

Aproximação Geométrica

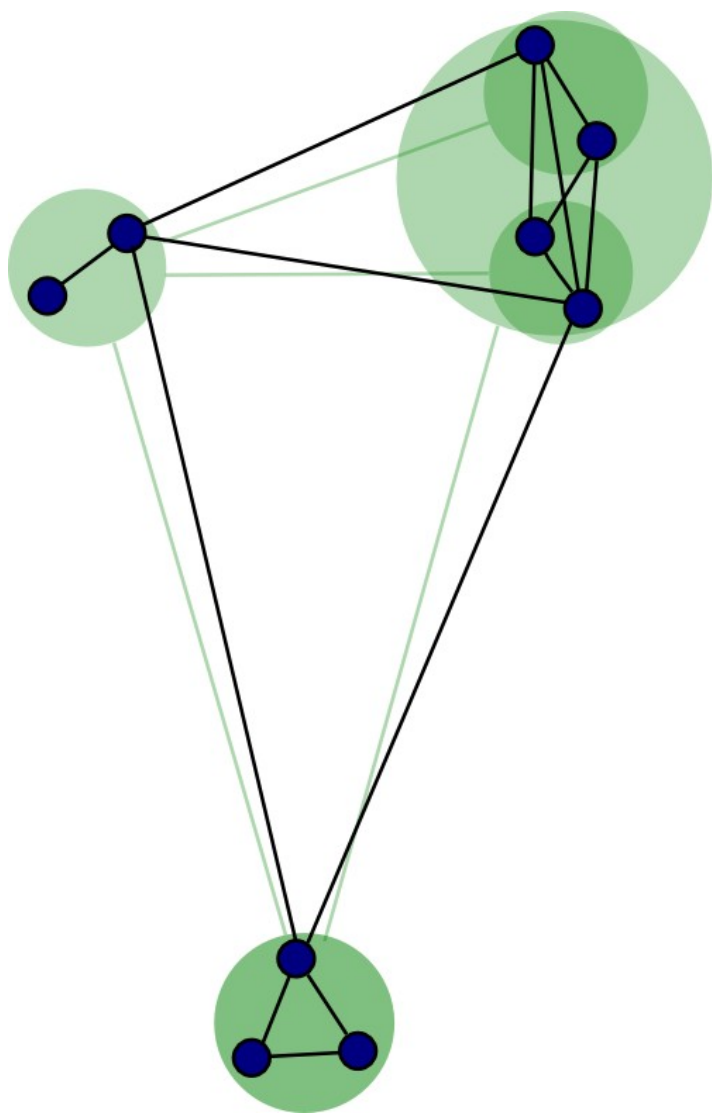
Aula 6

Tópicos:

