Solução da Segunda Prova de Geometria Computacional

1. (15 pontos) Responda de modo sucinto:

   (a) (7 pontos) Mostre que uma partição do plano com n vértices possui $O(n)$ arestas.

   Reposta: Seja v o número de vértices, e o número de arestas e f o número de faces. Cada aresta pode ser decomposta em 2 semi-arestas, cada semi-aresta adjacente a exatamente 1 face. O número de semi-arestas é $2e$. Como cada face é adjacente a pelo menos 3 semi-arestas temos $f \leq 2e/3$.

   Pelo teorema de Euler, $e = v + f - 2$. Substituindo, temos $e \leq v + 2e/3 - 2$ e manipulando temos $e \leq 3v - 6 = O(v)$.

   (b) (8 pontos) Uma etapa importante para a computação do fecho convexo utilizando algoritmos de divisão e conquista consiste em determinar o fecho convexo da união de dois polígonos convexos. Descreva um algoritmo que receba como entrada dois polígonos convexos, com n e m vértices, e determine como saída o fecho convexo da união destes polígonos. Seu algoritmo deve levar tempo $O(n + m)$.

   Reposta: Podemos determinar em tempo $O(n)$ os vértices extremos esquerdo e direito de um polígono. Como o polígono é convexo, podemos também determinar duas listas de vértices ordenas por x em tempo $O(n)$. Fazemos isto para os 2 polígonos, obtendo 4 listas de vértices ordenadas por x. Fazemos o merge destas 4 listas ordenadas em uma única lista de vértices ordenada por x, também em tempo $O(n)$. Então, chamamos o algoritmo de Graham que determina o fecho convexo de um conjunto de pontos ordenados por x em tempo $O(n)$.

2. (20 pontos) Dizemos que uma reta *perfura* um retângulo se existem vértices do retângulo tanto acima quanto abaixo da reta. Descreva um algoritmo que, dado um conjunto de n retângulos no plano, alinhados com os eixos ortogonais, determine em tempo $O(n)$ uma reta que perfure todos os retângulos do conjunto, ou diga que tal reta não existe.

   Reposta: Se existir uma reta r que perfura todos os retângulos, então ou existe r com coeficiente angular ≥ 1 ou com coeficiente angular ≤ 1. Vamos considerar o caso em que o coeficiente angular é ≥ 1, pois o outro caso é análogo. Uma reta r com coeficiente angular ≥ 1 intercepta um retângulo se e só se o vértice superior esquerdo do retângulo está acima de r e o vértice inferior direito está abaixo de r. Podemos definir dois conjuntos de pontos P_1 e P_2, onde P_1 é formado pelos vértices superiores esquerdos dos retângulos e P_2 é formado pelos vértices inferiores direitos. Queremos determinar se existe reta r tal que todo ponto de P_1 esteja acima de r e todo ponto de P_2 esteja abaixo de r. Este problema pode ser facilmente reduzido a programação linear com duas variáveis, como veremos a seguir.

   Seja r a reta definida por $y = ax + b$. Um ponto $(u, v) \in P_1$ estar acima de r significa que $v \geq au + b$. Um ponto $(u, v) \in P_2$ estar abaixo de r significa que $v \leq au + b$. Podemos também forçar o coeficiente angular a ser ≥ 1 com a restrição $a \geq 1$, embora isto não seja realmente necessário. O número de restrições é $O(n)$ e a função objetivo é irrelevante, já que queremos saber apenas se existe solução viável. Resolvendo este problema de programação linear para as variáveis a, b, determinamos a reta r com coeficiente angular ≥ 1 que intercepta todos os retângulos em tempo $O(n)$, se existir. O caso do coeficiente angular ≤ 1 é análogo.

3. (15 pontos) Considere dois conjuntos P_1 e P_2 de pontos no plano, com n pontos no total. Um *separador parcial* é um par de retas paralelas r_1, r_2 tal que todo ponto de P_1 esteja

acima de r_1 e todo ponto de P_2 esteja abaixo de r_2. Mostre como construir uma estrutura de dados a partir de P_1 e P_2 tal que dado um par de retas r_1, r_2 seja possível determinar em tempo $O(\log n)$ se r_1, r_2 é um separador parcial. Sua estrutura deve ter espaço $O(n)$.

Reposta: Primeiro, note que podemos testar separadamente se todo ponto de P_1 está acima de r_1 e se todo ponto de P_2 está abaixo de r_2. Os testes são análogos, portanto mostrarei apenas como testar se todo ponto de P_1 está acima de r_1.

