

Coloração em Grafos

Celina M. Herrera de Figueiredo[†]

João Meidanis[‡]

Célia Picinin de Mello[‡]

[†]Instituto de Matemática
UFRJ
Caixa Postal 68530
21945-970 Rio de Janeiro, RJ
celina@cos.ufrj.br

[‡]Instituto de Computação
UNICAMP
Caixa Postal 6176
13083-970 Campinas, SP
meidanis,celia@dcc.unicamp.br

Resumo

Este texto é uma introdução à coloração em grafos. Consideramos dois tipos de problemas de coloração em grafos: coloração de vértices e coloração de arestas. Aplicamos a estes problemas técnicas clássicas de coloração tais como: algoritmos gulosos, decomposição e alteração estrutural. Consideramos classes de grafos para as quais tais técnicas resolvem estes problemas de coloração eficientemente.

Abstract

This monograph is an introduction to graph colouring. We consider both vertex colourings and edge colourings of graphs. We apply to these problems classical colouring techniques such as: greedy algorithms, decomposition, and structural change. We consider classes of graphs for which those techniques yield efficient algorithmic solutions.

Prefácio

Este texto consiste das notas para um curso apresentado no XVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação em Brasília em agosto de 1997. Trata-se de uma introdução à coloração em grafos para pesquisadores e estudantes da área de ciência da computação.

Agradecemos ao comitê organizador da XVI Jornada de Atualização em Informática pela oportunidade de apresentar este curso. Agradecemos ao CNPq e à FAPESP pelo apoio concedido com bolsas de pesquisas e auxílios para viagens. Em particular, agradecemos ao CNPq/ProTeM-CC-II, Project ProComb, que consolidou a nossa colaboração. Agradecemos também ao Marcelo Marcos Barbosa pela sua ajuda na confecção da maioria das figuras deste texto.

C. M. H. de Figueiredo, Rio de Janeiro
J. Meidanis, Campinas
C. P. de Mello, Campinas

1 Introdução

O estudo de coloração, um tópico básico em Teoria dos Grafos, surgiu a partir do conhecido “problema das quatro cores” [39]. Em 1852, Francis Guthrie questionou se todo grafo planar sem laços poderia ser colorido com quatro cores. Embora estivesse claro que quatro cores eram necessárias, a questão se referia ao número mínimo de cores, i.e., quantas cores são suficientes para colorir qualquer grafo planar. Esta questão foi respondida afirmativamente por Appel e Haken [1], usando computador, após mais de 100 anos. Recentemente, Robertson, Sanders, Seymour e Thomas [43] confirmaram esta resposta fornecendo uma prova mais simples, mais aceita pela comunidade matemática, embora ainda use o computador. O problema das quatro cores corresponde à coloração dos vértices de um grafo. Mais precisamente, corresponde à coloração mínima dos vértices de um grafo. Outros problemas de coloração existem, tais como coloração das arestas, coloração total (vértices e arestas), coloração a partir de conjuntos de cores atribuídos previamente aos vértices ou às arestas de um grafo. O escopo deste texto, no entanto, é mais restrito. Estaremos enfocando *coloração mínima de vértices* e *coloração mínima de arestas* em *classes de grafos*.

É amplamente conhecido que tanto o problema de coloração dos vértices quanto o de coloração das arestas de um grafo são problemas NP-difíceis [19]. Contudo, para algumas classes de grafos, estes problemas podem ser resolvidos através de algoritmos eficientes (polinomiais). Para a classe dos grafos bipartidos, ambos os problemas são solucionados polinomialmente [30]. Para grafos cordais, existem algoritmos simples e polinomiais que colorem seus vértices [20]; mas não se sabe se o problema para arestas pode ser resolvido eficientemente.

Apresentamos neste texto um apanhado geral das técnicas mais importantes existentes no momento para a resolução desses problemas e algumas classes de grafos para as quais tais técnicas os resolvem eficientemente. Salientamos, também, as conjecturas existentes com o objetivo de motivar estudantes, professores e pesquisadores a dar a sua contribuição na área.

Alguns livros em português que contêm capítulos ou seções com os resultados clássicos desses tópicos são os de Lucchesi [33], Lucchesi e colegas [34], Szwarcfter [47] e Boaventura [38]. No exterior, dois livros muito conhecidos são o de Fiorini e Wilson [17], de 1977, que trata somente de coloração de arestas; e o de Golubic [20], de 1980, que considera principalmente coloração de vértices. Desde então, pesquisadores têm produzidos vários artigos técnicos sobre esse assunto. No livro recente de Jensen e Toft [30], encontramos uma coletânea de 200 problemas não resolvidos em Teoria da Coloração. Estes autores mantêm uma *web page* contendo as atualizações e comentários dos diversos pesquisadores, demonstrando o interesse que o assunto tem tido atualmente: <http://www.imada.ou.dk/Research/graphcol.html>.

A Teoria dos Grafos é tema presente e obrigatório nos cursos de graduação em ciência da computação, tais como: matemática combinatória, algoritmos em grafos, estrutura de dados, geometria computacional, linguagens formais. Supomos que o leitor possui um domínio básico de Teoria de Grafos correspondente a cursos de graduação.

1.1 Motivação

Uma **coloração** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices ou às arestas do grafo de tal forma que não haja conflitos. Motivamos a seguir, através de exemplos, o conceito de coloração. Neste texto consideramos **coloração dos vértices**, caso onde associamos cores aos vértices do grafo de tal forma que a vértices adjacentes sejam atribuídas cores distintas. Consideramos também **coloração das arestas**, caso onde associamos cores às arestas do grafo de tal forma que a arestas adjacentes sejam atribuídas cores distintas. Quando colorimos vértices e arestas simultaneamente de tal forma que a vértices e arestas adjacentes sejam atribuídas cores distintas, temos uma **coloração total** de um grafo.

Vejamos abaixo três exemplos destes problemas em aplicações práticas.

Alocação de registradores

Uma referência para esse problema clássico é [24, p.113–114]. Cada variável num bloco de programa (onde bloco é um pedaço de programa sem desvios) corresponde a um intervalo no qual ela é necessária. O grafo de interseção destes intervalos é construído [20]. Cada coloração válida deste grafo dará um esquema de alocação das variáveis em registradores, sem que o mesmo registrador seja usado ao mesmo tempo para guardar variáveis distintas. Nesta aplicação, cores representam registradores e deseja-se minimizar o número de registradores. A Figura 1 ilustra esta aplicação.

O problema da coloração de vértices é NP-difícil em geral, mas polinomial para grafos de intervalos [20]. A solução de muitos problemas práticos que contêm o problema da alocação como um subproblema envolve determinar o número cromático de um grafo. Um outro exemplo é determinar o menor número de compartimentos em que n produtos químicos devem ser guardados para que pares incompatíveis não causem explosões.

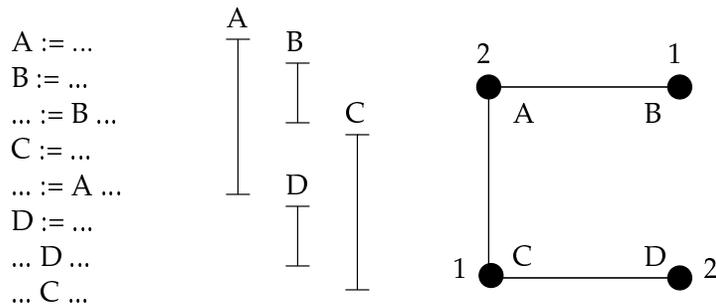


Figura 1: Coloração de vértices aplicada ao problema de alocação de registradores.

Planejamento de torneios

Dada uma federação de times, fazer uma tabela que especifique quem joga com quem em cada rodada. O objetivo é minimizar o número de rodadas. Nesta aplicação, cores representam rodadas.

Há vários esquemas para grafos completos. Um deles é fazer a primeira rodada (um emparelhamento máximo qualquer) e depois permutar ciclicamente todos os times, menos o primeiro. A Figura 2 exemplifica esta aplicação.

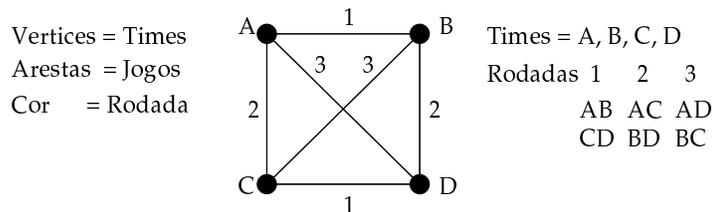


Figura 2: Coloração de arestas aplicada ao planejamento de torneios.

Alocação de horários

O problema de alocação de salas, horários e professores num colégio pode ser modelado com um grafo bipartido em professores e salas. Há uma aresta entre um professor e uma sala se o professor tem que dar aula naquela sala. Uma coloração das arestas deste grafo bipartido corresponde a uma alocação dos horários de cada uma destas salas. Obviamente, não pode haver conflito do lado dos professores nem das salas. Nesta aplicação, cores representam horas. A Figura 3 exemplifica esta aplicação.

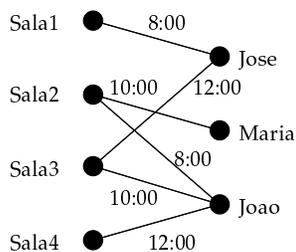


Figura 3: Coloração de arestas aplicada à alocação de horários.

1.2 Estrutura do texto

O texto está dividido em duas partes: Coloração de Vértices e Coloração de Arestas.

Na parte “Coloração de Vértices”, descrevemos três técnicas com as respectivas classes de grafos onde estas técnicas são aplicadas com sucesso. O ALGORITMO GULOSO é definido e aplicado para colorir eficientemente grafos cordais e grafos de comparabilidade. As técnicas de decomposição são consideradas a seguir. Aplicamos DECOMPOSIÇÃO POR CORTE aos grafos separáveis por cliques. A técnica de CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES é aplicada aos grafos fracamente cordais, grafos Meyniel e quase-Meyniel, e grafos perfeitamente contraíveis.

Na parte “Coloração de Arestas”, as técnicas são divididas em sete tipos. Apresentamos uma prova do TEOREMA DE VIZING e discutimos o problema de classificação. As CADEIAS DE KEMPE são usadas para colorir os grafos bipartidos. O LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING é aplicado aos grafos planares. Discutimos o problema de reconhecer os GRAFOS SOBRECARRREGADOS e consideramos a classe dos grafos snarks. A técnica de PULLBACK é aplicada a grafos com grau máximo ímpar. A técnica de DECOMPOSIÇÃO é usada para colorir alguns grafos split e alguns grafos indiferença. O GRAFO DAS CORES FALTANTES é aplicado a grafos multipartidos completos.

2 Coloração de vértices

Uma k -coloração dos vértices de um grafo G é uma associação de k cores aos vértices de G de tal forma que a vértices adjacentes sejam atribuídas cores distintas.

Estamos interessados em determinar o menor número de cores com que é possível colorir os vértices de G . Esse número é denotado por $\chi(G)$ e denominado **número cromático** de G . Chamamos de **clique** um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo. É imediato ver que o tamanho de uma maior clique em G , denotado por $\omega(G)$, é um limite inferior para o número cromático de G , i.e., $\chi(G) \geq \omega(G)$. Para os grafos bipartidos, temos igualdade: ou o grafo é trivial e tem ambos parâmetros iguais a 1, ou o grafo tem pelo menos uma aresta e tem ambos parâmetros iguais a 2. O grafo G da Figura 4 é um exemplo de um grafo que não é bipartido e tem $\chi(G) = \omega(G)$. Muitos outros exemplos existem.

