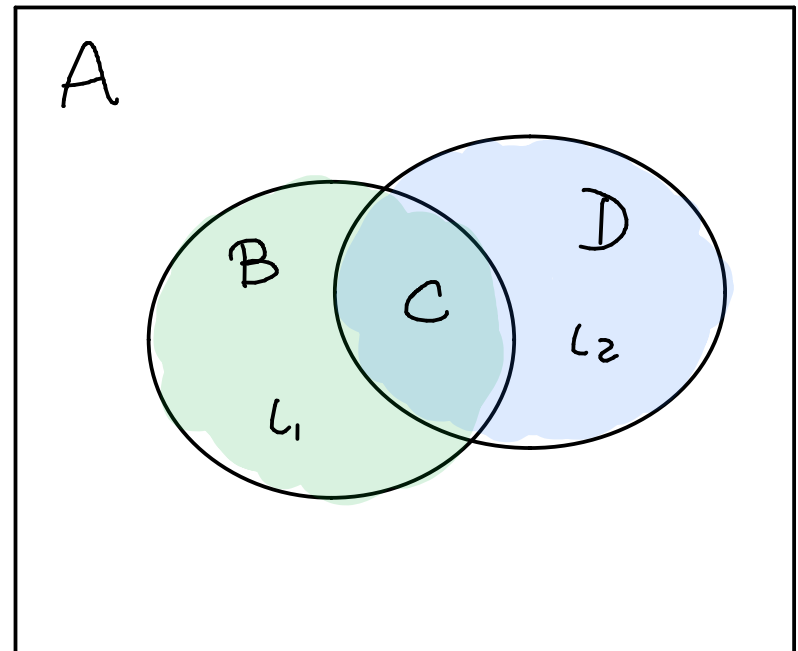
LOGO $L_{ab} \cdot \{c\}_*$ E $\{a\}_* \cdot L_{bc}$ SÃO LLC.

COMPLEMENTO : TAMBÉM NÃO VALE.

LEMBRE-SE QUE $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

SUPONHA
QUE O COMPLEMENTO DE UMA LLC É LLC,
ENTÃO

- 1) $\overline{L_1}, \overline{L_2}$ É LLC
- 2) LOGO, A UNIÃO $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ É LLC
- 3) FINALMENTE $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ É LLC



$\{0, 1\}^*$

$$\overline{L_1} = A \cup D$$

$$\overline{L_2} = A \cup B$$

$$\overline{L_1} \cup \overline{L_2} = A \cup B \cup D$$

$$\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = C = L_1 \cap L_2$$

DIFERENÇA: TAMBÉM NÃO É VERDADE.

SUPONHA QUE PARA TODAS LLCs L_3 e L_4 TEMOS QUE $L_3 \setminus L_4 \in \text{LLC}$.

TOME $L_3 = \sum^*$, QUE É REGULAR e, PORTANTO, É LLC.

