Segunda Pseudo-prova de Geometria Computacional

UFRJ - COPPE - Engenharia de Sistemas e Computação
Professores: Guilherme D. da Fonseca e Celina M. H. de Figueiredo
Tempo de prova: 2 horas
Data da prova de verdade: 04/09/2008

- Em todas as questões que pedem para descrever um algoritmo (ou estrutura de dados), também é necessário justificar que o algoritmo está correto e analisar sua complexidade de tempo.
- Ao resolver um problema, não é necessário descrever nenhum algoritmo estudado em sala de aula. Fique a vontade para utilizar algoritmos estudados em aula como caixas pretas ou alterá-los, mas a resposta deve ser clara e sem ambiguidades para alguém que conheça estes algoritmos.
- Considere que a entrada encontra-se em posição geral, a não ser caso especificado o contrário.
- A única consulta permitida são duas folhas de papel A4 trazidas pelo aluno.

1. (15 pontos) Uma ou mais questões copiadas da primeira prova e da primeira pseudo-prova.
2. (20 pontos) Considere dois conjuntos P_1 e P_2 de pontos no plano, com n pontos no total. Um *separador parcial* é um par de retas paralelas r_1, r_2 tal que todo ponto de P_1 esteja acima de r_1 e todo ponto de P_2 esteja abaixo de r_2. O *custo* de um separador parcial é a distância vertical entre r_1 e r_2. Descreva um algoritmo que determine o separador parcial de custo mínimo em tempo $O(n)$.
3. (15 pontos) Seja P um poliedro convexo no espaço tridimensional. Descreva uma estrutura de dados que determine se um ponto de consulta q está dentro ou fora de P. O tempo de consulta deve ser $O(\log n)$ e o espaço de armazenamento deve ser $O(n)$.

4. (15 pontos) Marque verdadeiro ou falso. Não é necessário justificar.

   ( ) A triangulação de Delaunay minimiza o maior ângulo interno dos triângulos (dentre todas as triangulações possíveis para um dado conjunto de pontos).

   ( ) Se pq é uma aresta da triangulação de Delaunay, então o círculo cujo diâmetro é o segmento pq não possui nenhum ponto em seu interior.

   ( ) A triangulação de Delaunay é o grafo dual do diagrama de Voronoi.

   ( ) O diagrama de Voronoi de n pontos no espaço tridimensional tem $O(n)$ vértices, arestas, faces e células.

   ( ) O par de pontos mais próximos corresponde a células adjacentes no diagrama de Voronoi.

5. (15 pontos) Nesta questão, consideramos uma generalização de busca de regiões ortogonais. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos infinitos paralelogramos formados por quatro segmentos de retas que definam ângulos múltiplos de $45°$ com o eixo x. Descreva uma estrutura de dados que armazene um conjunto de n pontos no plano, em espaço $O(n \log n)$, de modo que, em tempo $O(\log^2 n)$, seja possível contar quantos pontos estão contidos em um paralelogramo $R \in \mathcal{R}$.

6. (20 pontos) Responda apenas 2 dentre as 3 questões abaixo:

   (a) Um algoritmo probabilístico (também chamado de Monte Carlo) é um algoritmo que não garante que a resposta está correta. No lugar disto, ele garante que a resposta está correta com uma certa probabilidade. Esta probabilidade independe da entrada, dependendo somente dos números aleatórios utilizados pelo algoritmo. Descreva um algoritmo probabilístico que determine uma aproximação de fator 2 do menor círculo contendo k pontos no plano. Seu algoritmo deve levar tempo $O(n)$ e encontrar uma resposta correta com probabilidade $\geq k/n$.

   (b) Dado um conjunto P de pontos vermelhos e um conjunto Q de pontos azuis no espaço Euclidiano d-dimensional (d constante), o par vermelho-azul mais próximo é o par de pontos $p \in P$, $q \in Q$ que minimiza $||pq||$. Seja p, q o par vermelho-azul mais próximo. Uma 2-aproximação do par vermelho-azul mais próximo é um par $p' \in P$, $q' \in Q$ tal que $||p'q'|| \leq 2||pq||$. Descreva um algoritmo que determine uma 2-aproximação do par vermelho-azul mais próximo. Dica: use decomposição em pares bem separados.

   (c) Um triângulo ilimitado é definido como a interseção de dois semiplanos. Determine a dimensão de VC do conjunto dos triângulos ilimitados. É preciso mostrar que seu resultado é justo.