Conjuntos Independentes e Cliques

Conjuntos independentes

- Conjunto independente
- \alpha(G) conjunto independente máximo
- Cobertura das arestas por vértices = cobertura de vértices = cobertura
  - conjunto de vértices incidentes a todas as arestas
  - \beta(G) cobertura mínima

Teorema 7.1: S é um conjunto independente de G sse V \ S é uma cobertura de vértices.

- S é um conjunto independente sse cada aresta tem pelo menos um extremo em V \ S
- Q.E.D.

Corolário 7.1 $\alpha(G) + \beta(G) = n$

- Seja S um conj independente máximo e K uma cobertura mínima. Pelo Teo 7.1, $V \setminus S$ é uma cobertura. Portanto
- $n - \beta = |V \setminus K| <= \alpha$
- $n - \alpha = |V \setminus S| >= \beta$
- Q.E.D.

- \alpha'(G) emparelhamento máximo
- Cobertura dos vértices por arestas = cobertura de arestas
  - conjunto de arestas incidentes a todas os vértices
  - \beta'(G)
- O Teo 7.1 vale para arestas?
  - não
- mas o Cor 7.1, sim

Teorema 7.2 (Gallai, 1959) (análogo ao Corolário 7.1) Se $\delta > 0$, então $\alpha' + \beta' = n$

- Seja $|M| = \alpha'$ um emparelhamento máximo de G e U o conjunto de vértices M-insaturados.

- Então existe um conjunto de arestas E' de tamanho |U|, uma incidente a cada vértice de U. M U E' é uma cobertura de arestas de G
- portanto \beta' <= |M U E'| =
- \alpha' + (n - 2\alpha') = n - \alpha'
- ou \alpha' + \beta' <= n

- Agora seja |L| = \beta' uma cobertura de arestas mínima de G.
- Seja H = G[L] e M um emp max de H.
- Seja U os M-insaturados de H (V(G) = V(H)).
- H[U] não tem arestas portanto

- $|L| - |M| = |L - M| = |U| = n - 2|M|$
- $|L| + |M| = n$
- Então $\alpha' + \beta' >= |M| + |L| = n$
- Q.E.D.

- Todo emp max pode ser estendido para uma cobertura de arestas mínima?
  - adicionando uma aresta para cada vértice insaturado
  - é mínimo porque um menor exigiria um emp maior do que o máximo.

(CAPÍTULO 5) Lema 5.3 (König) Em um grafo bipartido com, o tamanho do emp max = tam cobertura mínima. (\alpha’ = \beta)

Teorema 7.3 Em um grafo bipartido com \delta > 0. Tamanho do indep max = tam cobertura de arestas mínima.

- Pelos Cor 7.1 e Teo 7.2, temos \alpha + \beta = \alpha' + \beta'.
- Pelo Lema de König, \alpha' = \beta, então \alpha = \beta'.
- Q.E.D.

- Algoritmos para esses parâmetros

Teorema de Ramsey

- Clique
- $r(k,l) = n$ todo grafo com n vértices possui uma k-clique ou um l-conj ind
- (7.5) $r(1,l) = 1$ e $r(k,1) = 1$
- (7.6) $r(2,l) = l$ e $r(k,2) = k$
- exemplos Figura 7.2

Teorema 7.4 (Erdös, Szekeres 1935 e Greenwood, Gleason 1955)

Para quaisquer dois inteiros $k,l \geq 2$,

$r(k,l) \leq r(k,l-1) + r(k-1,l)$.

Se ambos pares, $r(k,l-1)$ e $r(k-1,l)$, então vale a desigualdade estrita.

- Seja G um grafo com $r(k,l-1) + r(k-1,l)$ vértices, considere v em V
- Para v vale: ou (i) não é adjacente a pele menos $r(k,l-1)$; ou (ii) é adjacente a pelo menos $r(k-1,l)$.
- Se (i) ou existe k-clique ou $(l-1)$-independente, que junto com v forma um l-independente; se (ii) análogo para clique

- Suponha ambos pares. E G com r(k,l-1) + r (k-1,l) - 1 vértices.
- Existe v de grau par. Então v não pode ser adjacente a exatamente r(k-1,l) - 1 vértices, logo vale (i) ou (ii)
- Q.E.D.