E NOTE QUE $\overline{L_4} = L_3 \setminus L_4$

ÁRVORES DE ANÁLISE SINTÁTICA

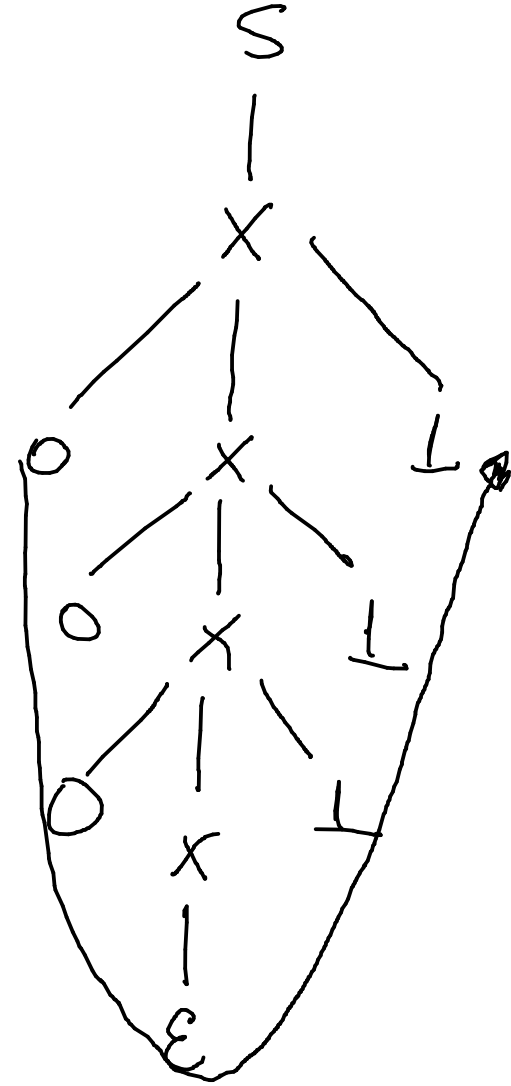
EX: $S \rightarrow X$

$X \rightarrow OX \mid \epsilon$

$w = 000111$

$S \Rightarrow X \Rightarrow OX \Rightarrow OOX11$

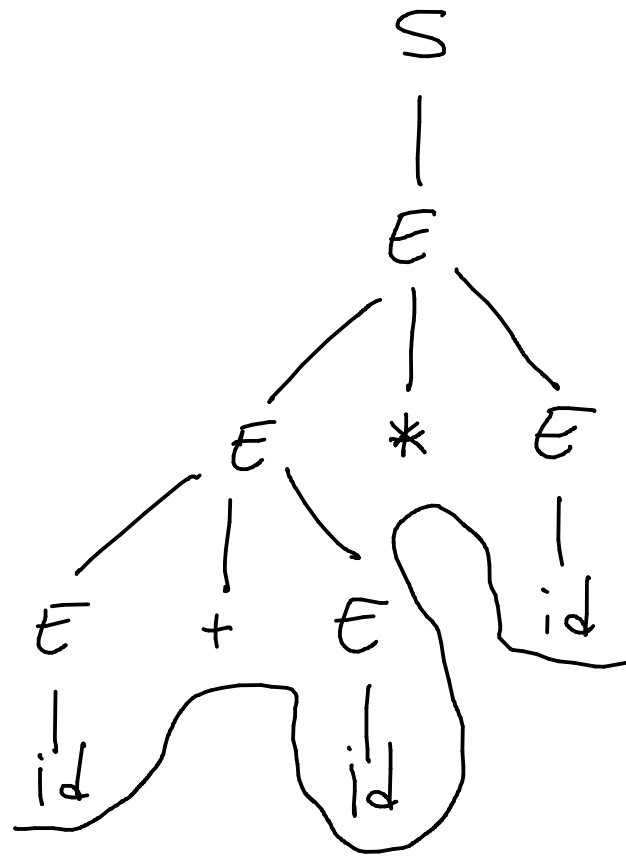
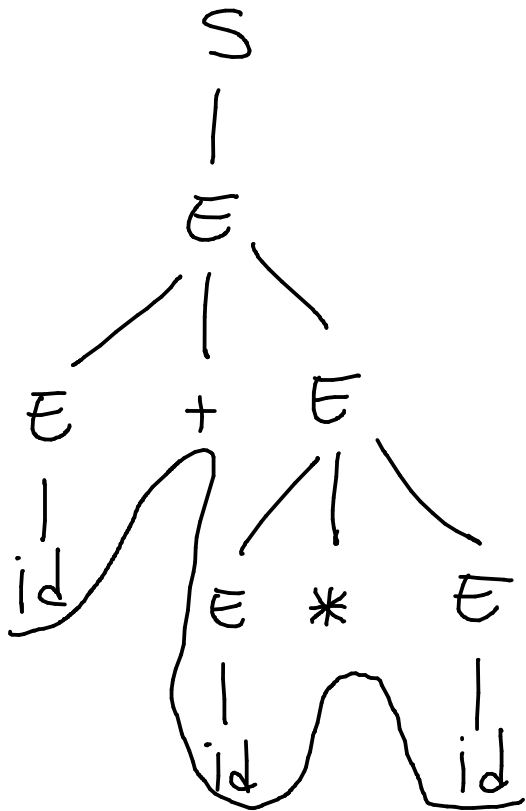
$\Rightarrow OOX111 \Rightarrow OOX111$



Ex: $S \rightarrow E$

$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid id$

$w = id + id * id$



DEFINIÇÃO FORMAL

- **ÁRVORE**: GRAFOS SEM CICLOS

- Aqui: "ORIENTADOS", SEM SETAS, "DE CIMS PARA BAIXO"

1) Há ÚNICO VÉRTICE CHAMADO DE RAÍZ

2) Os SUCESSORES DE UM VÉRTICE SÃO TOTALMENTE ORDENADOS

"DA ESQUERDA PARA DIREITA"

↳ PORQUE QUEREMOS ESCREVER DA ESQUERDA P/ DIREITA

DEF.: SEJA v' UM VÉRTICE DA ÁRVORE. HÁ UM ÚNICO CAMINHO QUE LIGA ELE À RAÍZ.

SEJA v UM VÉRTICE NESTE CAMINHO

- v É ASCENDENTE DE v' , E v' É DESCENDENTE DE v
- SE v E v' ESTÃO SEPARADOS POR UMA ÚNICA ARESTA ENTÃO v É PAI DE v' E v' É FILHO DE v
- FILHOS DO MESMO PAI SÃO IRMÃOS
- VÉRTICE SEM FILHOS É UMA FOLHA
- VÉRTICE QUE NÃO É FOLHA É INTERIOR

→ A ORDENAÇÃO ENTRE IRMÃOS PODE SER ESTENDIDA PARA UMA ORDENAÇÃO DAS FOLHAS.

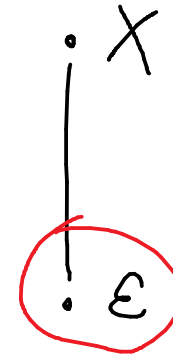
DEFINIMOS ÁRVORES DE ANÁLISE SINTÁTICA RECURSIVAMENTE

FIXE GRAMÁTICA $G = (T, V, S, R)$

BÁSICAS: $\sigma \in T$,



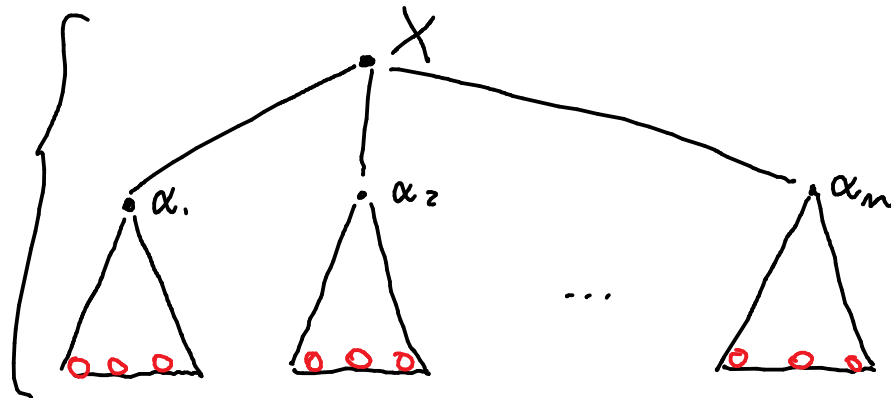
$X \in V \in X \rightarrow \epsilon \in R$



REGRAS DE COMBINAÇÃO: T_1, \dots, T_m ÁRVORES COM RAÍZES $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, RESP.

SE $X \rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \in R$, ENTÃO

É UMA
 X -ÁRVORE

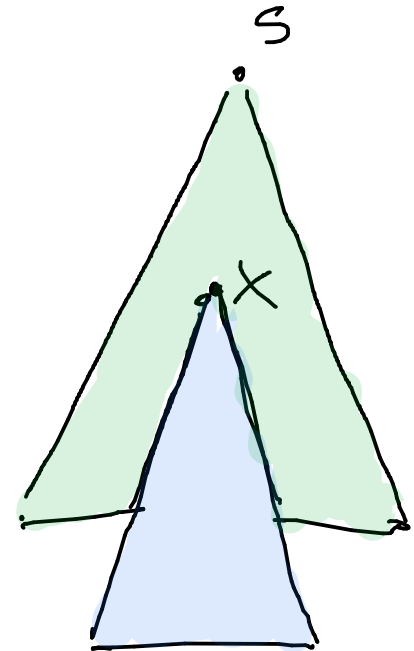
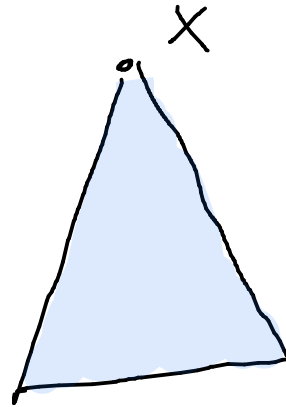
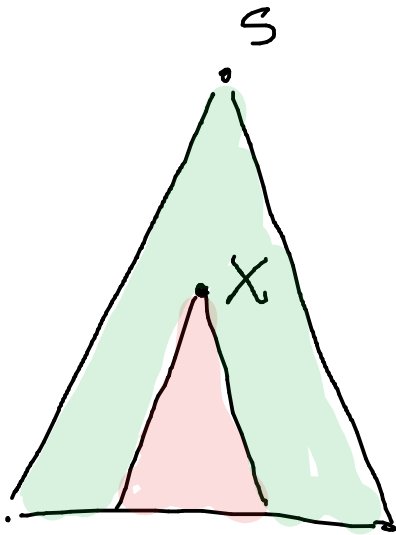