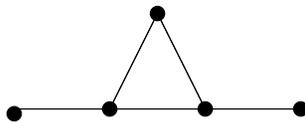


Figura 4: Um grafo G com $\chi(G) = \omega(G)$.

Esse limite inferior poderia nos levar a pensar que para um grafo possuir número cromático alto, seria necessário conter uma clique com muitos vértices. Contudo B. Descartes [6], em 1955, demonstrou que, para qualquer inteiro positivo k , é possível construir um grafo sem triângulos e com número cromático k .

Na realidade, calcular o número cromático $\chi(G)$ é um problema NP-difícil [19]. Portanto é um problema que a maioria dos pesquisadores não tem a esperança de resolver eficientemente. Uma abordagem usada para esse problema é analisá-lo em

classes de grafos. Mostraremos técnicas clássicas para a coloração de vértices e veremos em quais classes de grafos cada técnica fornece algoritmos polinomiais.

A maioria das classes que veremos será subclasse dos grafos perfeitos. Um grafo G é **perfeito** se para todo subgrafo induzido H de G , temos $\chi(H) = \omega(H)$.

Dado $X \subseteq V(G)$, denotamos por $G[X]$ o **subgrafo induzido** por X , isto é, $V(G[X]) = X$ e $E(G[X])$ são as arestas de G com ambos os extremos em X . Quando $X = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$, escrevemos $G[v_1, v_2, \dots, v_i]$ ao invés de $G[\{v_1, v_2, \dots, v_i\}]$. Usamos a terminologia **caminho induzido** para caminho sem cordas e **ciclo induzido** para ciclo sem cordas.

O grafo da Figura 4 é um exemplo de grafo perfeito. O grafo da Figura 5 não é perfeito, pois contém como subgrafo induzido o ciclo induzido por cinco vértices C_5 , onde $\chi(C_5) = 3$ e $\omega(C_5) = 2$.

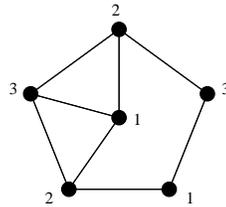


Figura 5: Um grafo que não é perfeito.

Parece natural estudar coloração de vértices na classe dos grafos perfeitos, pois ela é formada por grafos G cujo número cromático é igual ao limite inferior dado acima para todo subgrafo induzido de G . Realmente, na classe dos grafos perfeitos, o problema de encontrar o número cromático está resolvido eficientemente: Grötschel, Lovász e Schrijver [21] usaram o método do elipsóide — uma técnica para resolver problemas em Programação Linear — para obter um algoritmo que resolve o problema do número cromático em grafos perfeitos. Este é um algoritmo complexo e que não evidencia as propriedades combinatórias da classe. Uma linha de pesquisa tornou-se, então, a busca de algoritmos combinatórios para essa classe. Até hoje, não se conhece tal algoritmo. O que se tem feito desde então é projetar algoritmos combinatórios e eficientes para subclasses dos grafos perfeitos.

Descrevemos a seguir três técnicas clássicas de coloração de vértices: ALGORITMO GULOSO, DECOMPOSIÇÃO POR CORTE, e CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES. Consideramos em cada caso classes de grafos onde estas técnicas fornecem algoritmos polinomiais. Para a complexidade destes algoritmos, num grafo $G = (V, E)$, usamos n para a cardinalidade do conjunto de vértices V e m para a cardinalidade do conjunto de arestas E .

2.1 O Algoritmo Guloso

Considere uma ordem v_1, v_2, \dots, v_n no conjunto de vértices de um grafo G . Dado um vértice v , denote por $Adj(v)$ o conjunto de vértices adjacentes a v em G . Defina uma função c tal que $c(v_1) = 1$ e, para $2 \leq i \leq n$, $c(v_i)$ é o menor inteiro não usado em $Adj(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. Esta técnica é denominada ALGORITMO GULOSO. É fácil ver que o ALGORITMO GULOSO sempre produz uma coloração válida para os vértices de um grafo. Um limite superior para o número cromático $\chi(G)$ pode ser

obtido através deste algoritmo. Denote por $\Delta(G)$ o grau máximo no grafo G . De fato, sendo que $|Adj(v_i)| \leq \Delta(G)$, tem-se que $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$, obtendo, dessa forma, um limite superior: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Este limite é estrito para quase todo grafo. Em 1941, Brooks [6] demonstrou que a igualdade é atingida somente quando o grafo é completo ou é um ciclo ímpar. Novamente, temos exemplos em que $\Delta(G) + 1 - \chi(G)$ é muito alto: $\chi(K_{1,n}) = 2$, mas $\Delta(K_{1,n}) = n$.

Agora, se considerarmos uma ordem especial para os vértices do grafo, conseguiremos um limite melhor para o número cromático. Seja \mathcal{H} o conjunto de todos os subgrafos induzidos de G . Denote por $\delta(G)$ o grau mínimo em G . Chamamos de **degenerescência** do grafo G , denotada por $degen(G)$, o número $\max_{H \in \mathcal{H}} \delta(H)$. A degenerescência dá um novo limite superior para o número cromático:

Lema 1 $\chi(G) \leq degen(G) + 1$.

Prova: Seja v_n um vértice de grau $\delta(G)$. Considere uma seqüência dos vértices v_1, v_2, \dots, v_n , onde v_i tem grau $\delta(G[v_1, v_2, \dots, v_i])$, para $1 \leq i \leq n$.

Cada v_i desta seqüência de vértices v_1, v_2, \dots, v_n tem no máximo $degen(G)$ vizinhos anteriores a v_i . Logo, o ALGORITMO GULOSO colore v_i com no máximo a cor $degen(G) + 1$, obtendo uma $(degen(G) + 1)$ -coloração para G . \square

Está claro que a coloração obtida pelo ALGORITMO GULOSO depende da ordem dos vértices. Considere o ciclo induzido por seis vértices, denotado por C_6 , que aparece na Figura 6. Considere as seguintes ordens para seus vértices: a, d, b, e, c, f e a, b, c, d, e, f (esta segunda, uma ordem por grau mínimo). Usando a primeira, o ALGORITMO GULOSO usa três cores, enquanto que usando a segunda C_6 é colorido com duas cores.

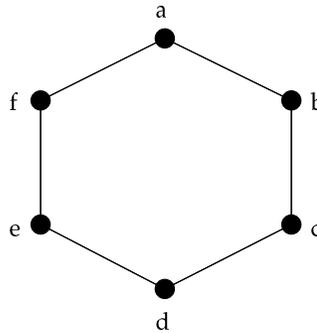


Figura 6: O grafo C_6 .

Para todos os exemplos vistos até o momento neste texto, o ALGORITMO GULOSO com uma ordem por grau mínimo como entrada usa χ cores. Veremos a seguir, um exemplo onde isto não ocorre.

Se considerarmos todas as ordens possíveis para os vértices de um grafo sempre encontraremos uma onde o ALGORITMO GULOSO usa o número mínimo de cores.

É então natural tentar caracterizar ordens especiais para os vértices de um grafo tais que o ALGORITMO GULOSO origina uma coloração ótima.

Considere o caminho induzido por quatro vértices P_4 , com conjunto de vértices $\{a, b, c, d\}$ e arestas ab, bc e cd . Vamos considerar ordens que satisfazem as relações: $a < b$ e $d < c$. Três destas ordens aparecem na Figura 7. Observe que existem

mais três tais ordens, que podem ser obtidas fazendo corresponder os vértices a com d , e os vértices b com c , respectivamente. O ALGORITMO GULOSO colore estes P_4 da Figura 7 com três cores, enquanto que com a ordem definida na Figura 8 com duas cores. Estas ordens sobre os vértices de um P_4 representadas na Figura 7 são denominadas **obstruções**.

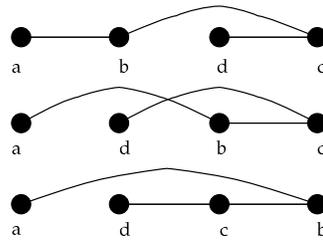


Figura 7: P_4 e as ordens $abdc$, $adbc$ e $adcb$.



Figura 8: P_4 e a ordem $abcd$.

Se conseguirmos determinar uma ordem para os vértices de G tal que, para todo subgrafo induzido H de G , o ALGORITMO GULOSO fornece uma coloração ótima, então este algoritmo estará em particular colorindo G com uma coloração ótima. Chvátal [10] denominou uma tal ordem de **perfeita** e os grafos que a admitem de **grafos perfeitamente ordenáveis**.

A primeira observação que fazemos é que uma ordem perfeita não contém obstruções. Além disso, Chvátal demonstrou que, para verificar se uma ordem é perfeita, basta testar se a ordem dos vértices restrita a cada P_4 induzido não forma obstrução.

Teorema 1 *Uma ordem é perfeita se e somente se não contém obstruções.*

A demonstração original do Teorema 1 pode ser encontrada no artigo de Chvátal [10]. Para a classe dos grafos perfeitamente ordenáveis o ALGORITMO GULOSO origina uma coloração dos vértices que é ótima. Duas classes conhecidas possuem ordens perfeitas: os grafos cordais e os de comparabilidade.

Um grafo é **cordal** se não contiver ciclos induzidos C_n , para $n \geq 4$ (veja Figura 9).

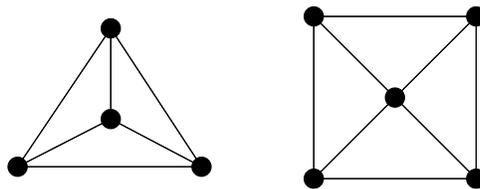


Figura 9: Exemplo de um grafo cordal e de um que não é cordal.

Os grafos cordais são caracterizados pela presença de vértices especiais — os vértices simpliciais [15]. Lembramos que $Adj(v)$ denota o conjunto de vértices adjacentes ao vértice v . Um vértice v é **simplicial** se $Adj(v)$ é uma clique.

Dado que todo subgrafo induzido de um grafo cordal é cordal, podemos construir uma ordem perfeita v_1, v_2, \dots, v_n para os vértices do grafo onde cada v_i é simplicial em $G_i = G[v_1, v_2, \dots, v_i]$. A caracterização de grafos cordais dada por Dirac [15] valida este processo.

Teorema 2 *Um grafo é cordal se e somente se todo subgrafo induzido contém um vértice simplicial.*

Observe que esta ordem não contém obstruções. Logo, é uma ordem perfeita. Observe também que usando essa ordem como entrada, toda vez que o ALGORITMO GULOSO precisar de uma nova cor k para colorir v_i , é porque existe uma clique de tamanho k em G_i . Logo, $\chi(G) \leq \omega(G)$, obtendo a igualdade entre os dois parâmetros. O mesmo é válido para todo subgrafo induzido de um grafo cordal G . Isto demonstra, em particular, que um grafo cordal é perfeito.

Dado um grafo G , denotamos uma orientação de suas arestas por \vec{G} e denotamos por (u, v) uma aresta orientada de u para v . Uma orientação acíclica \vec{G} é **transitiva** se para quaisquer três vértices u, v, w de G , se existirem arestas orientadas $(u, v) \in E(\vec{G})$ e $(v, w) \in E(\vec{G})$, então $(u, w) \in E(\vec{G})$. Um grafo é **de comparabilidade** se admite uma orientação transitiva em suas arestas. Se G é um grafo de comparabilidade, então uma orientação transitiva restrita a um subgrafo induzido de G também é transitiva, ou seja, a classe dos grafos de comparabilidade é hereditária. É bom notar que em uma orientação transitiva todo caminho orientado origina uma clique.

