Coloração de Arestas

Número cromático de arestas

- k-coloração de arestas
- k-coloração própria de arestas
- Cada cor induz um emparelhamento
- k-colorível em arestas se admite k-coloração própria de arestas
- k-colorível também é (k+1)-colorível

- **Número cromático em arestas *K'* =**
- **k-cromático em arestas =**
- **índice cromático**
- ***K'*(G) >= \Delta(G)**
- **Exemplo**

Lema 6.1.1 Seja G um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Então G tem uma 2-coloração em arestas na qual ambas as cores são representadas em cada vértice de grau pelo menos 2.

- **Só precisamos nos concentrar nos vértices com grau pelo menos 2**
- **Se G é um ciclo par. Trivial.**

- **Se G é Euleriano mas não ciclo par, existe v_0 de grau par >= 4.**
- **Considere um trajeto Euleriano:**
- **v_0, v_1, ..., v_0**
- **atribua cor 1 às arestas ímpares e 2 às pares**
- **Como todo vértice é interno, é incidente às 2 cores**

- **Se G não é Euleriano. Inclua um vértice v adjacente a todos os vértice de grau ímpar, obtendo um grafo Euleriano**
- **Um trajeto Euleriano começando por v tem a propriedade anterior**
- **Q.E.D.**

- **c(v) número de cores diferentes representadas em v na coloração C**
- **c(v) <= d(v)**
- **igualdade ocorre se é uma coloração própria**

- **C' é um melhoramento de C se, com a mesma quantidade de cores, tem um somatório de c'(v) maior do que somatório de c(v)**
- **uma k-coloração em arestas é ótima se não pode ser melhorada (k pode ser menor que *K'*(G))**

Lema 6.1.2: Seja C = {E_1, ..., E_k} uma k-coloração em arestas ótima de G. Se existe vértice u e cores i e j tais que i não está representado em u e j tem pelo menos 2 representações em u, então a componente H de G[E_i U E_j] que contém u é um ciclo ímpar.

- **Suponha que H não é um ciclo ímpar. Então pelo Lemma 6.1.1, H tem uma 2-coloração C' na qual ambas as cores estão representadas em cada vértice de grau pelo menos 2.**
- **Com isso podemos melhorar C usando C', uma contradição. Então H é um ciclo ímpar.**
- **Q.E.D.**

Teorema 6.1 Se G é bipartido, então *K’*(G) = \Delta

- **Contrapositiva. Considere *K’* > \Delta.**
- **Então em uma \Delta-coloração de arestas existe v, com c(v) < d(v) (satisfazendo Lema 6.1.2). Portanto G contém um ciclo ímpar.**
- **Q.E.D.**

Teorema de Vizing e Gupta

Teorema 6.2 (Vizing, Gupta, Fournier) Seja G um grafo, então *K'*(G) = \Delta ou *K'*(G) = \Delta + 1.

- **Suponha que *K'*(G) > \Delta + 1.**
- **Seja C = {E_1, ..., E_{\Delta + 1}} uma (\Delta + 1)-coloração em arestas ótima e u tal que c(u) < d(u).**
- **Então existem as cores**
  - **i_0: não representada em u e**
  - **i_1: representada pelo menos 2 vezes em u.**
- **Considere uv e uv_1 com cores i_1**

- Como $d(v_1) < \Delta +1$, existe cor i_2 que não ocorre em v_1.
- Então i_2 ocorre em u (uv_2), senão poderíamos melhorar C trocando uv_1 por i_2.
- Da mesma forma, existe i_3 que não ocorre em v_2.
- Então i_3 ocorre em u (uv_3), senão poderíamos melhorar C trocando uv_2 por i_3 e uv_1 por i_2.

- Continuando este processo, nós contruímos uma sequência v_1, v_2, ... de vértices e u_1, u_2, … de cores, t.q.
  - uv_j tem cor i_j
  - i_{j+1} não está representado em v_j
- como $d(u)$ é finito, existe um t que repete a cor ou seja: $i_{t+1} = i_k$, $k < t$

- **Podemos recolorir G obtendo C':**
  - **para $1 \leq j \leq k-1$**
    - **recolorir uv_j com a cor i_{j+1}**
    - **não melhora nem piora**
- **Pelo Lema 6.1.2 a componente H', contendo u, de $G[E'_{i_0} \cup E'_{i_k}]$ é um ciclo ímpar.**

- recolorir G obtendo C'':
  - uv_j com cor u_{j+1}, para k <= j <= t-1 e
  - uv_t com cor u_k
- Pelo Lema 6.1.2 a componente H'', contendo u, de G[E''_{i_0} U E''_{i_k}] é um ciclo ímpar.
- Como v_k tem grau 2 em H', tem grau 1 em H'', contradição.
- Q.E.D.