É ÁRVORE, COM **REGRAS ASSOCIADAS**

$X \rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$

- EM PARTICULAR, PELAS REGRAS BÁSICAS, AS FOLHAS DE UMA ÁRVORE DE ANÁLISE SINTÁTICA SÃO APENAS ELEMENTOS EM $T \cup \{\epsilon\}$

- E OS VÉRTICES INTERNOS SÃO VARIÁVEIS.



- OBS: SE UMA ÁRVORE \mathcal{T} POSSUI UM VÉRTICE ROTULADO POR X, PODEMOS SUBSTITUIR TODA SUBÁRVORE DE \mathcal{T} ENRAIZADA EM X, POR OUTRA ÁRVORE ENRAIZADA EM X.

COLHEITA

COLHEITA OU RESULTADO DE UMA ÁRVORE É UMA FUNÇÃO C QUE LEVA ÁRVORES EM PALAVRAS

BÁSICAS

$$C \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \sigma \end{array} \right) = \sigma$$

$$C \left(\begin{array}{c} \cdot \\ X \\ \vdots \\ \cdot \\ \epsilon \end{array} \right) = \epsilon$$

COMBINAÇÃO

$$C \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ X \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \cdot \\ \alpha_1 \\ T_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \alpha_2 \\ T_2 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \alpha_m \\ T_m \end{array} \end{array} \right) = C \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \alpha_1 \\ T_1 \end{array} \right) C \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \alpha_2 \\ T_2 \end{array} \right) \dots C \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \alpha_m \\ T_m \end{array} \right)$$

$$C(T) = C(T_1) C(T_2) \dots C(T_m)$$

- COMO AS FOLHAS ESTÃO ORDENADAS, NÃO HÁ **AMBIGUIDADE** NA COLHEITA.

DEF: UMA ÁRVORE COM RAIZ X É UMA X -ÁRVORE

DEF: SE $w \in L(G)$, ENTÃO UMA ÁRVORE DE DERIVAÇÃO P/w É UMA S -ÁRVORE T CUJA COLHEITA É w , I.E., $C(T) = w$

DEF: SEJA $w \in (TUV)^*$, $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$.

UMA w -FLORESTA É UMA SEQUÊNCIA ORDENADA T_1, \dots, T_m ,
DE ÁRVORES, EM QUE T_i É UMA α_i -ÁRVORE

• COMO OBTER UMA DERIVAÇÃO A PARTIR DE UMA ÁRVORE?

ENTRADA : UMA X -ÁRVORE \mathcal{T} , COM $X \in \mathcal{T}$

SAÍDA : UMA DERIVAÇÃO MAIS À ESQUERDA DE $C(\mathcal{T})$

1) INICIALIZAÇÃO $\mathcal{F} = \mathcal{T}$

2) SE \mathcal{F} É UMA w -FLORESTA, IMPRIMA w .

3) SE $w \in T^*$, ENTÃO PARE

4) CASO CONTRÁRIO, SEJA v A RAIZ DA PRIMEIRA ÁRVORE DE \mathcal{F} QUE É ROTULADA POR UMA VARIÁVEL

FAÇA $\mathcal{F} = \mathcal{F} \setminus v$

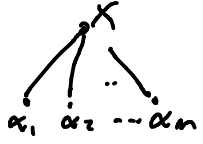


PROPOSIÇÃO: SEJA X UMA VARIÁVEL DE UMA GLC.

SE EXISTE DERIVAÇÃO $X \Rightarrow \Delta^* w$, ENTÃO w É
A COLHEITA DE UMA X -ÁRVORE.

PROVA: INDUÇÃO NO NÚMERO P DE PASSOS DA DERIVAÇÃO.

BASE: UM ÚNICO PASSO. $X \Rightarrow \Delta w$. ENTÃO $X \rightarrow w \in R$.

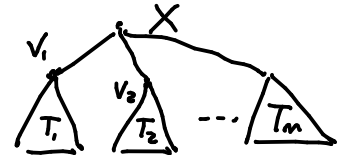
LOGO, SE $w = \alpha_1 \dots \alpha_m$, ENTÃO  É UMA X -ÁRVORE
CUJA COLHEITA É w ,

PASSO INDUTIVO: SUPONHA QUE TODA P -DERIVAÇÃO $Y \rightarrow w'$
PODE SER "TRANSFORMADA" EM UMA Y -ÁRVORE CUJA COLHEITA É w'

SEJA $X \Rightarrow \Delta v_1 \dots v_m$ O PRIMEIRO PASSO DE $X \Rightarrow \Delta^* w$

ISSO QUER DIZER QUE $w = w_1 \dots w_m$ E QUE EXISTEM
DERIVAÇÕES $v_i \Rightarrow \Delta^* w_i$ PARA TODO i .

MAS $v_i \Rightarrow \Delta^* w_i$ É UMA r -DERIVAÇÃO COM $r \leq P$. PELA HI,
EXISTE v_i -ÁRVORE T_i CUJA COLHEITA É w_i ,

LOGO,  É UMA X -ÁRVORE CUJA COLHEITA É w . \square

TEOREMA: SEJA G UMA GLC E $w \in L(G)$. ENTÃO

- 1) EXISTE ÁRVORE DE DERIVAÇÃO CUJA COLHEITA É w
- 2) CADA ÁRVORE DE DERIVAÇÃO CUJA COLHEITA É w CORRESPONDE A UMA ÚNICA DERIVAÇÃO MAIS À ESQUERDA DE w .