Dada uma orientação transitiva \vec{G} , podemos definir uma ordem nos vértices de G satisfazendo $(u, v) \in E(\vec{G}) \iff u < v$. Esta ordem pode ser obtida tomando em cada $G_i = G \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$, onde $G_1 = G$, uma fonte v_i da orientação restrita a G_i , para $1 \leq i \leq n$. Observe que esta ordenação dispõe os vértices de G em linha reta de modo que todas as suas arestas estejam direcionadas da esquerda para a direita. Logo, não contém obstruções e é, portanto, uma ordem perfeita.

Dessa forma, o ALGORITMO GULOSO aplicado a uma ordem dos vértices de um grafo de comparabilidade obtida da maneira descrita acima, colore cada vértice v_i com a cor que corresponde ao tamanho do caminho máximo de uma fonte até o vértice v_i , ou seja toda vez que o ALGORITMO GULOSO precisar de uma nova cor k para colorir v_i , é porque existe uma clique de tamanho k em G_{i+1} . Novamente, $\chi(G) \leq \omega(G)$, obtendo a igualdade entre os dois parâmetros. O mesmo é válido para todo subgrafo induzido de um grafo de comparabilidade G . Isto demonstra, em particular, que um grafo de comparabilidade é perfeito.

Dado um grafo qualquer, decidir se ele admite uma ordem perfeita é NP-completo [37]. Nos grafos cordais, esta ordem pode ser encontrada em tempo linear através do algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica [47]; logo estes grafos são reconhecidos em tempo linear. Na classe dos grafos de comparabilidade, uma ordem perfeita é definida pela eliminação das fontes em uma orientação transitiva, e pode ser encontrada em tempo linear [47].

O reconhecimento de grafos de comparabilidade não é tão simples. Em 1985, Spinrad [45] encontrou um algoritmo $O(n^2)$ que orienta as arestas de um grafo. Essa orientação será transitiva se e somente se o grafo for de comparabilidade. O reconhecimento dessa classe depende de verificar se a orientação obtida é de fato

transitiva. Segundo Spinrad, esta verificação pode ser feita em $O(n^{2.49})$. Recentemente, McConnell e Spinrad [35] projetaram um algoritmo linear que orienta as arestas de um grafo. Novamente, este algoritmo origina uma orientação transitiva se e somente se o grafo for de comparabilidade.

2.2 Decomposição

Consideramos nesta seção a técnica de DECOMPOSIÇÃO POR CORTE. Esta técnica para a coloração dos vértices de um grafo é um caso particular da divisão e conquista, um paradigma para o desenvolvimento de algoritmos.

Um **corte** para um grafo é um conjunto de vértices cuja remoção fornece um grafo que não é conexo. Dado um corte S num grafo G , os componentes conexos de $G \setminus S$ têm conjuntos de vértices V_1, V_2, \dots, V_p , digamos. Dizemos que cada subgrafo $G_i = G[V_i \cup S]$ é um **filho** de G em relação ao corte S . Dizemos também que o grafo G é obtido **por identificação** dos filhos G_i em relação ao corte S .

O paradigma divisão e conquista procura reduzir a solução de um problema à solução de subproblemas da mesma natureza que o problema original.

Neste caso, dada uma classe hereditária de grafos, gostaríamos de reduzir a coloração de um grafo à coloração de seus filhos em relação a um certo corte.

Na verdade, dado um certo tipo de corte, gostaríamos de usar a técnica de DECOMPOSIÇÃO POR CORTE, para decompor o grafo recursivamente, obtendo uma árvore de decomposição em cujas folhas, o problema original tivesse solução trivial.

Tentamos, então, responder às seguintes perguntas em relação a alguns tipos de cortes:

1. Como se comporta o tamanho de uma clique máxima ω ?
2. Como se comporta o número cromático χ ?
3. Podemos testar a existência deste corte eficientemente?
4. Podemos construir uma árvore de decomposição associada a este corte eficientemente?
5. Podemos caracterizar as folhas desta árvore de decomposição?
6. Podemos associar classes de grafos a este tipo de corte?

O Lema 2 estuda o comportamento do parâmetro ω em relação a um corte qualquer.

Lema 2 *Seja G um grafo com corte S e filhos G_1, G_2, \dots, G_p . Então*

$$\omega(G) = \max_{i=1}^p \omega(G_i).$$

Prova: Sendo cada G_i um subgrafo induzido de G , obtemos a desigualdade: $\omega(G) \geq \max_{i=1}^p \omega(G_i)$. Suponha, por absurdo, que esta desigualdade é estrita, isto é, que $\omega(G) > \max_{i=1}^p \omega(G_i)$. Seja então K uma clique máxima de G . Por hipótese, K não é uma clique em G_i e, portanto, existem vértices x_i, x_j em K com $x_i \in G_i \setminus S$ e $x_j \in G_j \setminus S$. Mas $x_i x_j \in E(G)$, o que contradiz S ser um corte para G . \square

O exemplo apresentado na Figura 10 mostra que não obtemos um resultado análogo para o parâmetro χ . Dado um ciclo induzido ímpar, qualquer corte terá como filhos grafos bipartidos. Por outro lado, seja G colorido com $k = \chi(G)$ cores. Então é possível colorir cada subgrafo induzido de G com no máximo k cores. Logo, $\max \chi(G_i) \leq k = \chi(G)$.

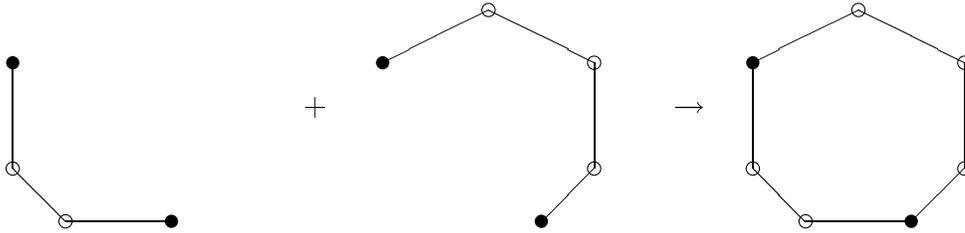


Figura 10: $\max(\chi(P_4), \chi(P_5)) \neq \chi(C_7)$.

Procuramos, portanto, por um tipo especial de corte onde possamos obter a igualdade para o parâmetro χ , como o encontrado para o parâmetro ω no Lema 2. Um **corte clique** é um corte cujos vértices são uma clique.

Observamos que nem todo grafo tem um corte clique (veja Figura 10). Entretanto, para aqueles que o possuem, podemos calcular o número cromático a partir do cálculo para os filhos deste grafo em relação ao corte.

Considere um grafo G obtido por identificação de seus filhos G_i em relação ao corte clique C . Seja $k = \max \chi(G_i)$. Sendo C uma clique, o número de cores distintas nos vértices correspondentes a C em cada G_i é igual. Dessa forma, uma bijeção entre essas cores colore cada G_i com k cores, e conseqüentemente origina uma k -coloração para G . Ou seja, $\chi(G) \leq k$, e portanto, $\chi(G) = \max \chi(G_i)$.

Na verdade, existe um algoritmo $O(nm)$ para determinar se um grafo admite um corte clique [51].

Dado um grafo G , definimos recursivamente uma **árvore de cortes clique** $T(G)$ do seguinte modo. Cada vértice é rotulado com um subgrafo induzido de G . A raiz da árvore $T(G)$ é rotulada com o grafo G . Se G não tem corte clique, então a árvore $T(G)$ será trivial. Caso contrário, encontramos um corte clique C de G e os filhos do vértice G em $T(G)$ serão os filhos G_1, G_2, \dots, G_p do grafo G em relação ao corte clique C . Agora, a sub-árvore $T(G_i)$ rotulada por G_i é uma árvore de cortes clique para o grafo G_i . A Figura 11 apresenta uma árvore de cortes clique.

O Lema 3 abaixo estuda o tamanho de uma árvore de cortes clique em função do número de vértices do grafo.

Lema 3 *Uma árvore de cortes clique para um grafo com n vértices tem no máximo $n^2 + 1$ vértices.*

Prova: Considere uma árvore de cortes clique $T(G)$ para um grafo G . Dado um vértice H não raiz, temos que H tem um irmão I em $T(G)$. Por definição de árvore

de cortes clique, H e I se interceptam numa clique C que é corte clique para o pai de H e I na árvore $T(G)$. Sejam então $x \in H \setminus C$ e $y \in I \setminus C$. Rotule H pelo par ordenado (x, y) . Observe que x e y são vértices não adjacentes em G .

Como $T(G)$ é uma árvore de cortes clique, por construção, a interseção de dois vértices de $T(G)$, onde um vértice não é ancestral do outro, quando não é vazia, induz uma clique em G . Logo não podemos ter dois vértices na árvore $T(G)$, rotulados com o mesmo par. Isto prova que $T(G)$ tem, no máximo, $n^2 + 1$ vértices. \square

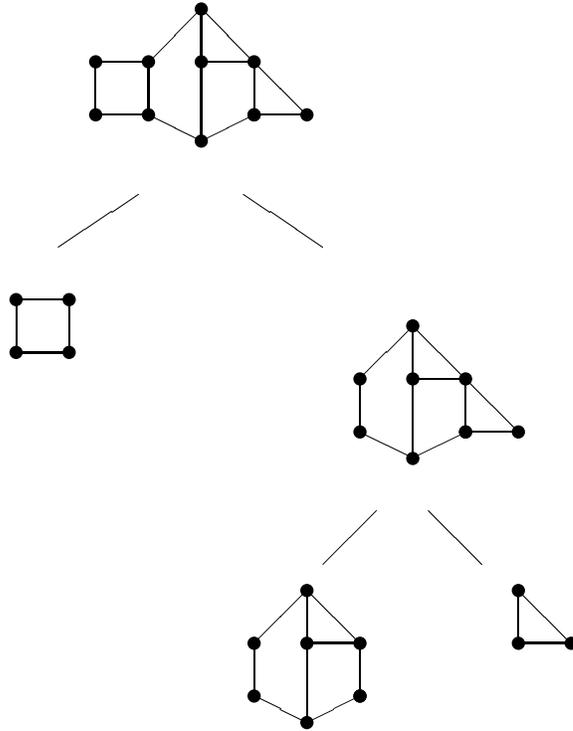


Figura 11: Árvore de cortes clique.

Do exposto anteriormente, se existir um algoritmo polinomial que determina a coloração mínima das folhas da árvore de cortes clique de um grafo G , então a técnica de DECOMPOSIÇÃO POR CORTE encontra em tempo polinomial uma coloração mínima para G .

A seguir, veremos algumas classes para as quais a técnica de DECOMPOSIÇÃO POR CORTE pode ser aplicada com sucesso.

Lembramos que um grafo é **cordal** se não contiver ciclos induzidos C_n , para $n \geq 4$. Os grafos cordais são caracterizados como grafos cuja árvore de cortes clique tem como folhas, grafos que são cliques [15]. O Teorema 3 demonstra esse fato.

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é um **separador** dos vértices x e y se $V(G) \setminus S$ desconecta x de y . Um separador S é **minimal** se nenhum subconjunto próprio de S é também um separador.

Teorema 3 *Seja G um grafo que não é uma clique. Então, G é cordal se e somente se todo separador minimal é uma clique.*

Prova: Sejam G um grafo cordal que não é uma clique e S um separador minimal de v e w com G_v e G_w componentes de $G \setminus S$ contendo v e w , respectivamente.