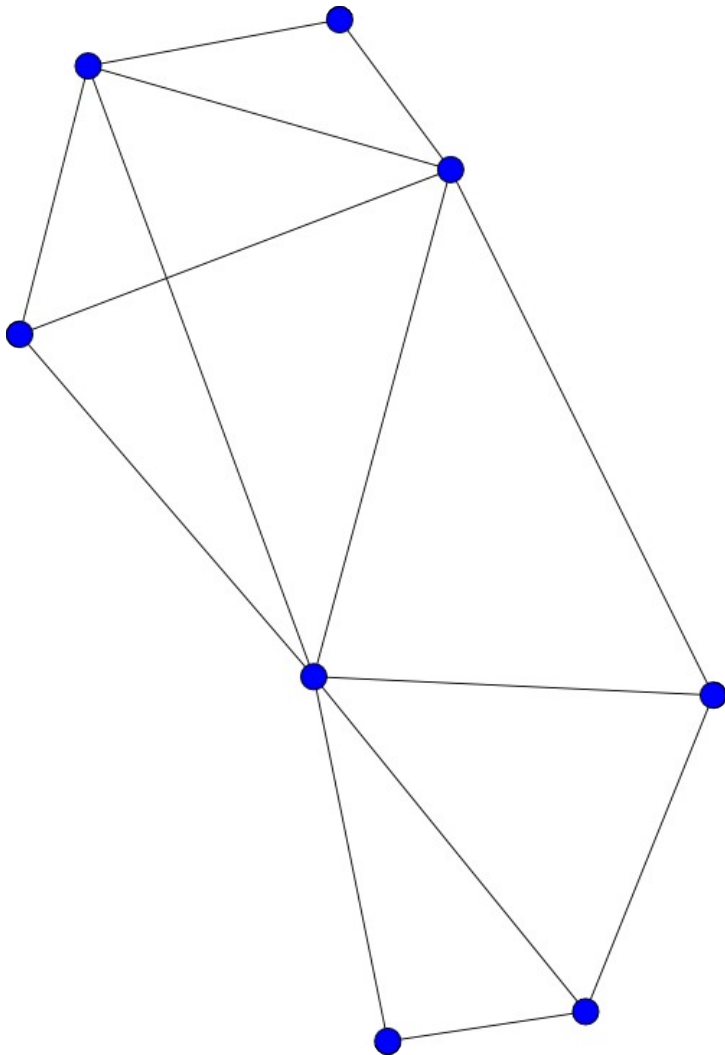
- Spanners
- Árvore geradora mínima

IMPA – Verão 2009

Guilherme D. da Fonseca

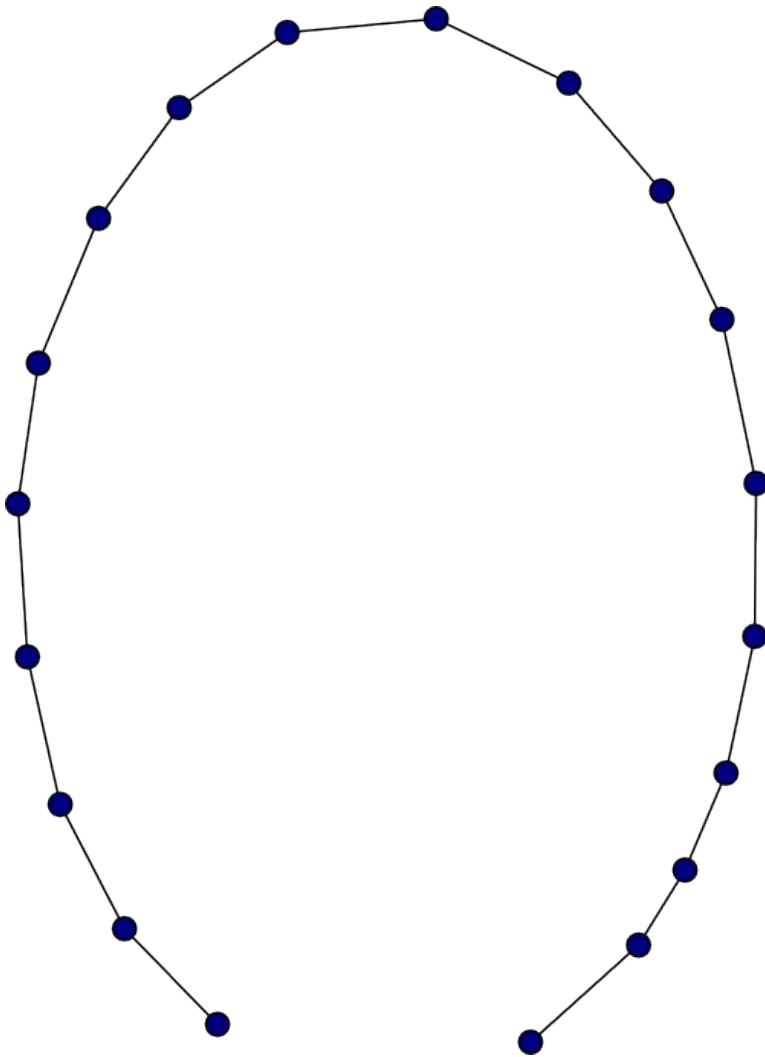


Spanner



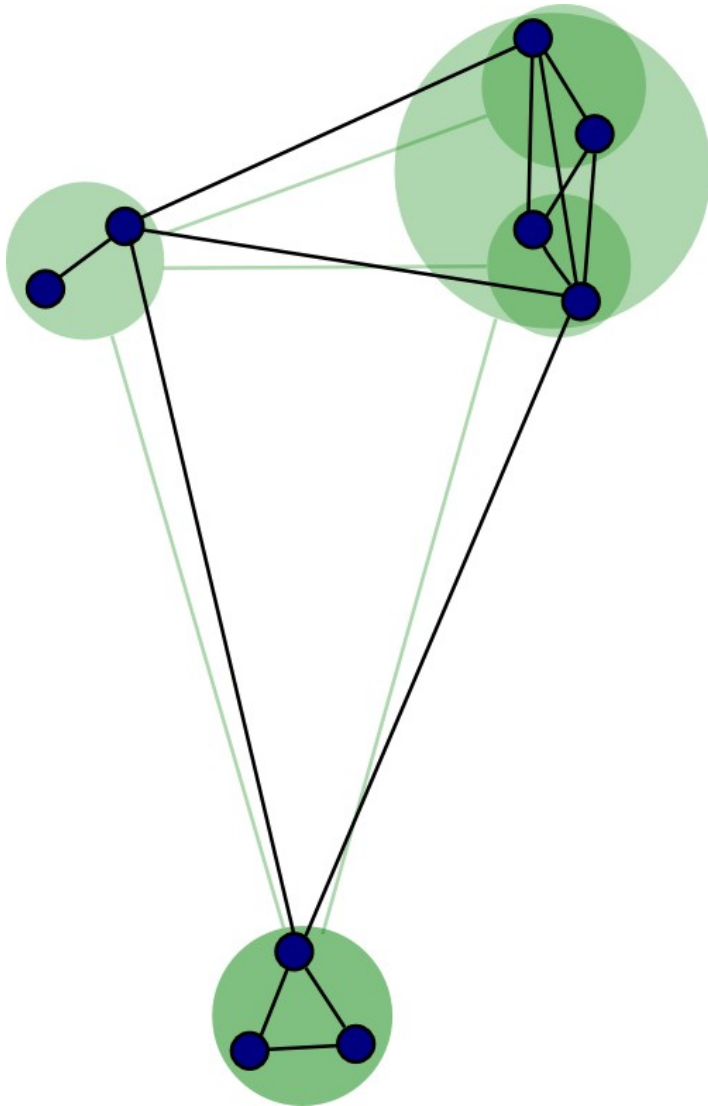
- Seja $\|pq\|$ a distância Euclidiana entre dois pontos e $\|pq\|_G$ a distância entre dois vértices em um grafo G com os pontos como vértices.
- Um grafo G é um spanner com distorção t se para todo p, q vale que:
$$\|pq\| \leq \|pq\|_G \leq t\|pq\|$$
- Queremos um spanner com poucas arestas.

Observações Sobre Spanners