AMBIGUIDADE

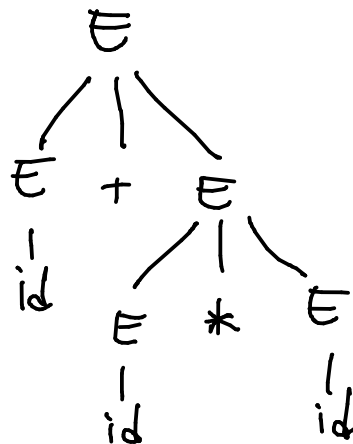
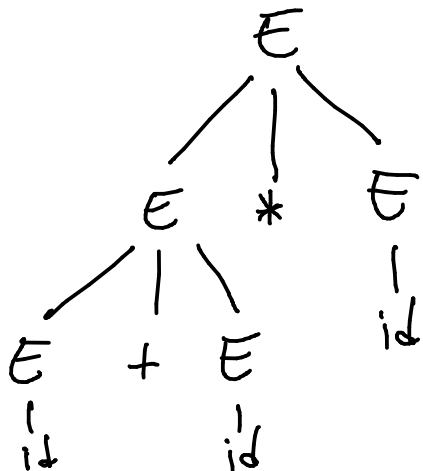
- ÁRVORES NOS AJUDAM A INTERPRETAR UMA FRASE CORRETAMENTE.
- ALGUMAS FRASES POSSUEM INTERPRETAÇÕES DISTINTAS

EX: A SEGUIR VEIO UMA MÃE COM UMA CRIANÇA EMPURRANDO UM CARRINHO.

QUEM ESTÁ EMPURRANDO O CARRINHO?

DEF: A GRAMÁTICA G É AMBIGUA SE EXISTE UMA PALAVRA $w \in L(G)$ QUE ADMITE DUAS ÁRVORES DE DERIVAÇÃO DISTINTAS.

EX:



EX: $T = \{a, +, -\}$, $V = \{S, A\}$, -

$$R = \begin{cases} S \rightarrow A \\ A \rightarrow A+A \mid A-A \mid a \end{cases}$$

EX: SEJAM L_1 E L_2 DUAS LINGUAGENS COM GRAMÁTICAS

$$G_1 = (T_1, V_1, S_1, R_1) \quad \text{E} \quad G_2 = (T_2, V_2, S_2, R_2)$$

SEJA $U = L_1 \cup L_2$ A LINGUAGEM COM GRAMÁTICA

$$G_U = (T_1 \cup T_2, V_1 \cup V_2, S_U, R_1 \cup R_2 \cup \{S_U \rightarrow S_1 \mid S_2\})$$

SE $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, G_U É AMBÍGUA.

SE $w \in L_1 \cap L_2$, COMO $S_1 \Rightarrow^* w$ E $S_2 \Rightarrow^* w$, ENTÃO

$S_U \Rightarrow S_1 \Rightarrow^* w$ E $S_U \Rightarrow S_2 \Rightarrow^* w$ SÃO DERIVAÇÕES

QUE PRODUZEM ÁRVORES DE ANÁLISE SINTÁTICA DIFERENTES.

EX: A GRAMÁTICA G_{EXP}'' COM REGRAS

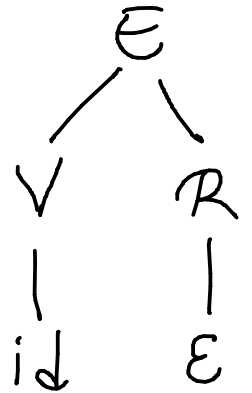
$$\begin{cases} S \rightarrow E \\ E \rightarrow (E)R \mid \underline{VR} \\ R \rightarrow +E \mid *E \mid \varepsilon \\ V \rightarrow \underline{id} \end{cases}$$

- PODEMOS DEDUZIR A DERIVAÇÃO A PARTIR DA PALAVRA DADA.

PROVA: INDUÇÃO NO COMPRIMENTO DA PALAVRA w .

SE $|w| = 1$, ENTÃO $w = id$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow E \Rightarrow VR \Rightarrow idR \Rightarrow id \\ &\Rightarrow VE \Rightarrow id \end{aligned}$$



SE $|w| = n$ E $w = idw'$, ENTÃO $|w'| < n$, E HA' UMA ÚNICA DERIVAÇÃO $R \Rightarrow w'$

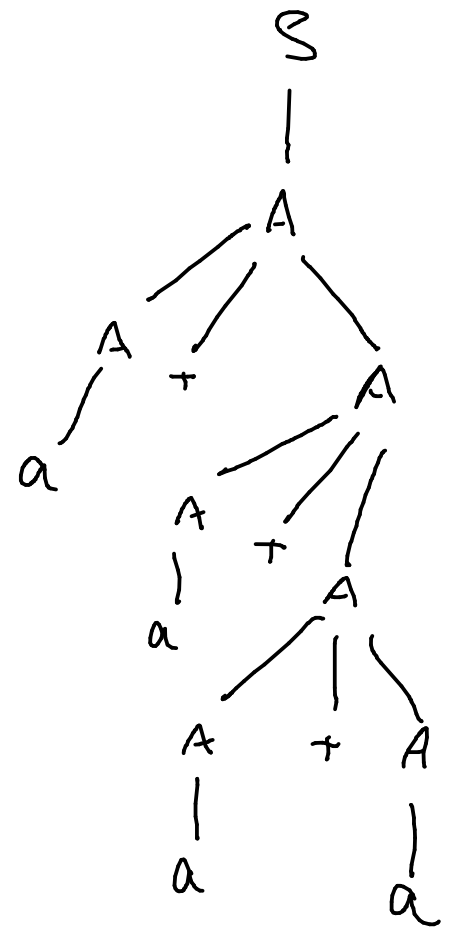
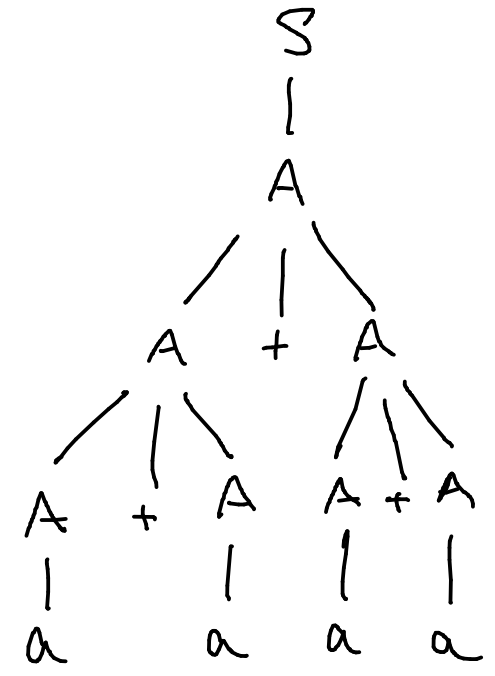
SE $|w| = n$, E $w = (w_1)w_2$ E $|w_1|, |w_2| < n$
E TEMOS $E \Rightarrow^* w_1$ E $R \Rightarrow^* w_2$



$$\text{EX: } L = \{ a (+a)^n : n \geq 0 \} = \{ a, a+a, a+a+a, \dots \}$$

$$R_1 = \begin{cases} S \rightarrow A \\ A \rightarrow A+A \mid a \end{cases}$$

É AMBIGUA



$$R_2 = \begin{cases} S \rightarrow A \\ A \rightarrow A+a \mid a \end{cases}$$

NÃO É AMBIGUA.

