Capítulo 3: Conexidade

Conexidade em Vértices

- Exemplo Fig 3.1
- Articulação
- Corte de vértices
- Conexidade de G, k(G), cardin. menor corte de vértices
  - k(G) = n-1 se não existir corte de vértices
- G é p-conexo se k(G) >= p
- Grafos triviais, desconexos, conexos, completos

Conexidade em Arestas

- Ponte
- Corte de arestas
- Conexidade em arestas de G, k'(G), cardin. menor corte de arestas
  - k'(G) = 0 se G é trivial
- G é p-aresta-conexo se k'(G) >= p
- Grafos desconexos, conexos, completos

Teorema 3.1 k(G) <= k'(G) <= delta(G)

- **k'(G) <= delta(G)**
- **Provamos que k(G) <= k'(G) por indução em k'(G)**
  - Base k'(G) = 0
  - Seja G um grafo com k'(G) = p, para p > 0 e uv uma aresta de um p-corte de arestas
  - Seja H = G - uv.
  - Temos que k'(H) = p-1, pela H I, temos k(H) <= k'(H)

- Seja S um k(H)-corte de vértices de H
    - Se G - S é desconexo,
        - $k(G) \leq k(H) \leq p-1$
    - Senão, uv é uma ponte de G - S
        - Se $|V(G - S)| = 2$
            - $k(G) \leq |V(G) - 1| = k(H) + 1 \leq p$
        - Senão v é articulação de G - S e S + v é corte de vértices de G e
            - $k(G) \leq k(H) + 1 \leq p$

QED

- Exemplo Fig 3.2

Blocos

- Um grafo conexo que não possui articulação é chamado de **bloco**
- Todo bloco com pelo menos 3 vértices é 2-conexo
- **Um bloco de um grafo** é um subgrafo que é um bloco e maximal

Teorema 3.2 (Whitney 1932)

Um grafo com n >= 3 é 2-conexo sse quaisquer 2 vértices são conexos por pelo menos 2 caminhos disjuntos internamente

- Volta. Se existem 2 caminhos disjuntos internamente para todo par de vértices, então G é conexo e não possui articulação, logo é 2-conexo.

- Ida. Seja G 2-conexo. E um par qualquer de vértices u,v. Prova por indução na d(u,v).
- Base d(u,v) = 1. Como G é 2-conexo, uv não é uma ponte, e pelo T2.3, está contida em um ciclo.

- Suponha d(u,v) = k > 1.
- Seja w o que precede u,v-cam min
- Para u,w existem 2 disjuntos P,Q pela H I
- G - w contém u,v-caminho P'
- Seja x último de P' em (P ou Q) (Fig 3.4)
  - P(u,x) + P'(x,v)
  - Q + wv
- QED

Conexidade

Corolário 3.2.1: Se G é 2-conexo, então quaisquer 2 vértices de G pertencem a um ciclo.

Conexidade

- Subdivisão de aresta
- Classe dos blocos, n >= 3, é fechada sob a operação de subdivisão

Conexidade

- Corolário 3.2.2: Se G é um bloco com $n > 2$, então quaisquer duas arestas pertencem a um mesmo ciclo
  - Aplique subdivisão às 2 arestas e1, e2 obtendo G'. Pelo Cor 3.2.1, os 2 novos vértices pertencem a um ciclo comum.
  - Em G esse ciclo contém as arestas e1, e2 (Fig 3.6).

Conexidade

- Teorema de Menger: Um grafo G com n > k é k-conexo sse quaisquer 2 vértices são conectados por pelo menos k cam disj int.
- Um grafo G com n > k é k-aresta-conexo sse quaisquer 2 vértices são conectados por pelo menos k cam disj em arestas.