Segunda Prova de Geometria Computacional

UFRJ - COPPE - Engenharia de Sistemas e Computação
Professores: Guilherme D. da Fonseca e Celina M. H. de Figueiredo
Tempo de prova: 3 horas
Data: 04/09/2008

- Em todas as questões que pedem para descrever um algoritmo (ou estrutura de dados), também é necessário justificar que o algoritmo está correto e analisar sua complexidade de tempo.
- Ao resolver um problema, não é necessário descrever nenhum algoritmo estudado em sala de aula. Fique a vontade para utilizar algoritmos estudados em aula como caixas pretas ou alterá-los, mas a resposta deve ser clara e sem ambiguidades para alguém que conheça estes algoritmos.
- Considere que a entrada encontra-se em posição geral, a não ser caso especificado o contrário.
- A única consulta permitida são duas folhas de papel A4 trazidas pelo aluno.

1. (15 pontos) Responda de modo sucinto:
   (a) (7 pontos) Mostre que uma partição do plano com n vértices possui $O(n)$ arestas.
   (b) (8 pontos) Uma etapa importante para a computação do fecho convexo utilizando algoritmos de divisão e conquista consiste em determinar o fecho convexo da união de dois polígonos convexos. Descreva um algoritmo que receba como entrada dois polígonos convexos, com n e m vértices, e determine como saída o fecho convexo da união destes polígonos. Seu algoritmo deve levar tempo $O(n+m)$.
2. (20 pontos) Dizemos que uma reta *perfura* um retângulo se existem vértices do retângulo tanto acima quanto abaixo da reta. Descreva um algoritmo que, dado um conjunto de n retângulos no plano, alinhados com os eixos ortogonais, determine em tempo $O(n)$ uma reta que perfure todos os retângulos do conjunto, ou diga que tal reta não existe.
3. (15 pontos) Considere dois conjuntos P_1 e P_2 de pontos no plano, com n pontos no total. Um *separador parcial* é um par de retas paralelas r_1, r_2 tal que todo ponto de P_1 esteja acima de r_1 e todo ponto de P_2 esteja abaixo de r_2. Mostre como construir uma estrutura de dados a partir de P_1 e P_2 tal que dado um par de retas r_1, r_2 seja possível determinar em tempo $O(\log n)$ se r_1, r_2 é um separador parcial. Sua estrutura deve ter espaço $O(n)$.

4. (15 pontos) Marque verdadeiro ou falso. Não é necessário justificar.

   ( ) A triangulação de Delaunay minimiza a soma dos perímetros dos triângulos (dentre todas as triangulações possíveis para um dado conjunto de pontos).

   ( ) A árvore geradora mínima é um subgrafo da triangulação de Delaunay.

   ( ) A triangulação de Delaunay é o grafo dual do arranjo das retas definidas pelo dual dos pontos.

   ( ) O diagrama de Voronoi de n pontos no plano tem $O(n)$ vértices, arestas e faces.

   ( ) O par de pontos mais distantes corresponde a duas células ilimitadas no diagrama de Voronoi.

5. (15 pontos) Considere um conjunto de n pontos no plano e um conjunto de m retângulos não necessariamente disjuntos. Descreva um algoritmo eficiente baseado em range-trees que determine quantos pontos estão contidos no interior de cada retângulo. Analise a complexidade de tempo do seu algoritmo.

6. (20 pontos) Responda apenas 2 dentre as 3 questões abaixo:

   (a) Em sala, descrevemos um algoritmo para determinar uma 2-aproximação do menor círculo contendo k pontos. Modifique este algoritmo de modo a determinar uma 2-aproximação do menor *quadrado* alinhado com os eixos ortogonais contendo k pontos, ou seja, determinar um quadrado alinhado com os eixos ortogonais que contenha k pontos e tenha no máximo o dobro do diâmetro do menor quadrado alinhado com os eixos ortogonais contendo k pontos. Explique as modificações cuidadosamente, justifique a corretude e analise a complexidade do algoritmo.

   (b) A esponjosidade X de um conjunto P de n pontos é a soma das distâncias Euclidianas definidas pelos pares de pontos de P, ou seja

   $$X = \sum_{p,q \in P} ||pq||.$$

   Uma 2-aproximação da esponjosidade de P é um valor Y com $X \leq Y \leq 2X$. Descreva um algoritmo que determine uma 2-aproximação da esponjosidade de um conjunto de n pontos em espaço d-dimensional (d constante). Dica: use decomposição em pares bem separados.

   (c) Determine a dimensão de VC do conjunto dos *quadrados* alinhados com os eixos ortogonais. É preciso mostrar que seu resultado é justo.