- ♦ O grafo completo é um spanner com distorção 1, porém tem $O(n^2)$ arestas.
- ♦ A árvore geradora mínima não tem distorção limitada, portanto não é um spanner.
- ♦ A triangulação de Delaunay é um spanner plano. A distorção é desconhecida, mas está entre 1.57 e 2.42.

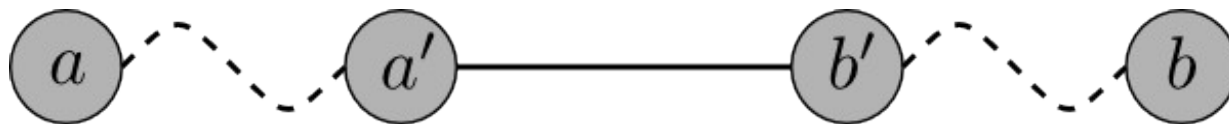
Construção

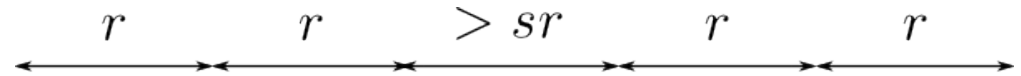


- ♦ Primeiro construímos uma decomposição em pares bem separados.
- ♦ Para cada par de representantes da WSPD, criamos uma aresta no spanner.
- ♦ Precisamos relacionar a distorção t com o fator de separação s .