Se $|S| = 1$, então S é uma clique.

Seja $|S| \geq 2$ e suponha que x e y são vértices não adjacentes de S . Sendo S minimal, então cada vértice de S é adjacente a algum vértice de G_v e G_w . Sejam x_1, y_1 em G_v e x_2, y_2 em G_w adjacentes à x e y respectivamente. Então o conjunto de vértices formado por $x, x_1, V(P_v), y_1, y, y_2, V(P_w), x_2$, onde P_v e P_w são caminhos mínimos de x_1 a y_1 em G_v e de x_2 a y_2 em G_w , respectivamente (Figura 12) é um ciclo induzido de tamanho maior ou igual a quatro, contradizendo G ser grafo cordal. Portanto, S é uma clique.

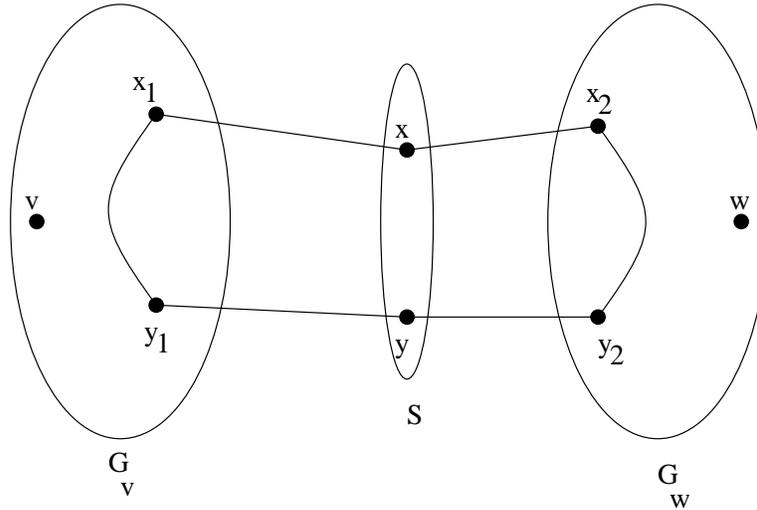


Figura 12: Ciclo induzido $x, x_1, V(P_v), y_1, y, y_2, V(P_w), x_2$ para Teorema 3.

Por outro lado, suponha que todo separador minimal de G é uma clique. Suponha que G contenha um ciclo C com vértices $v, t, w, u_1, u_2, \dots, u_k, k \geq 1$. Todo separador que desconecta v de w contém t e algum u_i . Logo C tem cordas. Logo G é um grafo cordal. \square

O Teorema 3 diz, em particular, que em um grafo cordal não completo, todo corte minimal é uma clique. Logo, as folhas de uma árvore de cortes clique para um grafo cordal são cliques.

Uma classe que contém os grafos cordais e onde a técnica de DECOMPOSIÇÃO POR CORTE pode ser aplicada é a classe dos grafos separáveis por cliques.

Primeiro definiremos duas outras classes de grafos: os grafos Tipo 1 e os Tipo 2.

Um grafo G é do **Tipo 1** se $V(G)$ admite uma partição em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $|V_1| \geq 3$, $G[V_1]$ é bipartido conexo e $G[V_2]$ é uma clique, e cada vértice em V_1 é adjacente a todo vértice em V_2 . Um grafo G é do **Tipo 2** se G é um grafo p -partido completo, para algum inteiro positivo p .

Grafos **separáveis por cliques** são aqueles cuja árvore de cortes clique admite apenas folhas do Tipo 1 ou Tipo 2. No grafo G da Figura 13, $G[a, b, c, f, g, h]$ é do Tipo 1 e $G[b, c, d, e, f]$ é do Tipo 2.

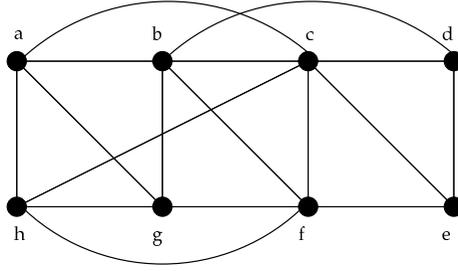


Figura 13: Exemplo de um grafo separável por cliques.

A complexidade para o reconhecimento de um grafo separável por cliques está limitada inferiormente pela complexidade $O(n^5)$ de encontrar a árvore de cortes clique do grafo. Encontrada esta árvore, bastará reconhecer se as folhas são grafos do Tipo 1 ou Tipo 2.

Para verificar se um grafo G é do Tipo 1, basta observarmos que seu complemento \overline{G} é um grafo formado por um conjunto independente de vértices e um subgrafo que é o complemento de um grafo bipartido conexo com pelo menos 3 vértices.

Para verificar se um grafo G é do Tipo 2, basta observarmos que seu complemento, \overline{G} , é um grafo formado por p subgrafos completos.

Basta agora sabermos colorir os grafos do Tipo 1 e Tipo 2 eficientemente. Uma coloração mínima para os grafos do Tipo 1 usa $|V_2|$ cores para colorir a clique e duas outras cores para colorir $G[V_1]$ — o grafo bipartido. Para obter uma coloração mínima para os grafos do Tipo 2, basta usar p cores, uma para cada conjunto independente em que se decompõe os vértices do grafo. Ambos os procedimentos são polinomiais.

É importante deixar claro que nem sempre podemos testar em tempo polinomial se um grafo admite um tipo especial de corte. Um resultado talvez surpreendente é que decidir se um grafo admite um corte que é um conjunto estável, i.e., um corte onde seus vértices são dois a dois não adjacentes, é NP-completo [11].

2.3 Contração

Apresentamos agora a técnica da CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES. Uma primeira consideração é que a CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES não adjacentes até que tais pares não mais existam sempre termina em uma clique. Colorir uma clique é fácil. A descontração dos pares contraídos, atribuindo a cada vértice do par a cor do vértice contraído, origina uma coloração válida para o grafo. Esta coloração não é necessariamente ótima. Estudamos condições suficientes para que em uma classe de grafos a técnica de CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES produza uma coloração ótima. Exemplificamos através dos grafos fracamente cordais [23] e Meyniel [36].

2.3.1 Algoritmo Básico

Uma **contração** de dois vértices não adjacentes x, y num grafo $G = (V(G), E(G))$, define o grafo $G^{xy} = (V^{xy}, E^{xy})$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V^{xy} &= V \setminus \{x, y\} \cup \{(xy)\}; \\ E^{xy} &= E(G \setminus \{x, y\}) \cup \{(v, (xy)) : v \in V \setminus \{x, y\}, v \in Adj_G(x) \cup Adj_G(y)\}. \end{aligned}$$

Dizemos que G^{xy} foi obtido por **contração** dos vértices x, y no grafo G .

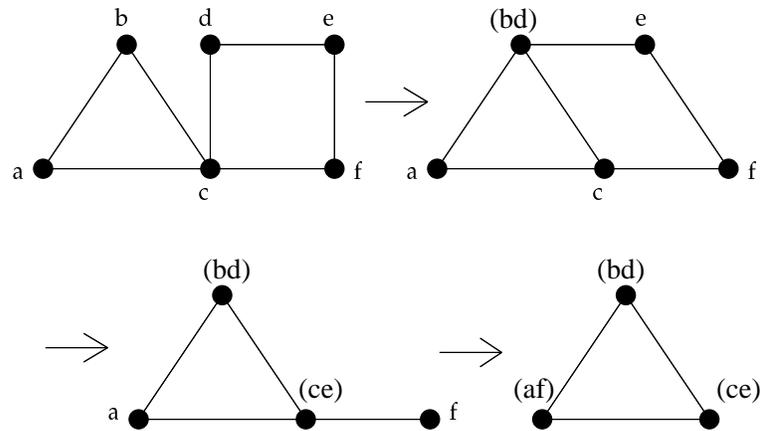


Figura 14: Exemplo de uma seqüência de contrações.

Observe que G^{xy} não é necessariamente um subgrafo induzido de G . Observe, também, que a contração de pares de vértices não adjacentes até que tais pares não mais existam origina uma seqüência de grafos cujo último elemento é um grafo completo. Estamos denotando por (xy) o vértice contraído a partir de x, y .

Esta última observação conduz ao seguinte algoritmo.

Algoritmo Básico

1. Contrair sucessivamente pares de vértices não adjacentes até que tais pares não mais existam;
2. Colorir o grafo completo obtido;
3. Descontrair cada par (xy) contraído e dar a x e a y a cor de (xy) .

Observe que, por definição de contração, sempre temos: $\omega(G^{xy}) \geq \omega(G)$. No exemplo da Figura 15, essa desigualdade é válida, para cada G e G^{xy} .

O Algoritmo Básico sempre produz uma coloração para um grafo. Basta observar que uma k -coloração em G^{xy} é uma k -coloração em G (basta dar a mesma cor de (xy) a x e a y). Logo, $\chi(G) \leq \chi(G^{xy})$. O número k de cores corresponde ao tamanho do grafo completo resultante das contrações de vértices não adjacentes. Então, se a cardinalidade do grafo completo obtido é igual à da clique máxima de G , a coloração obtida será ótima.

Por outro lado, dado um grafo G , existe uma seqüência de contrações de pares de vértices não adjacentes que resulta em um grafo completo de cardinalidade $\chi(G)$. De fato, considere uma coloração dos vértices de G com $\chi(G)$ cores: $1, 2, \dots, \chi(G)$. Contraia, primeiro, os vértices de cor 1, depois aqueles de cor 2, assim sucessivamente até os de cor $\chi(G)$. Obtemos, dessa forma, uma clique de cardinalidade $\chi(G)$.

Dessa forma, é possível usar o Algoritmo Básico para obter uma coloração ótima para um grafo. É necessário, então, estabelecer restrições sobre o par de vértices a ser contraído de modo a garantir que o parâmetro χ não seja alterado durante o processo. Observe que, no exemplo apresentado na Figura 15, o parâmetro χ é alterado durante o processo, e obtemos no final um grafo com número cromático 3, enquanto que o grafo original, por ser bipartido, tem número cromático 2.

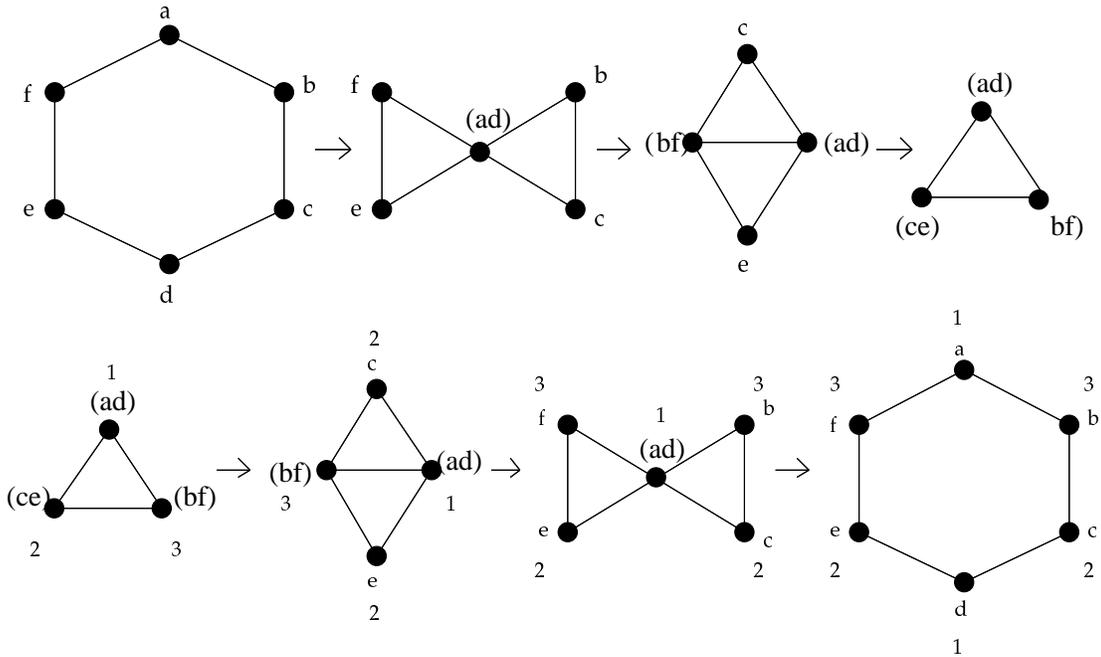


Figura 15: Uma coloração para o C_6 obtida pelo Algoritmo Básico.

