TEORIA DE GRAFOS–Lista 1

COPPE – SISTEMAS – UFRJ

08/06/05

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo, $|V| = n$ e $|E| = m$. Mostre que:

   (i) $m \leq n(n-1)/2$

   (ii) Se G é um grafo bipartido então $m \leq n^2/4$

2. Se G possui vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a seqüência $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ é denominada *seqüência de graus* de G.

   (i) Existe um multigrafo com a seguinte seqüência de graus: 3,3,3,3,5,6,6,6,6?

   (ii) Existe um multigrafo com a seguinte seqüência de graus: 1,1,3,3,3,3,5,6,8,9?

   (iii) Existe um grafo (simples) com a seqüência de graus do ítem anterior?

   (iv) Demonstre que a seqüência $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de inteiros não negativos é uma seqüência de graus de algum multigrafo se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ é par.

3. Classifique cada uma das afirmações abaixo como **Verdadeira** ou **Falsa**, justificando convenientemente sua resposta:

   (i) Se G e H são grafos isomorfos então eles têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

   (ii) Se G e H têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas então eles são isomorfos.

   (iii) Se G e H são grafos isomorfos então eles têm a mesma sequência de graus.

   (iv) Se G e H têm a mesma sequência de graus então eles são isomorfos.

4. Mostre que em uma festa com n $(n \geq 2)$ pessoas, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

5. O $k - cubo$ (Q_k) é um grafo (simples) cujos vértices são k-uplas ordenadas de 0's e 1's, e tal que dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma coordenada.

   (i) Desenhe Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.

   (ii) Qual é o número de vértices e arestas de cada um desses grafos?

   (iii) Qual é o número de vértices e arestas de Q_k?

   (iv) Demonstre que Q_k é um grafo bipartido.

6. Um grafo (simples) é *auto-complementar* se $G \cong \overline{G}$.

   (i) Dê dois exemplos de grafos auto-complementares.

   (ii) Prove que um grafo auto-complementar tem $4k$ ou $4k + 1$ vértices, para k um inteiro não negativo.

7. Mostre que dois caminhos quaisquer de comprimento máximo em um grafo G conexo possuem necessariamente algum vértice em comum.

8. A cintura de um grafo G é o comprimento de seu menor ciclo. Se G for acíclico, sua cintura é infinita. Mostre que um grafo k-regular de cintura 4 possui pelo menos $2k$ vértices.