Prova

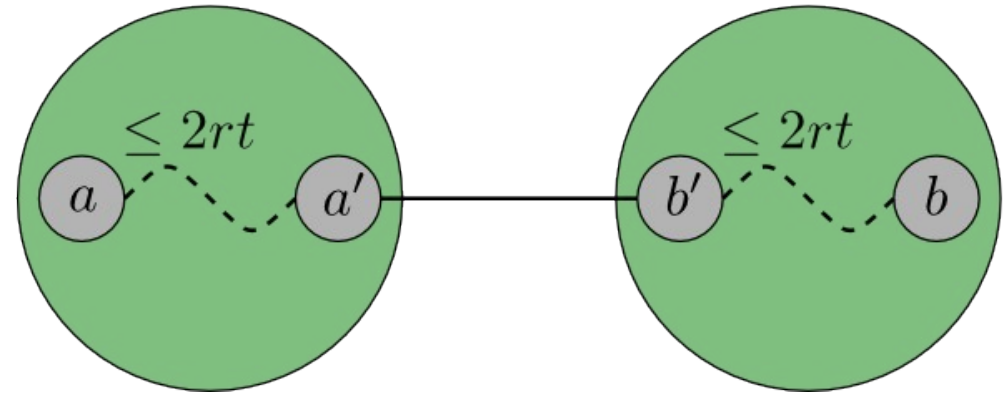
- ♦ A prova usa um caminho específico, que não é necessariamente o mais curto.
- ♦ Usamos indução no número de arestas do caminho.
- ♦ Seja a' o representante de a no par que separa a de b .
- ♦ O caminho de a até b é definido recursivamente como o caminho de a até a' , seguido da aresta $a'b'$ e do caminho de b' até b .
- ♦ O caso base de caminhos com uma aresta é trivial.





Queremos mostrar:

$$||ab||_G \leq t ||ab||$$



Por indução temos:

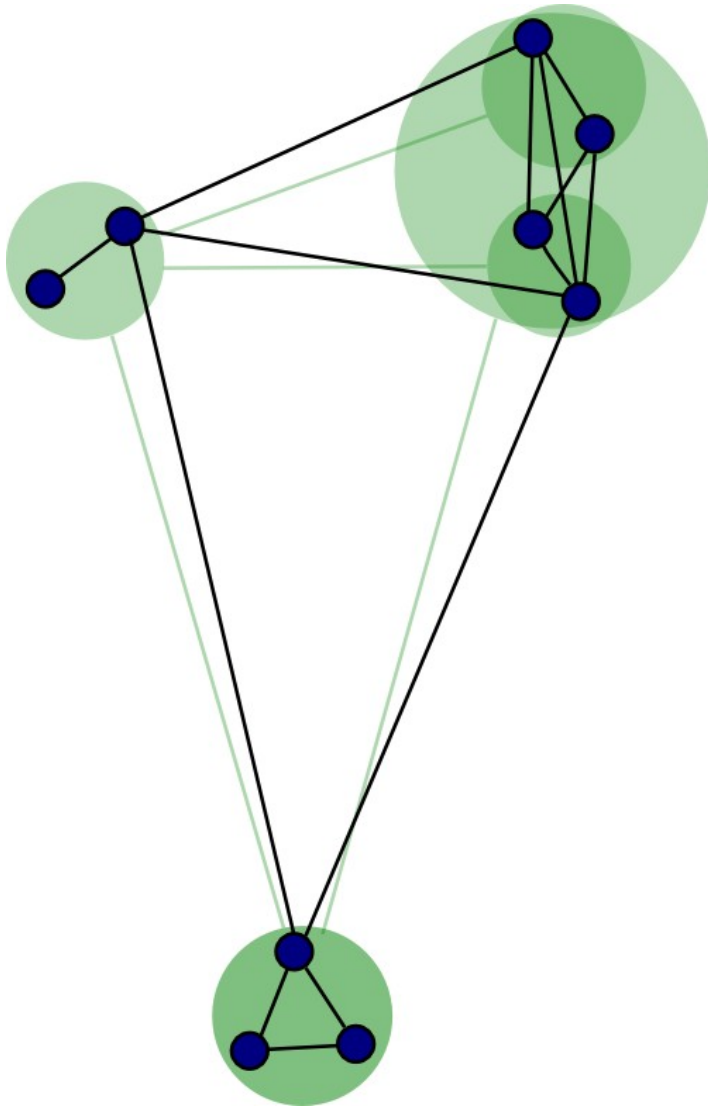
$$||ab||_G \leq 4rt + 4r + ||ab|| = 4r(t + 1) + ||ab||$$