2.3.2 Dupla-par

Dois vértices x e y formam uma **dupla par** se não existir caminho induzido de comprimento ímpar com extremidades x, y . Uma referência recente sobre duplas pares é o *survey* [16].

O grafo C_6 admite uma dupla par, enquanto \overline{C}_6 não (Figura 16).

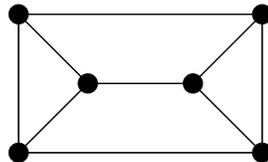


Figura 16: Todo par de vértices não adjacentes num \overline{C}_6 são extremos de P_4 .

A contração deste tipo especial de par de vértices preserva tanto o número cromático quanto o tamanho de uma maior clique de um grafo.

Lema 4 *Sejam x e y uma dupla par em um grafo G . Então*

- (i) $\chi(G) = \chi(G^{xy})$;
- (ii) $\omega(G) = \omega(G^{xy})$.

Prova: Seja $\{x, y\}$ uma dupla par num grafo G . Observamos que sempre valem as desigualdades $\omega(G^{xy}) \geq \omega(G)$ e $\chi(G^{xy}) \geq \chi(G)$. Suponha que $\omega(G^{xy}) > \omega(G)$. Então existe em G^{xy} uma clique K de tamanho $\omega(G)$ tal que $Adj_G(x) \cup Adj_G(y) \cup \{(xy)\} \supseteq K$ mas $Adj_G(x) \cup \{x\} \not\supseteq K$ e $Adj_G(y) \cup \{y\} \not\supseteq K$. Seja $a \neq x, a \in K \setminus Adj_G(y)$ e $b \neq y, b \in K \setminus Adj_G(x)$. Então temos um caminho induzido por $\{x, a, b, y\}$, de tamanho três entre x e y ; uma contradição.

Por outro lado, se não existe caminho induzido ímpar entre x e y , existe uma coloração ótima para G na qual x e y têm a mesma cor. De fato, dada uma coloração ótima para G , onde x e y têm cores diferentes, considere o grafo H induzido pelos vértices que têm a mesma cor de x ou a mesma cor de y .

Como, em particular, não existe caminho induzido ímpar entre x e y no grafo H , temos que os vértices x e y não podem estar no mesmo componente conexo de H . Basta então trocar as duas cores no componente conexo de H que contém x para obter uma coloração ótima para G onde x e y têm a mesma cor.

Agora, dada uma coloração de G onde x e y têm a mesma cor, podemos obter uma coloração de G^{xy} com o mesmo número de cores ao atribuir a (xy) a mesma cor de x e de y e atribuindo aos outros vértices de G^{xy} a mesma cor que na coloração de G . \square

O uso do grafo auxiliar bicolorido no Lema 4 é um exemplo de uma técnica clássica para coloração tanto de vértices quanto de arestas: as CADEIAS DE KEMPE. A técnica CADEIAS DE KEMPE aparecerá algumas vezes neste texto, com especial atenção na Seção 3.2.

Com base no Lema 4, sabemos que, se no Algoritmo Básico passarmos a contrair dois vértices que formam uma dupla par, então o tamanho de uma maior clique do grafo é preservado em todos os grafos pertencentes à seqüência de contrações. Porém, nem todos os problemas estão resolvidos. É necessário que cada grafo dessa seqüência possua dupla par. Sabemos que existem grafos que não possuem duplas pares (Figura 16). Além disso, se o grafo G original admite dupla par, então G^{xy} também a admite? Uma outra questão importante é saber se existe algoritmo polinomial para encontrar uma dupla par em um grafo que a admite.

Temos, então, que saber se é possível encontrar eficientemente uma dupla par se existir, e garantir que cada grafo da seqüência obtida pelas contrações também a possua.

Comentamos, agora, o problema da complexidade de encontrar uma dupla par.

O problema de encontrar uma dupla par é um caso particular do **problema da paridade de um caminho (PPC)**: Dado um grafo G e dois vértices x e y , verificar se G contém um caminho induzido de uma dada paridade.

É interessante observar que, para x e y dados,

- a complexidade de encontrar um caminho (sem restrição alguma) entre x e y é polinomial; (Qualquer busca no grafo devolverá tal caminho.)
- a complexidade de encontrar um caminho induzido (sem a restrição da paridade) entre x e y é polinomial; (Um caminho mínimo entre x e y é um exemplo de um caminho induzido entre esses vértices. O algoritmo de Dijkstra [6] encontra um caminho mínimo entre dois vértices em $O(n^2)$.)
- a complexidade de encontrar um caminho de uma dada paridade (sem a exigência de ser induzido) entre x e y é polinomial [32];
- PPC é NP-difícil [5].

Como consequência, encontrar uma dupla par é um problema NP-difícil.

O PPC pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos arco-circulares [4] e em grafos perfeitamente orientáveis [2], entre outros.

Várias classes de grafos perfeitos possuem um tipo especial de dupla par que é simples de encontrar, caso exista. Apresentamos abaixo como exemplos o caso dos grafos fracamente cordais e dos grafos Meyniel. Para grafos de comparabilidade, veja [44, 48].

Uma **dupla-2** é um par de vértices em um grafo tal que todo caminho induzido entre eles tem exatamente duas arestas.

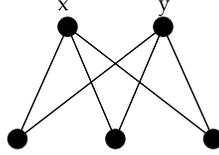


Figura 17: x e y formam uma dupla-2 de $K_{2,3}$.

Encontrar uma dupla-2 em tempo polinomial em um grafo G é fácil. Basta, para cada par de vértices não adjacentes de G , construir o grafo G' gerado por $V(G) \setminus (Adj(x) \cap Adj(y))$ (ou seja, retirar de G os vizinhos comuns a x e y), e verificar se existe um caminho de x a y em G' . Se existir tal caminho, então x, y não formam uma dupla-2. Este algoritmo tem complexidade de tempo $O(n^2(n + m))$.

Como um dos exemplos, mostraremos que um grafo cordal possui uma dupla-2 e que o grafo obtido de um grafo cordal através da contração de uma dupla-2 é um grafo cordal.

Teorema 4 *Se G é um grafo cordal que não é uma clique, então G contém uma dupla-2.*

Prova: Seja G um grafo cordal que não é uma clique, então pelo Teorema 3, todo corte minimal de G é uma clique. Seja então S um corte minimal de G . Sejam B_1, B_2, \dots, B_t os componentes de $G \setminus S$.

Se existir algum $G \setminus B_i$ que não é uma clique, então por indução no número de vértices de G , o grafo $G \setminus B_i$ contém uma dupla-2. Como todo caminho induzido de G com ambos os extremos em $G \setminus B_i$ está inteiramente contido em $G \setminus B_i$, essa dupla-2 é também uma dupla-2 de G .

Se cada $G \setminus B_i$ é uma clique, então $t = 2$. Portanto, basta tomar para dupla-2 um vértice de cada componente B_i . \square

Teorema 5 *Se G é um grafo cordal que não é uma clique e x, y é uma dupla-2, então G^{xy} é cordal.*

Prova: Seja G um grafo cordal que não é uma clique e x, y uma dupla-2 em G . Suponha que G^{xy} não é cordal. Então existe $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\} \subseteq V(G^{xy})$ tal que $G[C]$ é um ciclo C_k , $k \geq 4$.

Se $z = (xy) \notin C$, então G não é cordal. Logo $z \in C$.

Sem perda de generalidade, seja $z = c_1$. Pela definição de contração em G , temos c_2 adjacente a pelo menos um dentre x e y , e temos c_k adjacente a pelo menos um

dentre x e y . Como x, y formam dupla-2 em G , temos x ou y adjacentes a ambos c_2 e c_k . Mas isto diz que G contém ciclo induzido de tamanho maior ou igual a quatro, o que contraria G ser cordal. Portanto, G^{xy} é cordal. \square

Os Teoremas 4 e 5 mostram que o Algoritmo Básico (modificado de modo a tomar dupla-2) pode ser aplicado nesta classe.

2.3.3 Grafos fracamente cordais

A classe dos grafos fracamente cordais, definida por Hayward [22], generaliza a dos cordais e nela a técnica da CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES também pode ser aplicada.

Um grafo G é **fracamente cordal** se não contiver nem C_k nem \overline{C}_k , $k \geq 5$ como subgrafo induzido.

Observe que complementos de C_k , $k \geq 5$, não são grafos cordais, pois para $k \geq 6$, todo complemento de C_k contém C_4 induzido e $\overline{C}_5 \cong C_5$. Dessa forma, os grafos cordais não contém nem C_k , $k \geq 4$, nem \overline{C}_k , $k \geq 5$, como subgrafo induzido.

Os grafos fracamente cordais permitem a presença de C_4 induzido generalizando dessa forma os cordais.

Observe que se G é cordal, então \overline{G} é fracamente cordal. Um grafo G é **co-cordal** se \overline{G} é cordal. Então, a classe dos fracamente cordais contém os cordais e os co-cordais.

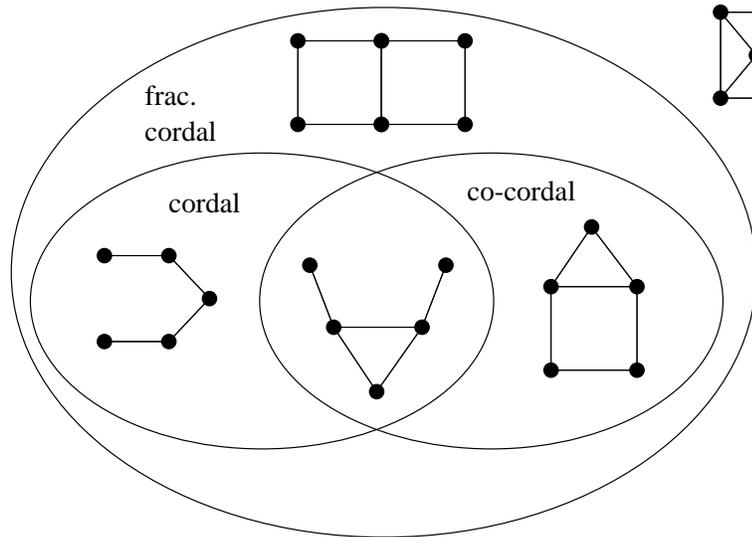


Figura 18: Grafos fracamente cordais, cordais e co-cordais.

A presença de dupla-2 caracteriza a classe dos grafos fracamente cordais. As demonstrações dos Teoremas 6 e 7 encontram-se no artigo de Hayward, Hoàng e Maffray [23]. Estes teoremas mostram que se no Algoritmo Básico contrairmos dupla-2, então ele poderá ser aplicado a esta classe.