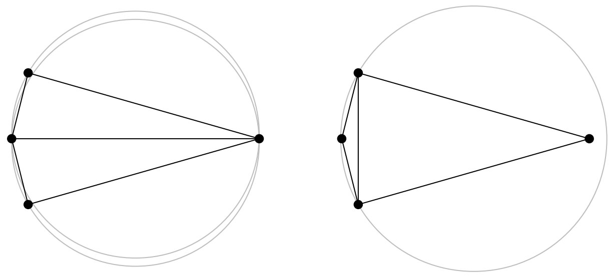
Uma solução simples consiste em armazenar o fecho convexo F de P_1. Todo ponto de P_1 está acima de r_1 se e só se F está acima de r_1. Usando busca binária, é fácil determinar, em tempo $O(\log n)$, se r_1 intercepta F. Caso r_1 intercepte F, respondemos não. Caso r_1 não intercepte F, verificamos se F está totalmente abaixo ou totalmente acima de r_1 em tempo $O(1)$, testando um ponto qualquer de F.

Outra solução que é usar um canhão para matar mosca, mas é totalmente correta, se baseia na estrutura de localização de ponto. Todo ponto de P_1 estar acima de r_1 no primal é equivalente a toda reta de P_1^* estar abaixo do ponto r_1^* no dual. Em outras palavras, significa que o ponto r_1^* está acima do envelope superior de P_1^*. Deste modo, podemos construir uma estrutura de localização de ponto que determina se r_1^* está acima ou abaixo do envelope superior de P_1^* com espaço $O(n)$ e tempo de consulta $O(\log n)$. Note que precisamos considerar apenas o envelope superior, pois se usarmos todas as células do arranjo de retas, então o espaço sobe para $O(n^2)$.

4. (15 pontos) Marque verdadeiro ou falso. Não é necessário justificar.

   (F) A triangulação de Delaunay minimiza a soma dos perímetros dos triângulos (dentre todas as triangulações possíveis para um dado conjunto de pontos).

   Reposta: Contra exemplo abaixo. Triangulação de Delaunay na esquerda e triangulação de perímetro mínimo na direita.



   (V) A árvore geradora mínima é um subgrafo da triangulação de Delaunay.

   Reposta: Provamos em sala.

   (F) A triangulação de Delaunay é o grafo dual do arranjo das retas definidas pelo dual dos pontos.

   Reposta: O arranjo de retas tem $\Theta(n^2)$ células, portanto seu grafo dual tem $\Theta(n^2)$ vértices, enquanto a triangulação de Delaunay tem somente n vértices.

   (V) O diagrama de Voronoi de n pontos no plano tem $O(n)$ vértices, arestas e faces.

   Reposta: Tem $O(n)$ faces por definição. O resto sai pelo teorema de Euler de modo semelhante a questão 1a.

   (V) O par de pontos mais distantes corresponde a duas células ilimitadas no diagrama de Voronoi.

   Reposta: O par de pontos mais distante é formado por vértices do fecho convexo, que correspondem a células ilimitadas no diagrama de Voronoi.

5. (15 pontos) Considere um conjunto de n pontos no plano e um conjunto de m retângulos não necessariamente disjuntos. Descreva um algoritmo eficiente baseado em range-trees que determine quantos pontos estão contidos no interior de cada retângulo. Analise a complexidade de tempo do seu algoritmo.

   Reposta: Construímos uma range-tree para os n pontos em tempo $O(n \log n)$. Fazemos uma consulta por retângulo, em tempo $O(\log^2 n)$ por consulta (podemos baixar para $O(\log n)$ por consulta usando fractional cascading). Como temos m retângulos, o tempo fazendo as consultas é $O(m \log^2 n)$ ou $O(m \log n)$ com fractional cascading. Portanto o tempo total é $O(n \log n + m \log^2 n)$ sem fractional cascading ou $O((n + m) \log n)$ com fractional cascading.

6. (20 pontos) Responda apenas 2 dentre as 3 questões abaixo:

   (a) Em sala, descrevemos um algoritmo para determinar uma 2-aproximação do menor círculo contendo k pontos. Modifique este algoritmo de modo a determinar uma 2-aproximação do menor *quadrado* alinhado com os eixos ortogonais contendo k pontos, ou seja, determinar um quadrado alinhado com os eixos ortogonais que contenha k pontos e tenha no máximo o dobro do diâmetro do menor quadrado alinhado com os eixos ortogonais contendo k pontos. Explique as modificações cuidadosamente, justifique a corretude e analise a complexidade do algoritmo.

   Reposta: Primeiro construímos uma grade irregular formada por retas horizontais e verticais com $k - 1$ pontos entre retas consecutivas. (No lugar de $k - 1$ podemos ter qualquer valor menor que k e da ordem de k. Para o caso do círculo mínimo tinha que ser menor que $k/2$). Considere os vértices desta grade irregular. Qualquer quadrado que não contenha nenhum vértice em seu interior está totalmente entre duas retas consecutivas (horizontais ou verticais), tendo portanto no máximo $k - 1$ pontos. Deste modo, o menor quadrado contendo k pontos contém um vértice da grade em seu interior.