Aula 2

- Exemplos Figura 7.2
- (7.8) r(3,3) >= 6
  - por causa da Figura 7.2a
- r(3,3) = 6
  - Pelo Teorema 7.4 e (7.6)
- (7.9) r(3,4) >= 9
  - por causa da Figura 7.2b
- r(3,4) = 9
  - Pelo Teorema 7.4 e (7.9)

Teorema 7.5 $r(k,l) <= \binom{k+l-2}{k-1}$

- Por indução em $k+l$.
- Base: é fácil ver que vale para $k+l <= 5$
- H.I. vale para $5 <= k+l < m+n$, para inteiros m e n
- Pelo Teorema 7.4 vale $r(m,n) <= r(m,n-1) + r(m-1,n)$

- Pela H.I. r(m,n-1) + r(m-1,n) <= \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} =
- \binom{m+n-2}{m-1} pela relação de Stifel
- Q.E.D.

Teorema 7.6 [Erdös 1947] $r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$

- Seja G_n conjunto dos grafos com conjunto de vértices $v_1, \dots, v_n$.
- $|G_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.
- Desses, quantos possuem uma k-clique?
- Denote por G_n^k

- Para uma k-clique fixa é $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$
- $|G^k_n| \le \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}- \binom{k}{2}}$
- Portanto $\frac{|G_n^k|}{|G_n|} \le \binom{n}{k} 2^{ - \binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{- \binom{k}{2}}}{k!}$
- Suponha $n< 2^{\frac{k}{2}}$

- Então $\frac{|G_n^k|}{|G_n|} < \frac{2^{\frac{k^2}{2}} 2^{ -\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2}$
- Portanto, menos da metade dos grafos possíveis possuem uma clique de tamanho k. O mesmo para independente. Então algum grafo não possui nem k-clique nem k-independente. Logo vale o teorema.
- Q.E.D.

Corolário 7.6 Se $m = \min \{k,l\}$, então $r(k,l) >= 2^{\frac{m}{2}}$

Teorema de Turán

Teorema 7.8 Se G é um grafo sem K_{m+1}, então G é grau-majorado por um grafo m-partido completo H. Além disso, se há igualdade na sequência de graus, então G é isomorfo a H.

- Por indução em m. Assuma que vale para $m < n$ e seja G um grafo sem K_{n+1}.
- Seja u um vértice de grau Δ e $G_1 = G[N(u)]$.
- Então G_1 não contém K_n. Pela H.I. G_1 é grau-majorado por um grafo H_1 que é $(n-1)$-partido completo.

- Defina
  - $V_1 = N(u)$ e $V_2 = V \setminus V_1$
  - G_2 o grafo com vértices V_2 porém sem arestas.
- Considere a junção $G_1 \vee G_2$
- $N_G(v) \subseteq N_{G_1 \vee G_2}(v)$ para v em V_1
- Como todo vértice de V_2 tem grau Δ em $G_1 \vee G_2$, G é grau-majorado por $G_1 \vee G_2$. Podemos então construir um grafo n-partido completo que majora G, que é $H = H_1 \vee G_2$.

- Suponha agora que há igualdade nas sequências de graus de G e $H = H_1 \vee G_2$.
- Então G tem a mesma sequência de graus de $G_1 \vee G_2$ (pois, $G_1 \vee G_2$ está entre G e H)
- para v em V_1, vale $N_G(v) = N_{G_1 \vee G_2}(v)$

- Então em G todo vértice de V_1 deve ser adjacente a todos de V_2. Portanto $G = G_1 \vee G_2$ (senão as sequências de graus seriam diferentes).
- Como $G = G_1 \vee G_2$ tem a mesma sequência de graus de $H = H_1 \vee G_2$, os grafos G_1 e H_1 devem ter a mesma sequência de graus, pela H.I., são isomorfos. Logo G é isomorfo H.
- Q.E.D.

- T_{m,n}: m-partido completo com n vértices no qual as partes tem tamanhos mais próximos possível
- Exemplo Figura 7.3 - T_{3,8}

Teorema 7.9 Se G não contém K_{m+1}, então $|E(G)| \leq |E(T_{m,n})|\}$. Além disso, se $|E(G)| = |E(T_{m,n})|$ então G isomorfo a $T_{m,n}$.