Teorema 6 *Um grafo é fracamente cordal se e somente se todo subgrafo induzido ou é uma clique ou admite uma dupla-2.*

Teorema 7 Se x, y é uma dupla-2 em um grafo fracamente cordal, então G^{xy} é fracamente cordal.

Os grafos fracamente cordais são facilmente reconhecidos em $O(n^3(n + m))$ através dos seguintes passos:

Para G e \overline{G} faça:

- Encontre todos os P_3 induzidos;
- Verifique, para cada P_3 induzido por $\{x, z, y\}$, com extremos x, y , se existe um caminho induzido de comprimento maior do que 2, que tenha como extremos x, y , e que tenha como únicos vizinhos do vértice z os vértices x e y . Se tal caminho existir, então G não é fracamente cordal. Se tal caminho não existir, então G é um grafo fracamente cordal.

A complexidade de encontrar uma dupla-2 foi melhorada por Arikati e Rangan [3] e Spinrad e Sritharan [46]. Na realidade, o algoritmo de Spinrad e Sritharan é mais geral, pois é válido para qualquer grafo; sua complexidade é $O(nm)$. O algoritmo, ao invés de verificar se um par de vértices forma uma dupla-2, verifica, para cada vértice x , se existe um vértice y tal que x, y é uma dupla-2. Spinrad e Sritharan usam este algoritmo de dupla-2 para gerar um algoritmo de reconhecimento dos grafos fracamente cordais de complexidade $O(mn^2)$.

2.3.4 Grafos Meyniel e Quase-Meyniel

Um grafo é dito **Meyniel** se todo ciclo induzido ímpar de tamanho estritamente maior que 3 tem pelo menos duas cordas. Vemos imediatamente que grafos cordais são de Meyniel, pois cada ciclo induzido de tamanho k tem na verdade $k - 3$ cordas. Sendo k ímpar e maior ou igual a 5, temos $k - 3 \geq 2$. Para um exemplo de um grafo Meyniel, veja Figura 19.

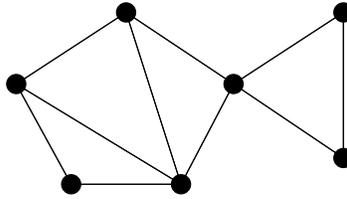


Figura 19: Um grafo Meyniel.

É possível colorir grafos Meyniel usando o Algoritmo Básico modificado de modo a tomar, neste caso, duplas pares. Existem grafos Meyniel onde a contração de qualquer dupla par não fornece um outro grafo Meyniel. Para colorirmos os grafos Meyniel com a técnica CONTRAÇÃO DE PARES DE VÉRTICES, usaremos uma classe que contém os grafos Meyniel propriamente. Para isso, precisaremos de algumas definições adicionais.

Chamamos de **corda única** num grafo G a uma aresta f tal que existe em G um circuito induzido ímpar de tamanho maior que 3 tendo f como sua única corda. Ou seja, existe um subconjunto $C \subseteq V(G)$ tal que $G[C]$ é um circuito ímpar de tamanho maior que 3 com uma única corda, e esta corda é f .

Um grafo é dito **quase-Meyniel** quando todo ciclo induzido ímpar de tamanho maior que 3 tem pelo menos uma corda, e há um vértice incidente a todas as cordas únicas.

Observe que uma corda divide um ciclo de tamanho ímpar k em dois ciclos cujos tamanhos somam $k + 2$. Assim, num grafo quase-Meyniel, um dos ciclos será ímpar de novo e podemos aplicar a regra repetidamente. Isto permite concluir que grafos quase-Meyniel só possuem circuitos induzidos sem corda de tamanho 3 ou de tamanho par.

Observe ainda que grafos quase-Meyniel sem cordas únicas são na verdade grafos Meyniel. Todo grafo Meyniel é quase-Meyniel: a ausência de cordas únicas torna a condição da definição verdadeira por vacuidade.

O algoritmo para encontrar duplas pares em grafos quase-Meyniel que não são completos baseia-se na seguinte regra:

Regra R :

1. Se o grafo tem cordas únicas, então escolha x como sendo um vértice que incide a todas elas; caso contrário, escolha x como sendo qualquer vértice não universal.
2. Uma vez escolhido x , escolha y dentre os não adjacentes a x , e de forma a maximizar $|Adj(x) \cap Adj(y)|$.

Observe que um vértice incidente a uma corda única não pode ser universal. Assim, a menos que o grafo seja completo, x será sempre um vértice não universal. Fica garantido assim que existe pelo menos um candidato y para maximizar $|Adj(x) \cap Adj(y)|$ na segunda parte da regra. Se o grafo for completo, então não podemos aplicar a regra, mas também não é necessário: um grafo completo significa o fim do algoritmo.

Hertz [25] demonstrou que se G é um grafo quase-Meyniel não completo, então x e y escolhidos de acordo com a regra R formam uma dupla par. Além disso, G^{xy} é também um grafo quase-Meyniel.

Este teorema mostra que a regra funciona e, portanto, podemos usar o Algoritmo Básico com a regra R para obter uma coloração ótima para os grafos Meyniel. Uma curiosidade é que embora se saiba como reconhecer os grafos Meyniel eficientemente, o problema de reconhecimento para a classe dos grafos quase-Meyniel ainda está aberto [16].

2.3.5 Grafos perfeitamente contraíveis

Classes de grafos têm sido caracterizadas através de suas propriedades cromáticas. Este é o caso dos grafos perfeitamente contraíveis, cuja definição foi estimulada pela aplicação do método da contração de dupla par.

Através do Algoritmo Básico (modificado), constrói-se uma seqüência de grafos $G_0 = G, G_1, \dots, G_k$ a partir de um grafo G qualquer, tal que G_i é obtido de G_{i-1} através da contração de uma dupla-par (se cada G_i possuir dupla par) e G_k é uma clique.

Agora se considerarmos os grafos G tais que para todo subgrafo induzido de G , for possível construir uma seqüência com as características acima, tem-se a classe dos **grafos perfeitamente contraíveis**.

As seções anteriores demonstram que esta classe contém os grafos Meyniel e os fracamente triangulados.

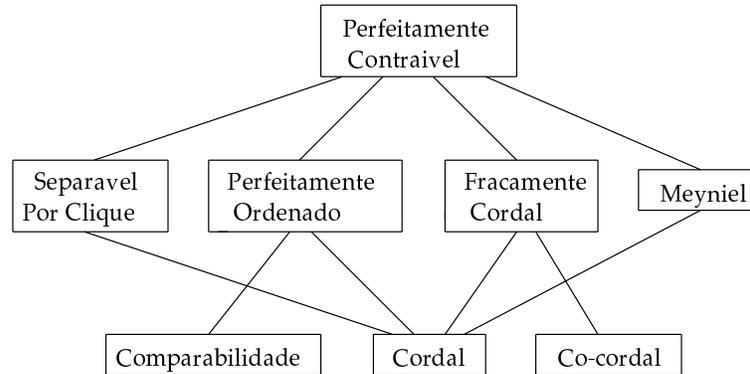


Figura 20: A relação entre as classes.

3 Coloração de Arestas

Uma **k -coloração** das arestas de um grafo G é uma associação de k cores às arestas de G de tal forma que as arestas adjacentes sejam atribuídas cores distintas.

Estamos interessados em determinar o menor número de cores com que é possível colorir as arestas de G . Esse número é denotado por $\chi'(G)$ e denominado **índice cromático** de G .

Consideramos a seguir sete técnicas de coloração de arestas: TEOREMA DE VIZING, CADEIAS DE KEMPE, LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING, GRAFOS SOBRECARGADOS, PULLBACK, DECOMPOSIÇÃO, e GRAFO DAS CORES FALTANTES. Consideramos em cada caso classes de grafos onde estas técnicas fornecem algoritmos polinomiais.

3.1 O Teorema de Vizing

A partir da definição acima, é fácil ver que $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G . Em 1964, Vizing [50] redirecionou a Teoria de Coloração de Arestas, demonstrando que $\chi'(G) - \Delta(G) \leq 1$. Este resultado deu origem ao **Problema da Classificação**, ou seja, decidir se um grafo possui $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. No primeiro caso, dizemos que G está na **Classe 1**; no segundo caso, dizemos que G está na **Classe 2**. A prova do Teorema 8 a seguir fornece um algoritmo polinomial que pinta as arestas de um grafo G com $\Delta(G) + 1$ cores.

Seja G um grafo com cores em suas arestas. Dizemos que uma cor **falta** em um vértice v de G se não estiver presente nas arestas incidentes a v .

Teorema 8 *Seja G um grafo. Então $\chi'(G) - \Delta(G) \leq 1$.*

Prova: Seja G um grafo com as arestas, exceto uma, coloridas com $\Delta(G) + 1$ cores: $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$. Mostraremos que é possível atribuir uma cor dentre as $\Delta(G) + 1$ cores usadas a essa aresta não colorida.

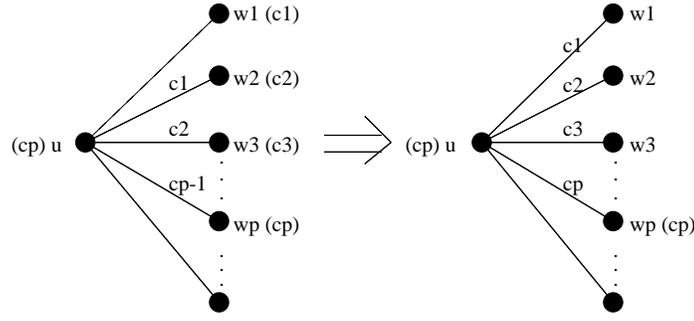


Figura 21: Não existe aresta ux de cor c_p .

Observe que em cada vértice de G falta uma cor dentre as $\Delta(G) + 1$ cores, porque $\Delta(G)$ é o grau máximo de G .

Considere a aresta uw_1 não colorida e sejam c e c_1 , cores que faltam nos vértices u e w_1 , respectivamente. Se $c = c_1$, então pinte uw_1 com c . Se $c \neq c_1$, então considere a seqüência $A : uw_1, uw_2, \dots$ de arestas distintas e incidentes a u ; e a seqüência $C : c_1, c_2, \dots$ de cores satisfazendo: c_i é a cor que falta em w_i e uw_{i+1} tem a cor c_i . Após a escolha de c_i , a escolha de w_i é única, pois existe no máximo uma aresta da cor c_i incidente a u . Este fato também determina como terminar essas seqüências. Suponha que já foram escolhidas as arestas uw_1, uw_2, \dots, uw_p e as respectivas cores c_1, c_2, \dots, c_p . A próxima aresta uw_{p+1} será acrescentada a A se existir uma aresta ux de cor c_p e x não for igual a algum dos w_i anteriores. Neste caso, fazemos $x = w_{p+1}$ e tomamos para c_{p+1} uma cor que falta em w_{p+1} .

Observe que estas seqüências possuem no máximo $\Delta(G)$ elementos e estamos usando $\Delta(G) + 1$ cores. Dessa forma, se não existir uma aresta ux de cor c_p , então essa cor falta em u e em x . Logo, basta alterar as cores de todas as arestas da seqüência, colocando a cor c_i na aresta uw_i e dando a ux a cor c_p , obtendo-se uma coloração válida para G (veja Figura 21).