   Para cada vértice v da grade, determinamos o menor quadrado contendo k pontos centrado em v. Isto pode ser feito em tempo $O(n)$ por vértice usando algoritmo de seleção. Como temos $O(n^2/k^2)$ vértices da grade, o tempo total é $O(n^3/k^2)$. Retornamos o menor quadrado construído anteriormente.

   Falta mostrarmos que de fato temos uma 2-aproximação. Seja Q^* o menor quadrado contendo k pontos. Seja v um vértice da grade no interior de Q. O menor quadrado centrado em v contendo k pontos tem no máximo 2 vezes o tamanho de Q^* e portanto também o quadrado que retornamos.

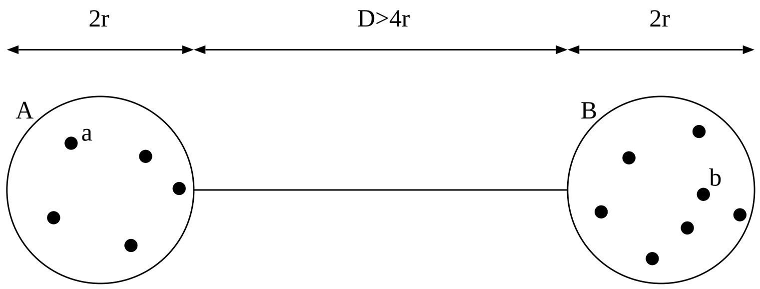
   (b) A esponjosidade X de um conjunto P de n pontos é a soma das distâncias Euclidianas definidas pelos pares de pontos de P, ou seja

$$X = \sum_{p,q \in P} ||pq||.$$

   Uma 2-aproximação da esponjosidade de P é um valor Y com $X \leq Y \leq 2X$. Descreva um algoritmo que determine uma 2-aproximação da esponjosidade de um conjunto de n pontos em espaço d-dimensional (d constante). Dica: use decomposição em pares bem separados.

   Reposta: Construa uma decomposição em pares bem separados com $s = 4$. Isto leva tempo $O(n \log n)$ e produz $O(n)$ pares bem separados (já que $s = 4$ é constante). Inicialmente, fazemos $X \leftarrow 0$. Para cada par bem separado (A, B), fazemos $X \leftarrow$

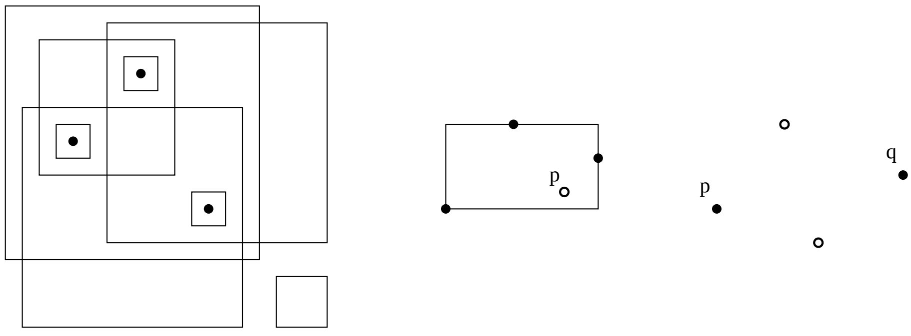
$X + D\,|A|\,|B|$, onde D é a distância entre as esferas de raio r mínimo que contém separadamente A e B (note que pares diferentes tem valores de D diferentes). Então, retornamos o valor de X.



Falta provarmos que a resposta está correta. Se (A, B) é um par bem separado, então sabemos, por definição de par bem separado, que a distância $||ab||$ entre um ponto $a \in A$ e um ponto $b \in B$ satisfaz $D \leq ||ab|| \leq 2D$. Deste modo, todo par a, b, dentre $|A|\,|B|$ pares, tem sua distância 2-aproximada por D.

(c) Determine a dimensão de VC do conjunto dos *quadrados* alinhados com os eixos ortogonais. É preciso mostrar que seu resultado é justo.

Reposta: A figura (a) abaixo mostra que a dimensão de VC é ≥ 3, já que 3 pontos são estraçalhados por quadrados alinhados.



(a) (b) (c)

Para mostrar que a dimensão de VC é < 4, considere um conjunto S de 4 pontos. Se existir um ponto $p \in S$ que não esteja no bordo, do menor *retângulo* alinhado contendo os 4 pontos, então não é possível obter o conjunto $S \setminus \{p\}$ nem com retângulos, nem com quadrados (figura (b) acima). Caso contrário, considere que os pontos ocupam um intervalo maior em x do que em y (o outro caso é análogo por rotação), conforme a figura (c). Seja p o ponto mais a esquerda e q o mais a direita. Não é possível obter o conjunto $\{p, q\}$ utilizando quadrados, já que os demais pontos estão um acima de p e q e outro abaixo de p e q e a distância vertical entre eles é maior do que a distância horizontal entre p e q.