Obs: O problema de decidir se uma gramática é ambígua é indecidível.

- Uma linguagem L é inerentemente ambígua se toda gramática G t.q. $L = L(G)$ é ambígua

$$\text{EX. } \{a^n b^m c^m d^n : n, m > 0\} \cup \{a^n b^n c^m d^m : n, m > 0\}$$

- SEMPRE É POSSÍVEL OBTER UMA GRAMÁTICA NÃO AMBÍGUA PARA UMA LINGUAGEM REGULAR.

Alg: DADA UMA GRAM. REG.

DEVOLVE GRAMÁTICA G' NÃO AMBÍGUA T.q. $L(G') = L(G)$

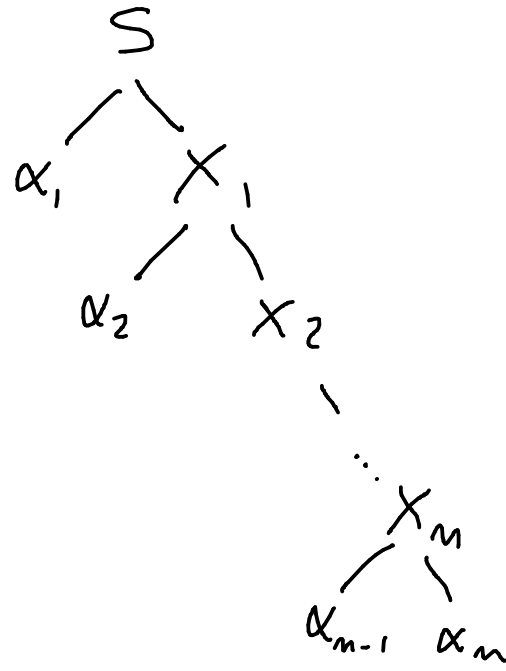
1) DETERMINAR AFND M PARA $L(G)$

2) DETERMINAR APD M' PARA $L(G)$

3) DETERMINAR GRAMÁTICA G' OBTIDA DE M' .

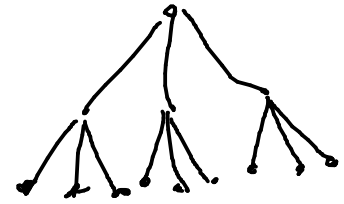


wX



BOMBAMENTO LLC

• Como provar que uma linguagem NÃO É LLC?



ÁRVORE 3-ÁRIA
COMPLETA COM
ALTURA 2

EX: $L_{abc} = \{a^m b^m c^m : m \geq 0\}$ NÃO É LLC

→ VAMOS PROVAR QUE TODA LLC POSSUI UMA PROPRIEDADE TESTÁVEL!

DEF: DIZEMOS QUE UMA ÁRVORE É **m-ÁRIA** SE CADA VÉRTICE
POSSUI NO MÁXIMO **m** FILHOS.

→ A **ALTURA** DE UMA ÁRVORE É O COMPRIMENTO DO CAMINHO
MAIS LONGO DE SUA RAÍZ ATÉ UMA FOLHA

COM ALTURA **h**

→ TODO NÓ
POSSUI **m**
FILHOS

DEF: $f(h)$ = NÚMERO DE FOLHAS DE UMA ÁRVORE **m-ÁRIA COMPLETA**

$$f(0) = 1, \quad f(1) = m \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad f(2) = m^2 \quad \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \dots, \quad f(h) = m^h$$

DEF: A **AMPLITUDE** $\alpha(G)$ DE UMA GLC É O COMPRIMENTO MÁXIMO DAS PALAVRAS QUE APARECEM À DIREITA DE UMA REGRA

EX: $X \rightarrow 0X1 \mid 0 \mid 1 \mid \epsilon$ TEM AMPLITUDE 3.

OBS: SE G POSSUI AMPLITUDE α , ENTÃO TODAS AS SUAS ÁRVORES SÃO α -ÁRIAS

LEMA 1: SEJA G UMA GLC. SE X É UMA VARIÁVEL DE G , E w É A COLHEITA DE UMA X -ÁRVORE DE ALTURA h , ENTÃO

$$|w| \leq \alpha(G)^h$$

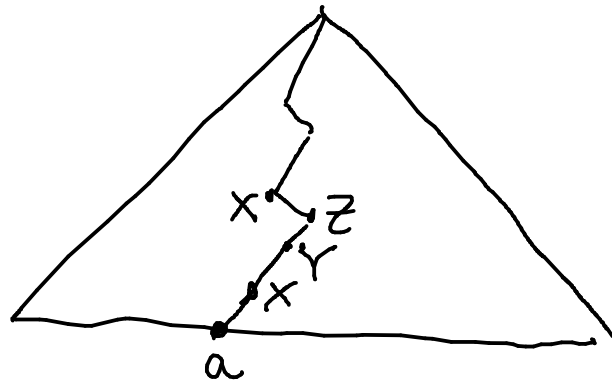
↳ ISSO IMPLICA QUE SE A COLHEITA DE UMA ÁRVORE É MUITO GRANDE, ENTÃO A ALTURA DA ÁRVORE TAMBÉM É.

LEMA: SEJA G UMA GLC. SE X É UMA VARIÁVEL DE G , E w É A COLHEITA DE UMA X -ÁRVORE DE ALTURA h , ENTÃO

$$|w| \leq \alpha(G)^h$$

↳ ISSO IMPLICA QUE SE A COLHEITA DE UMA ÁRVORE É MUITO GRANDE, ENTÃO A ALTURA DA ÁRVORE TAMBÉM É.

↳ SE A ALTURA DA ÁRVORE FOR MAIOR QUE O NÚMERO DE VARIÁVEIS DA GRAMÁTICA, UM CAMINHO MÁXIMO (NA ÁRVORE) CONTÉM DOIS VÉRTICES ROTULADOS COM A MESMA VARIÁVEL.



OU SEJA, AS REGRAS ASSOCIADAS A ESSES VÉRTICES TÊM A MESMA VARIÁVEL À ESQUERDA.