Suponha, agora, que as seqüências terminam porque apesar de existir uma aresta ux de cor c_p , x é igual a algum dos w_i anteriores, digamos $x = w_j$. Primeiro altere as cores das arestas pertencentes a A e anteriores a w_j ($uw_1, uw_2, \dots, uw_{j-1}$), dando à aresta uw_i a cor c_i . Após esta troca de cores a aresta não colorida passa a ser uw_j e a cor c continua faltando em u (pois caso contrário alguma aresta uw_i , $1 \leq i \leq j-1$, teria sido colorida com a cor c e o problema estaria terminado) e a cor c_p em ambos os vértices w_j e w_p . Esta é uma coloração válida para G menos uma aresta: uw_j (veja Figura 22).

Considere, agora, o subgrafo H induzido pelas arestas de cor c e c_p . Como a coloração é válida, cada vértice em H tem grau no máximo dois. Logo, os componentes de H são ciclos ou caminhos.

Os vértices u , w_j e w_p possuem grau 1 em H . Logo não podem pertencer a um mesmo componente conexo de H . Consideremos dois subcasos:

- u e w_j pertencem a componentes distintos. Neste caso, basta trocar as cores das arestas do componente que contém w_j e dar a uw_j a cor c .
- u e w_p pertencem a componentes distintos. A aresta uw_p está colorida com a cor c_{p+1} . Como nos casos anteriores, pinte novamente cada aresta uw_i , $j \leq i \leq p-1$, com a cor c_i , deixando a aresta uw_p sem cor. Observe que esta alteração não envolve as cores c e c_p . Logo H não é alterado e c continua faltando em u e c_p em w_p . Basta,

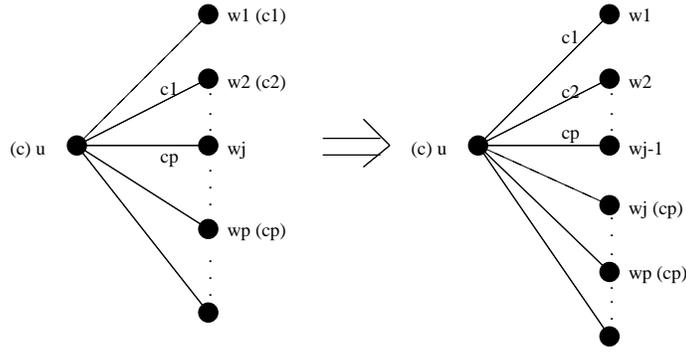


Figura 22: A cor de ux é igual à cor de uw_j .

agora, trocar as cores c e c_p das arestas no componente que contém w_p e dar a cor c à aresta uw_p .

Em cada um dos casos, obtém-se uma coloração para G com $\Delta(G) + 1$ cores. \square

Como consequência do TEOREMA DE VIZING, temos que para mostrar que um grafo G pertence à Classe 1, basta exibirmos uma $\Delta(G)$ -coloração para as arestas de G , enquanto que para mostrar que G pertence à Classe 2, precisamos de argumentos que provem que G não pertence à Classe 1.

Apesar de existirem apenas duas possíveis classes para se colocar um grafo, o problema da classificação é difícil. Consideremos a seguinte versão do problema da classificação.

- Dados: Um grafo G .
- Questão: $\chi'(G) = \Delta(G)$, ou seja, G está na Classe 1?

O problema da classificação assim definido pertence a NP. (De fato, dada uma instância G e uma função $f: E(G) \rightarrow \{1, \dots, \Delta\}$, é polinomial verificar se f é uma $\Delta(G)$ -coloração para as arestas de G .) Logo, o conjunto dos grafos que respondem NÃO à questão acima está em co-NP. Holyer [28] demonstrou que o problema da classificação é NP-difícil. Na verdade, Holyer mostrou que o problema da classificação para os grafos cúbicos é NP-difícil.

Posteriormente, Cai e Ellis [7] mostraram que, mesmo restrito a classes tais como grafos de comparabilidade, o problema continua NP-difícil (o que implica que também o é para grafos perfeitos). Não sabemos se o problema é NP-difícil ou polinomial para a classe dos grafos cordais e dos de intervalo, entre outras. Para certas subclasses destas citadas, tem sido demonstrado que o problema é polinomial [27, 13, 8].

3.2 Cadeias de Kempe

Dada uma coloração para um grafo, que pode ser de vértices ou de arestas, o método das CADEIAS DE KEMPE considera um subgrafo $H(\alpha, \beta)$ definido por duas cores α e β e tenta trocar as cores α e β neste subgrafo. Esta troca poderá originar uma nova coloração para o grafo original.

Dois aplicações são consideradas clássicas para o método das CADEIAS DE KEMPE. No caso de coloração de vértices, este método permite provar que todo grafo planar é 5-colorível [6]. No caso de coloração de arestas, apresentamos a seguir o Teorema de König, que resolve o problema de classificação para os grafos bipartidos.

Teorema 9 *Todo grafo bipartido é Classe 1.*

Prova: Argumentamos por indução no número de arestas de um grafo bipartido G . Para tal, vamos supor que todas as arestas de G , exceto uma aresta vw foram coloridas com $\Delta(G)$ cores. Então existe pelo menos uma cor α faltando no vértice v e pelo menos uma cor β faltando no vértice w . Observe que se $\alpha = \beta$, então basta colorir a aresta vw com cor α para obter a coloração desejada.

Seja $H(\alpha, \beta)$ o subgrafo definido pelas seguintes propriedades: ser conexo, conter w e conter todas as arestas e vértices de G que podem ser atingidos a partir de w por um caminho consistindo somente de arestas com cores α ou β . Como G é bipartido, $H(\alpha, \beta)$ não pode conter o vértice v . Logo, podemos trocar as cores α e β em $H(\alpha, \beta)$ sem afetar v ou o resto da coloração. Agora, a aresta vw pode ser colorida com a cor α para obter a coloração desejada para G com $\Delta(G)$ cores. \square

3.3 Lema de Adjacência de Vizing

Um grafo G que é Classe 2 é dito **crítico**, quando todo subgrafo próprio de G é Classe 1. Observe que, neste caso, temos $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Seja vw uma aresta de um grafo crítico G . Suponha que todas as outras arestas, a menos da aresta vw , já tenham sido coloridas com $\Delta(G)$ cores. Se uma das $\Delta(G)$ cores falta em v , então esta cor tem que aparecer em w ; caso contrário, poderíamos colorir o grafo G todo com $\Delta(G)$ cores. Logo, chamando de $\deg(v)$ o grau de v , temos que pelo menos $\Delta(G) - (\deg(v) - 1)$ cores aparecem em w . Assim, $\deg(w) \geq 1 + \Delta(G) - (\deg(v) - 1) = \Delta(G) - \deg(v) + 2$. Em outras palavras: $\deg(w) + \deg(v) \geq \Delta(G) + 2$.

Este resultado simples foi generalizado por Vizing e é hoje conhecido como o LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING que apresentamos a seguir. Para mais detalhes sobre a demonstração do Teorema 10 citamos a referência [17].

Vamos denotar por $d^*(w)$ o número de vértices de grau $\Delta(G)$ que são adjacentes ao vértice w .

Teorema 10 *Seja G um grafo crítico e sejam v, w vértices adjacentes de G . Então exatamente uma das situações acontece:*

1. se $\deg(v) < \Delta(G)$, então $d^*(w) + \deg(v) \geq \Delta(G) + 1$;
2. se $\deg(v) = \Delta(G)$, então $d^*(w) \geq 2$.

Prova: Primeiro lembramos uma definição utilizada na demonstração do TEOREMA DE VIZING. Dada uma coloração das arestas de um grafo, um **leque** L no vértice w , com aresta inicial wa_1 , é uma seqüência de arestas distintas wa_1, wa_2, \dots , onde para cada $i \geq 1$ a aresta wa_{i+1} tem como cor uma cor que falta no vértice a_i .

Observamos duas propriedades em relação aos leques:

- se F e F' são dois leques em w no grafo $G \setminus vw$, e se as arestas iniciais de F e F' são distintas e coloridas com cores que não aparecem em v , então F e F' não tem arestas em comum.
- Se $F = wa_1, wa_2, \dots, wa_s$ é um leque com tamanho máximo em w , começando com a aresta wa_1 cuja cor não aparece em v , então o vértice a_s tem grau $\Delta(G)$.

Assumindo estas duas propriedades, completamos a prova assim. Para cada $\Delta(G) - \deg(v) + 1$ cor aparecendo em w mas não em v , existe um leque de tamanho máximo em w , começando com uma aresta desta cor. Pela primeira propriedade, estes leques são disjuntos. Pela segunda propriedade, cada leque termina com um vértice de grau $\Delta(G)$. Isto termina a prova. \square

O LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING tem muitas aplicações. Podemos citar o estudo da estrutura dos grafos críticos e o problema de classificação para grafos planares. Observe que, pelo LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING, em um grafo crítico, todo vértice é adjacente a pelo menos dois vértices de grau $\Delta(G)$.

Uma outra forma de escrever e de aplicar o LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING é através da proibição de certas arestas em grafos críticos. Dado um grafo G qualquer, dizemos que uma aresta vw é **eliminável** caso uma das seguintes situações ocorre: ou $\deg(v) < \Delta(G)$ e $d^*(w) + \deg(v) \leq \Delta(G)$, ou $\deg(v) = \Delta(G)$ e $d^*(w) = 1$. Com esta definição, o LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING diz que se G tem uma aresta eliminável vw e $\chi'(G \setminus vw) \leq \Delta(G)$, então G é Classe 1. Em particular, não podemos ter uma aresta eliminável num grafo crítico.

3.4 Grafos Planares

Vizing considerou o problema de classificação para grafos planares. Um grafo é **planar** quando admite um desenho no plano sem cruzamento de arestas. Um tipo especial de grafo planar é o grafo **periplanar**, aquele que admite um desenho no plano onde todos os vértices do grafo estão na face externa. Todo grafo planar admite um vértice com grau no máximo 5. Todo grafo periplanar admite um vértice com grau no máximo 2.

Usando apenas esta restrição em relação aos graus dos vértices e esta imersão especial no plano que os grafos periplanares admitem, podemos resolver facilmente o problema de classificação para este caso particular de grafo planar:

Teorema 11 *Os únicos grafos periplanares que são Classe 2 são os ciclos induzidos ímpares.*

Prova: Observamos primeiro que se G é isomorfo a um ciclo induzido ímpar, então G é um grafo periplanar Classe 2.

Por outro lado, se G é um grafo periplanar Classe 2 com $\Delta(G) \geq 3$, assumamos que G é escolhido com $\Delta(G)$ e número de vértices tão pequeno quanto possível satisfazendo às restrições.

Logo G é 2-conexo e portanto hamiltoniano. Dividimos em dois casos de acordo com a paridade do número de vértices de G .

Se este número de vértices for par, seja F um 1-fator que alterna as arestas em relação a um ciclo hamiltoniano em G . Logo $\Delta(G \setminus F) = \Delta(G) - 1$. Logo $G \setminus F$ é Classe 1, por minimalidade na escolha de G . Logo G também é Classe 1.

Se este número de vértices for ímpar, digamos $2k + 1$, usamos um vértice v com grau 2. Cobrimos o conjunto M de k arestas alternadamente ao longo de um ciclo hamiltoniano em G , a menos das duas arestas incidentes a v . Como $G \setminus M$ é periplanar com $\Delta(G \setminus M) = \Delta(G) - 1$, a hipótese de minimalidade na escolha de G , diz que $G \setminus M$ é Classe 1. Logo G também é Classe 1. \square

Apresentamos a seguir como usar o LEMA DE ADJACÊNCIA DE VIZING, para resolver o problema de classificação para outro caso particular de grafo planar: o caso onde o grau máximo $\Delta(G)$ é pelo menos 10.