Usando que $r < \frac{||ab||}{s}$ temos:

$$||ab||_G \leq \left(4 \frac{t+1}{s} + 1 \right) ||ab||$$

Fazendo $s = 4 \frac{t+1}{t-1}$ concluimos a prova.

Complexidades

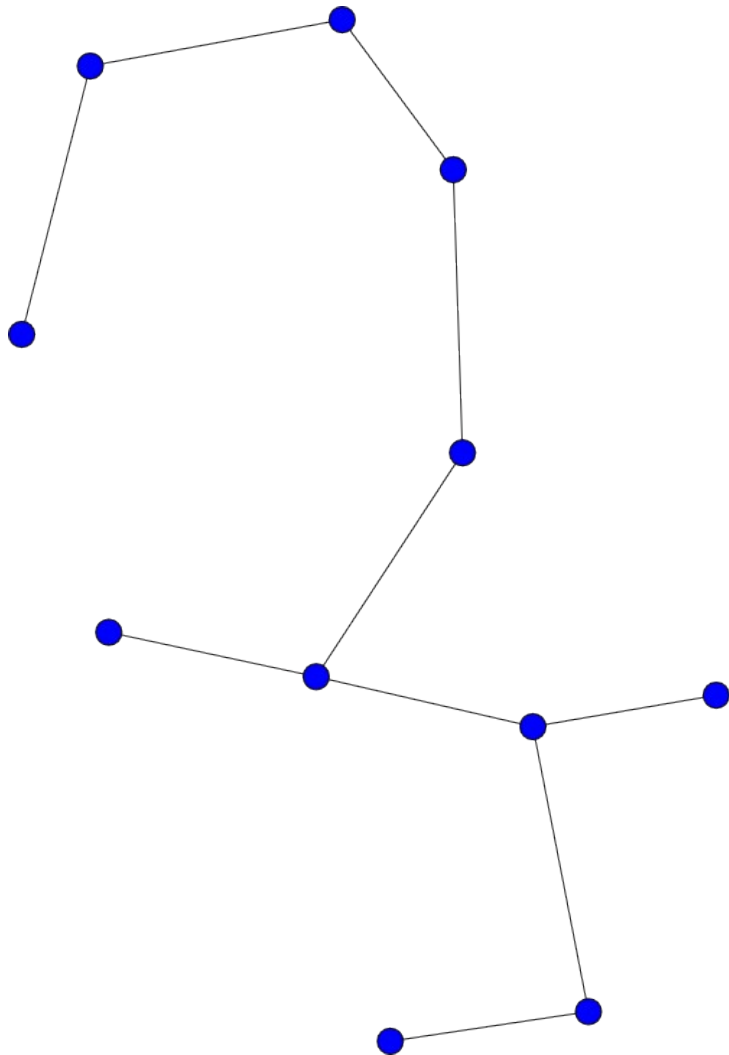


- ♦ Usamos:

$$s = 4 \frac{t + 1}{t - 1}$$

- ♦ Fazendo $t = 1 + \varepsilon$, temos um spanner com distorção $1 + \varepsilon$.
- ♦ Tamanho: $O(n/\varepsilon^d)$.
- ♦ Construção: $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$.