LEMA DO BOMBAMENTO : SEJA G UMA GRAMÁTICA LIVRE DE CONTEXTO.

EXISTE INTEIRO p (QUE DEPENDE DE G) TAL QUE SE $w \in L(G)$ E $|w| \geq p$, ENTÃO EXISTE DECOMPOSIÇÃO DE w COMO $w = uvxyz$,

PARA A QUAL

1) $vy \neq \epsilon$

2) $|vxy| \leq p$

3) $uv^mxy^mz \in L(G)$, PARA TODO $m \in \mathbb{N}$.

$$\alpha(G)^k \geq |w| \geq p = \alpha(G)^{k+1}$$

PROVA : TOME $p = \alpha(G)^{k+1}$, EM QUE k É O NÚMERO DE VARS DE G .

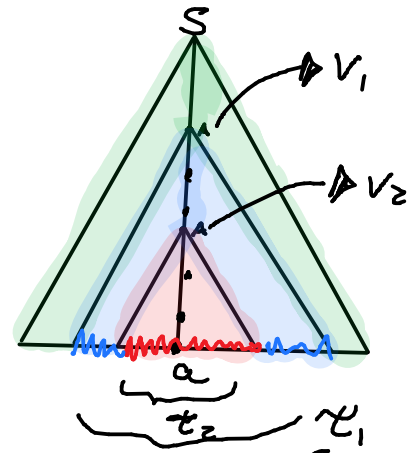
SEJA $w \in L(G)$ COM $|w| \geq p$, E SEJA T UMA ÁRVORE DE DERIVAÇÃO P/w . PELO LEMA 1, A ALTURA DE T É PELO MENOS $k+1$. HÁ UM CAMINHO DA RAÍZ DE T ATÉ UMA FOLHA QUE REPETE VARIÁVEL

1) $v \neq \epsilon$

2) $|vxy| \leq p$

3) $uv^mxy^mz \in L(G)$, PARA TODO $m \in \mathbb{N}$.

X_2 ~~~~~
 X_1 ~~~~~



PROVA: Tome $p = \alpha(G)^{k+1}$, em que k é o número de vars de G .

Seja $w \in L(G)$ com $|w| \geq p$, e seja T uma árvore

* com o menor número de vértices possível

de derivação p/w . * Pelo lema 1, a altura de T é pelo menos $k+1$. Há um caminho da raiz de T até uma folha que repete variável, digamos A .

Sejam v_1 e v_2 os dois últimos vértices que repetem variável

Seja ψ_1 a árvore com raiz v_1 , com colheita X_1

$\Rightarrow X_2$ é uma subpalavra de X_1

$\Rightarrow X_1 = v X_2 y$

\Rightarrow Como ψ_2 não repete variável, a altura de ψ_2 é no ma

SEJAM v_1 E v_2 OS DOIS ÚLTIMOS VÉRTICES QUE REPETEM VARIÁVEL.

SEJA \mathcal{T}_i A ÁRVORE COM RAÍZ v_i , COM COLHEITA X_i ;

$\Rightarrow X_2$ É UMA SUBPALAVRA DE X_1 ,

$\Rightarrow X_1 = v X_2 y$ (EXCETO A)

\Rightarrow COMO \mathcal{T}_1 NÃO REPETE VARIÁVEL, A ALTURA DE \mathcal{T}_1 É NO MÁXIMO $k+1$

ISSO QUER DIZER QUE A COLHEITA DE \mathcal{T}_1 (X_1) TEM

COMP. NO MÁXIMO $\alpha(G)^{k+1}$, OU SEJA $|X_1| = |v X_2 y| \leq p$

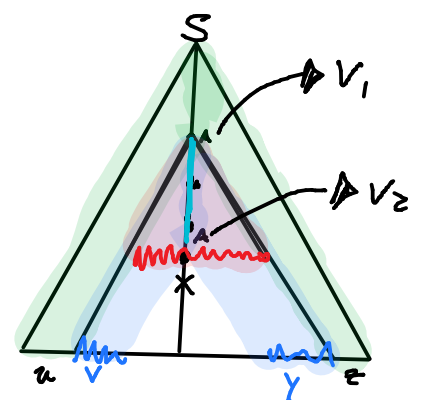
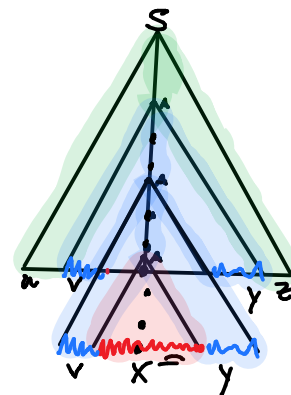
\Downarrow
ISSO PROVA O ITEM 2.

\Rightarrow SE $|v y| = 0$, ENTÃO $v y = \epsilon$, CONTRADIÇÃO COM A MINIMALIDADE DE T.

\hookrightarrow ISSO PROVA O ITEM 1.

\Rightarrow SUBSTITUINDO \mathcal{T}_1 NO LUGAR DE \mathcal{T}_2 REPETIDAMENTE OBTENEMOS UMA ÁRVORE DE DERIVAÇÃO $\mathcal{T}' / a^n x^n y^n z^n$

\hookrightarrow ISSO PROVA O ITEM 3



• Como aplicar

- (*)
- 1) $vy \neq \epsilon$
 - 2) $|vxy| \leq p$
 - 3) $zuv^mxy^mz \in L(G)$, PARA TODO $m \in \mathbb{N}$.

1) SUPÕE QUE $L \in \bar{L}C$.

2) TOMA QUALQUER GLC $G \neq L$

3) USA O LEMA DE BOMBAMENTO EM G . OBTENOS P

4) ESCOLHE PALAVRA $w \in L$ COM $|w| \geq p$

3) MOSTRAR QUE NÃO É POSSÍVEL BOMBEAR.

EX. $L_{abc} = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$

SUPÕNH QUE $L_{abc} \in \bar{L}C$, E SEJA G_{abc} UMA GLC $\neq L_{abc}$.

PELO L.B. EXISTE P COM AS PROP. (*).

TOME $w = a^P b^P c^P$, CLARAMENTE $|w| = 3P > P$

PELO L.B. $w = uvxyz$ COM (*)

EX. $L_{abc} = \{a^m b^m c^m : m \geq 0\}$

SUPONHA QUE $L_{abc} \in \text{LLC}$, E SEJA G_{abc} UMA GLC P/ L_{abc} .

PELO L.B. EXISTE P COM AS PROP. (*).

TOME $w = a^P b^P c^P$. CLARAMENTE $|w| = 3P > P$

PELO L.B. $w = uvxyz$ COM (*)

$$w = \underbrace{a \dots a}_{vxy} \underbrace{b \dots b}_{vxy} \underbrace{c \dots c}_{vxy}$$

ANÁLISE DE CASO $i+k > 0$ POR (1)

1) SE $vxy = a^i a^j a^k$, ENTÃO POR (3) $w' = uv^2 xy^2 z \in L$,
 MAS $w' = a^{P+i+k} b^P c^P \notin L$, UMA CONTRADIÇÃO.

ANALOGAMENTE, VERIFICAMOS O CASO $vxy \subseteq b^P$ OU $vxy \subseteq c^P$

2) SE $vxy = a^i b^j$, TOME $w' = uv^2 xy^2 z$

TEMOS $w' = a^{P'} b^{P''} c^P$ COM $P' > P$ OU $P'' > P$

$$\frac{a \dots a}{v} \frac{b \dots b}{x} \frac{b \dots b}{y}$$

ANALOGAMENTE, VERIFICAMOS O CASO $w' = b^i c^j$

(1) $vy \neq \epsilon$

(*) (2) $|vxy| \leq P$

(3) $uv^m x y^m \in L(G)$, PARA TODO $m \in \mathbb{N}$.

LOGO, L_{abc} NÃO É LLC.

EX: $L_{\text{PRIMOS}} = \{0^q : q \in \text{PRIMOS}\}$

Pelo L.B. EXISTE p t.q. (*)

SEJA m UM PRIMO MAIOR QUE p

$$w = 0^m \in L_{\text{PRIMOS}}$$

Pelo L.B. $w = uvxyz$ COM $|uxy| \leq p$, $xy \neq \epsilon$

SEJAM i, j t.q. $v = 0^i$ e $y = 0^j$

Pelo L.B. $w_m = u v^m x y^m z \in L_{\text{PRIMOS}} \forall m$

TOME $m = m + 1$

$$w_m = u \underset{0^i}{v^{m+1}} \underset{0^j}{x y^m} z = 0^{m + \underline{m \cdot i} + \underline{m \cdot j}} = 0^{\overbrace{m(1+i+j)}^{x^0 \neq 0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{NÃO É PRIMO} \end{array} \right.$$

COMO $m(1+i+j)$ NÃO É PRIMO, $w_m \notin L_{\text{PRIMOS}}$, UMA CONTRADIÇÃO
Logo, L_{PRIMOS} NÃO É LLC. □

AUTÔMATOS DE PILHA

• Um AUTÔMATO DE PILHA NÃO-DETERMINÍSTICO é um AUTÔMATO COM UMA PROPRIEDADE EXTRA: MEMÓRIA INFINITA.

• MEMÓRIA: PILHA \rightsquigarrow O ÚLTIMO ELEMENTO A SER COLOCADO É O PRÓXIMO A SER LIDO.

LISTA : $(a_1) a_2 \dots a_n$

$\text{POP}(\text{LISTA}) = a_1$

PILHA : $a_1 a_2 \dots (a_n)$

$\text{POP}(\text{PILHA}) = a_n$

\rightsquigarrow DISCOS PERFORADOS EM UMA HASTE.

\rightsquigarrow LEMBRAR É COLOCAR UM DISCO NA HASTE E UM DISCO SÓ PODE SER REMOVIDO SE ESTIVER NO TOPO DA PILHA.

EX: $L_1 = \{vcv^R : v \in \{a,b\}^*\}$

$abaa\ caaba \in L_1$

$abcab \notin L_1$

ETAPA 1: SE LÊ a , EMPILHA a
SE LÊ b , EMPILHA b

ETAPA 2: SE LÊ c , MUDA DE ATITUDE

ETAPA 3: COMPARA O QUE ESTÁ NO TOPO
DA PILHA COM O SÍMBOLO LIDO.

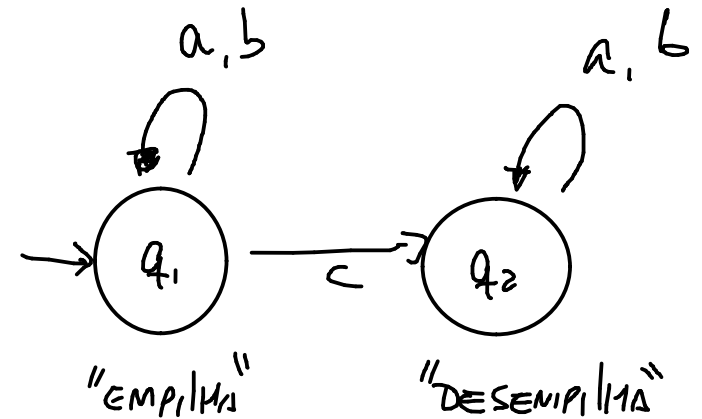
SE SÃO IGUAIS, OK.

SE SÃO DIFERENTES, PARA A COMPUTAÇÃO

EX: $L_2 = \{vv^R : v \in \{a,b\}^*\}$

NO NÃO HÁ SÍMBOLO PARA INDICAR A MUDANÇA DE ATITUDE.

NO UM AUTÔMATO $\forall L_2$ DEVE ADIVINHAR A HORA DE MUDAR DE ATITUDE.



DEFINIÇÃO FORMAL

DEF: UM AUTÔMATO DE PILHA NÃO-DETERMINÍSTICO (AP) A É UMA 6-TUPLA $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$, EM QUE

1) Σ É O ALFABETO DE ENTRADA

2) Γ É O ALFABETO DA PILHA

3) Q É UM CONJUNTO DE ESTADOS

4) $q_0 \in Q$ É O ESTADO INICIAL

5) $F \subseteq Q$ É O CONJUNTO DE ESTADOS FINAIS

6) Δ É A FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\epsilon\}) \longrightarrow P_f(Q \times \Gamma^*)$$

- NOTE QUE O AUTÔMATO PODE FAZER TRANSIÇÃO SEM CONSULTAR A ENTRADA OU A PILHA.