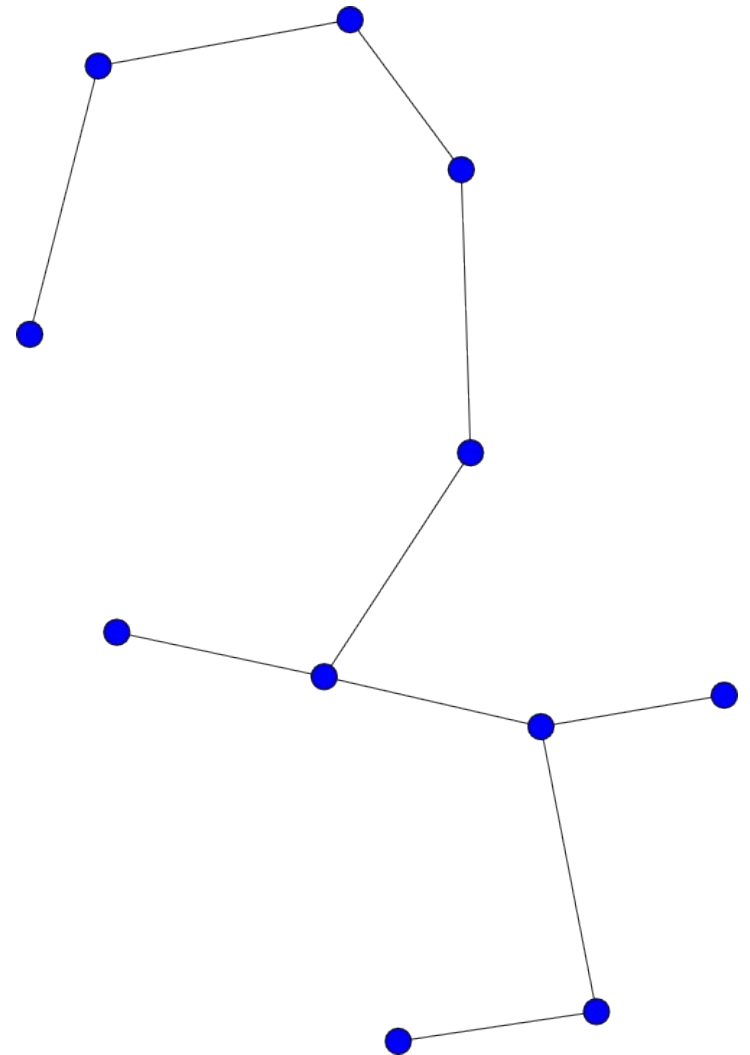
Árvore Geradora Mínima



- ♦ A árvore geradora mínima é o grafo conexo acíclico com os pontos como vértices que minimiza a soma dos comprimentos das arestas.
- ♦ No plano, pode ser construída em tempo $O(n \log n)$ usando a triangulação de Delaunay.
- ♦ Para dimensões maiores que 2, não se conhece algoritmo quase linear.

Árvore Geradora Mínima

- ♦ Em um grafo com n vértices e m arestas, a árvore geradora mínima pode ser construída em tempo $O(n \log n + m)$.
- ♦ Queremos achar uma árvore cuja soma dos comprimentos seja no máximo $1+\varepsilon$ vezes maior que o ótimo.
- ♦ Basta construir um spanner com $t=1+\varepsilon$ e achar a árvore geradora mínima no spanner.



Prova

- ♦ Considere o seguinte subgrafo do spanner: para cada aresta uv da árvore geradora mínima, as arestas do caminho mais curto de u para v pertencem ao subgrafo.
- ♦ Este subgrafo é conexo e tem peso no máximo igual a $1+\varepsilon$ vezes o peso da árvore geradora mínima.
- ♦ A árvore geradora mínima do spanner tem peso no máximo igual ao peso deste subgrafo.
- ♦ Tempo: $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$.

Referências

- ♦ Livro somente sobre spanners geométricos:
Giri Narasimhan and Michiel Smid. Geometric Spanner Networks. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007.
- ♦ Notas do Sariel Har-Peled
<http://valis.cs.uiuc.edu/~sariel/teach/notes/aprx/>
- ♦ Notas do David Mount
<http://www.cs.umd.edu/class/spring2007/cmsc754/Lects/754lects.pdf>