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\epsilon\}) \longrightarrow P_f(Q \times \Gamma^*)$$

COMO INTERPRETAR A FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO?

$$(p, u) \in \Delta(q, \sigma, \gamma)$$

SIGNIFICA QUE M ESTÁ NO ESTADO q , LENDO σ NA ENTRADA E γ NA PILHA; E "VAI" PARA O ESTADO p E

TROCA γ POR u NA PILHA

- γ PODE SER TROCADA POR UMA PALAVRA INTEIRA
- γ PODE SER SIMPLEMENTE REMOVIDA ($u = \epsilon$)

$$\text{EX: } L_1 = \{v c v^R : v \in \{a, b\}^*\}$$

$$Q = \{q_1, q_2\}$$

$$\Delta(q_1, a, \varepsilon) = \{(q_1, a)\}$$

$$\Delta(q_1, b, \varepsilon) = \{(q_1, b)\}$$

$$\Delta(q_1, c, \varepsilon) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, a, a) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\Delta(q_2, b, b) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

OBS: A PALAVRA SÓ
PODE SER ACEITA SE
A PILHA TERMINA VAZIA.

$$F = q_2$$

TABELA DE TRANSIÇÃO

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_1	a	ϵ	(q_1, a)
q_1	b	ϵ	(q_1, b)
q_1	c	ϵ	(q_2, ϵ)
q_2	a	a	(q_2, ϵ)
q_2	b	b	(q_2, ϵ)

EX: $L_2 = \{vv^R : v \in \{a,b\}^*\}$

$a a a a a a \emptyset$
 \uparrow
 3
 a
 a

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_1	a	ϵ	(q_1, a)
q_1	b	ϵ	(q_1, b)
3 q_1	ϵ	ϵ	(q_2, ϵ)
q_2	a	a	(q_2, ϵ)
q_2	b	b	(q_2, ϵ)

COMPUTANDO E ACEITANDO

DEF: SEJA $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$

UMA CONFIGURAÇÃO DE M É UM ELEMENTO

$$(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

OBS: POR CONVENÇÃO, O TOPO DA PILHA É O ELEMENTO MAIS À ESQUERDA.

DEF: SEJA $C = (q, \sigma w, \gamma \alpha)$ UMA CONFIGURAÇÃO DE M ,

EM QUE $\sigma \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ E $\gamma \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$.

DIZEMOS QUE $C' = (q', w, \nu \alpha)$ É UMA CONFIGURAÇÃO SEQUINTE A C SE

$$(q', \nu) \in \Delta(q, \sigma, \gamma)$$

DENOTAMOS POR $C \vdash C'$

DEF: UMA COMPUTAÇÃO DE M É UMA SEQUÊNCIA C_0, \dots, C_k
DE CONFIGURAÇÕES T.q. C_{i+1} É UMA CONF. SEQUINTE DE C_i

DENOTAMOS POR $C_0 \vdash^* C_k$

EX: $L_1, M, C_1 = (q_1, abcba^2, a)$

$(q_1, abcba^2, a) \vdash (q_1, bcba^2, a^2) \vdash (q_1, cba^2, ba^2)$

$\vdash (q_2, ba^2, ba^2) \vdash (q_2, a^2, a^2)$

$\vdash (q_2, a, a) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

Ex: L_2, M_2 $C = (q_1, a^2b, \epsilon)$

$(q_1, a^2b, \epsilon) \vdash (q_1, ab, a) \vdash (q_1, b, a^2) \vdash (q_2, b, a^2)$

$(q_1, a^2b, \epsilon) \vdash (q_2, a^2b, \epsilon)$

$(q_1, a^2b, \epsilon) \vdash (q_1, ab, a) \vdash (q_2, ab, a) \vdash (q_2, b, \epsilon)$

DEF: SEJA $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \Delta)$ UM AP.

UMA PALAVRA $w \in \Sigma^*$ É ACEITA POR M SE EXISTE COMPUTAÇÃO

$$(q_0, w, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

EM QUE $p \in F$.

- BASTA EXISTIR UMA COMPUTAÇÃO
- A PALAVRA w TEM QUE SER TOTALMENTE CONSUMIDA
- A PILHA TEM QUE ACABAR VAZIA
- O AUTÔMATO TEM QUE CHEGAR A UM ESTADO FINAL.

Ex: $L = \{a^i b^i : i \geq 0\}$

$Q = \{q_1, q_2\} = F$

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_1	a	ϵ	(q_1, X)
q_1	b	X	(q_2, ϵ)
q_2	b	X	(q_2, ϵ)

EX: $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \text{O número de } a\text{'s é igual ao número de } b\text{'s} \}$

$\Gamma = \{a, b, \beta\}$

ESTADO	ENTRADA	TOPO DA PILHA	TRANSIÇÕES
q_0	ϵ	ϵ	(q_1, β)
q_1	a	β	$(q_1, a\beta)$
q_1	b	β	$(q_1, b\beta)$
q_1	a	a	(q_1, aa)
q_1	b	b	(q_1, bb)
q_1	a	b	(q_1, ϵ)
q_1	b	a	(q_1, ϵ)
q_1	ϵ	β	(q_2, ϵ)

GLC x AP

TEOREMA: UMA LINGUAGEM É LIVRE DE CONTEXTO SE E SOMENTE SE É ACEITA POR UM AUTÔMATO DE PILHA NÃO-DETERMINÍSTICO.

\Rightarrow CONSTRUIR UM AUTÔMATO DE PILHA QUE ACEITA A LINGUAGEM GERADA POR UMA GLC. DADA

\Leftarrow CONSTRUIR UMA GLC QUE GERA A LINGUAGEM RECONHECIDA POR UM AP. DADO.

L) $GLC \rightarrow AP$

\leadsto TRANSFORMAR VARIÁVEIS E REGRAS EM ESTADOS E TRANSIÇÕES.

\leadsto A PILHA DESEMPENHA PAPEL FUNDAMENTAL

\leadsto ESTADOS DESEMPENHAM PAPEL SECUNDÁRIO

\leadsto VAMOS CONSTRUIR UM AUTÔMATO M QUE SIMULA AS DERIVAÇÕES
MAS À ESQ. NA PILHA

SEJA $G = (T, V, S, R)$

\leadsto CLARAMENTE O ALFABETO DO AUTÔMATO TEM QUE SER T ($\Sigma = T$)

\leadsto CADA DERIVAÇÃO DE G CORRESPONDE A UMA TRANSIÇÃO DE M .

\leadsto O ALFABETO DA PILHA É $\Gamma = T \cup V$.

→ APENAS DOIS ESTADOS: i, f

→ COMO TODA DERIVAÇÃO COMEÇA COM S , O AUTÔNATO COMEÇA EMPILHANDO S :

$$\Delta(i, \varepsilon, \varepsilon) = \{(f, S)\}$$

→ SE TEMOS A REGRA $X \rightarrow \alpha$, CRIAMOS A TRANSIÇÃO

$$(f, \alpha) \in \Delta(f, \varepsilon, X)$$