Teorema 12 *Todo grafo planar G com $\Delta(G) \geq 10$ é Classe 1.*

Prova: Seja G com $\Delta(G) \geq 10$. Suponha que G não é Classe 1. Sem perda de generalidade, suponha que G é crítico. Seja $S = \{v \in V(G) : \deg(v) \leq 5\}$. Como G é planar, o conjunto S é não vazio. O grafo $G \setminus S$ também é planar e portanto contém um vértice w que é adjacente em G a no máximo 5 vértices que não estão em S . Como $w \notin S$, existe $v \in S$ que é adjacente a w . A aresta vw é eliminável porque satisfaz: $\deg(v) \leq 5$ e $\deg(v) + d^*(w) \leq 5 + 5 = 10 \leq \Delta(G)$. Isto contradiz G ser crítico. \square

O Teorema 12 pode ser melhorado para estabelecer que todo grafo planar G com $\Delta(G) \geq 8$ é Classe 1. Por outro lado, se um grafo planar G tem $\Delta(G) \leq 5$, então G pode ser Classe 1 ou Classe 2. Exemplos de grafos planares que são Classe 1: ciclos induzidos pares ($\Delta(G) = 2$); tetraedro ($\Delta(G) = 3$); octaedro ($\Delta(G) = 4$) e icosaedro ($\Delta(G) = 5$). Exemplos de grafos planares que são Classe 2: ciclos induzidos ímpares ($\Delta(G) = 2$); grafos obtidos ao inserirmos um vértice em uma aresta qualquer do tetraedro ($\Delta(G) = 3$); do octaedro ($\Delta(G) = 4$) e do icosaedro ($\Delta(G) = 5$).

A seguinte conjectura foi proposta por Vizing [17]:

Conjectura 1 *Todo grafo planar G com $\Delta(G) = 6$ ou com $\Delta(G) = 7$ é Classe 1.*

3.5 Grafos Sobrecarregados

Mencionamos anteriormente que para decidir se um grafo G pertence à Classe 2, precisamos encontrar um argumento que prove que não existe uma $\Delta(G)$ -coloração para as arestas de G . Um argumento usado é a contagem. Observe que em qualquer coloração válida, cada cor corresponde a um emparelhamento, então em um grafo com n vértices, cada cor contém no máximo $\lfloor n/2 \rfloor$ arestas. Logo com $\Delta(G)$ cores colorimos $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$ arestas. Dessa forma, se o número de arestas de um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ exceder $\Delta(G)\lfloor n(H)/2 \rfloor$, então $\Delta(G)$ cores não serão suficientes para colorir G . Tais grafos pertencem à Classe 2 e são conhecidos como **sobrecarregados**. Observe que $n(H)$ deve ser ímpar, pois se $n(H)$ é par, temos que:

$$m(H) \leq \Delta(G) \frac{n(H)}{2}.$$

Um grafo G é **sobrecarregado (SO)** se contiver um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ e tal que seu número de arestas exceda $\Delta(G)(n(H) - 1)/2$.

Os grafos da Figura 23 são sobrecarregados. (No grafo da esquerda, $H = G$.)

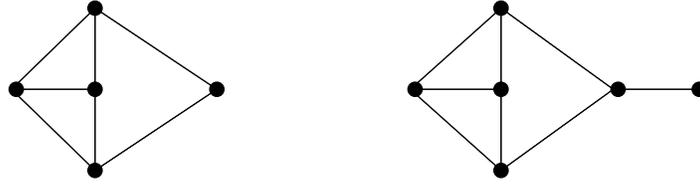


Figura 23: Grafos sobrecarregados.

Grafos sobrecarregados são exemplos de grafos pertencentes à Classe 2. Por outro lado, o grafo de Petersen é um exemplo de um grafo pertencente à Classe 2 que não é sobrecarregado. Na verdade, existem famílias de grafos satisfazendo estas condições, como veremos na Seção 3.7.

O conceito de grafo sobrecarregado tem um importante papel na Teoria da Coloração de Arestas. Hilton [26] lançou a seguinte conjectura.

Conjectura 2 *Seja G um grafo simples com $\Delta(G) > \frac{1}{3} |V(G)|$. Então G pertence à Classe 2 se e somente se G é sobrecarregado.*

O grafo de Petersen sem um vértice é outro exemplo de um grafo Classe 2 que não é SO e mostra que a desigualdade entre $\Delta(G)$ e $|V(G)|$ da Conjetura 2 está no seu limite.

Podemos citar algumas confirmações para a Conjectura 2. Para os grafos com $\Delta(G) \geq n - 3$, temos três referências [26, 41, 42]. Para os grafos multipartidos completos, provou-se que estes grafos pertencem à Classe 2 se e somente se são sobrecarregados [27].

3.6 Algoritmo polinomial para SO

É possível verificar em tempo polinomial se um grafo dado G é sobrecarregado, e inclusive encontrar o subgrafo H que satisfaz a desigualdade $m(H) > \Delta(G)[n(H)/2]$, se existir. Nesta seção mostraremos como fazer isso. Usaremos a notação $E(S)$ para indicar o conjunto de arestas que têm ambos os extremos no conjunto S . É imediato ver que um subgrafo H que satisfaz a desigualdade $m(H) > \Delta(G)[n(H)/2]$, corresponderá sempre a um conjunto S de vértices tal que

$$|E(S)| > \Delta(G) \binom{n-1}{2},$$

onde n é o número de vértices de G .

O algoritmo que descreveremos abaixo baseia-se na seguinte construção. Dado um grafo G , construa \hat{G} adicionando um vértice novo x a G , e, para cada $v \in V(G)$, adicione $\Delta(G) - \deg(v)$ arestas ligando v a x . Note que \hat{G} será um multigrafo, isto é, poderá ter arestas múltiplas. Além disso, dividiremos os vértices de \hat{G} em duas categorias: os vértices pretos e os vértices brancos. Na categoria preta, colocaremos todos os vértices de G e também x se n for ímpar. Na categoria branca, colocaremos

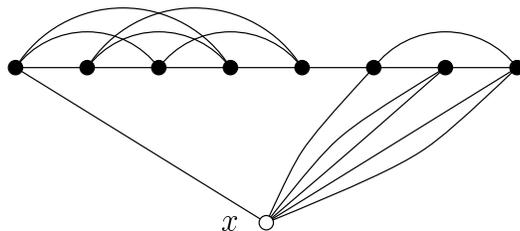


Figura 24: Construção de \widehat{G} . Se $|V(G)|$ fosse ímpar, o ponto x seria preto.

apenas x , e mesmo assim só se n for par. Isto é feito para que \widehat{G} tenha sempre um número par de vértices pretos. A Figura 24 apresenta um exemplo esta construção.

A importância desta construção fica aparente com o seguinte teorema. Lembremos que dado um subconjunto de vértices S de um grafo, o **corte** determinado por S é o conjunto de arestas que possuem uma extremidade em S e a outra fora de S . Denotamos este corte por $[S, \overline{S}]$, onde \overline{S} representa o complemento de S , ou seja, o conjunto dos vértices do grafo que não estão em S .

Teorema 13 *Para um grafo G qualquer e um subconjunto S de vértices de G , temos que $G[S]$ satisfaz $m(G[S]) > \Delta(G)\lfloor n(G[S])/2 \rfloor$ e $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$ se e somente se S possui um número ímpar de vértices pretos em \widehat{G} e $|[S, \overline{S}]| < \Delta(G)$ em \widehat{G} .*

Prova: Se $G[S]$ satisfaz $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$ e $m(G[S]) > \Delta(G)\lfloor n(G[S])/2 \rfloor$, então é claro que $|S|$ é ímpar e seus vértices são todos pretos, pois o único possivelmente branco em \widehat{G} está fora de S . Note também que em \widehat{G} todos os vértices de G têm grau $\Delta(G)$. Em particular, todos os vértices de S têm grau $\Delta(G)$. A soma dos graus de todos os vértices de S pode ser escrita de duas formas:

$$\Delta(G)|S| = 2|E(S)| + |[S, \overline{S}]|, \quad (1)$$

pois uma aresta em $E(S)$ contribui com duas unidades para a soma, enquanto que as arestas do corte contribuem apenas com uma unidade. As outras arestas não contribuem para esta soma.

Por outro lado, a condição sobre $m(G[S])$ implica em

$$\Delta(G[S])(|S| - 1) < 2|E(S)|. \quad (2)$$

Juntando as Equações (1) e (2) com o fato de ser $\Delta(G) = \Delta(G[S])$, temos $|[S, \overline{S}]| < \Delta(G)$. Isto prova uma parte do teorema.

Seja agora S um conjunto de vértices de \widehat{G} que contenha um número ímpar de vértices pretos e tal que

$$|[S, \overline{S}]| < \Delta(G). \quad (3)$$

Como \widehat{G} possui um número par de vértices pretos, \overline{S} também possui um número ímpar de vértices pretos. Com isto, podemos sem perda de generalidade supor que S não contém o vértice extra de \widehat{G} (caso contrário, trocamos S por \overline{S}), isto é, suporemos que $S \subseteq V(G)$. Daí todos os vértices de S têm grau $\Delta(G)$ e vale novamente a Equação (1), que juntamente com (3) nos dá

$$\Delta(G)(|S| - 1) < 2|E(S)|.$$

Contudo, $\Delta(G) \geq \Delta(G[S])$, logo falta apenas mostrar que $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$ para concluir a prova. Mas, se tivéssemos $\Delta(G[S]) \leq \Delta(G) - 1$, então a soma dos graus no grafo $G[S]$ daria

$$2|E(S)| \leq \Delta(G[S])|S| \leq (\Delta(G) - 1)|S|;$$

donde

$$\Delta(G)(|S| - 1) < (\Delta(G) - 1)|S|,$$

o que acarreta

$$|S| < \Delta(G). \quad (4)$$

Por outro lado, temos também

$$2|E(S)| \leq |S|(|S| - 1),$$

logo

$$\Delta(G)(|S| - 1) < |S|(|S| - 1).$$

Mas $|S| \geq 1$ e a igualdade não é possível pois levaria a $0 < 0$, acima. Daí temos

$$\Delta(G) < |S|,$$

o que contradiz a Relação (4). Assim, concluímos que $\Delta(G[S])$ tem que ser igual a $\Delta(G)$. \square

Este resultado nos dá o seguinte algoritmo para testar se um grafo G é sobrecarregado:

Algoritmo SO

Entrada: grafo G

Saída: subgrafo sobrecarregado de G , com o mesmo Δ , se existir

Construir \widehat{G}

Achar S tal que $|S|$ seja ímpar e $|[S, \overline{S}]|$ seja mínimo

Retornar $G[S]$ se $|[S, \overline{S}]| < \Delta(G)$

Como fazer isto em tempo polinomial? Padberg e Rao [40] deram um algoritmo polinomial capaz de encontrar um corte mínimo entre os que separam um número ímpar de vértices pretos em cada margem num grafo com um número total par de vértices pretos.

3.7 Grafos Regulares

É simples ver que um grafo regular com n ímpar é sobrecarregado. De fato, seja G um grafo regular de grau d com n ímpar. Então,

$$m = \sum_{v \in V(G)} gr(v) = \frac{dn}{2} > d \frac{n-1}{2}.$$

O problema torna-se interessante quando n é par, pois apesar de não serem grafos sobrecarregados alguns pertencem à Classe 2 (Petersen, por exemplo) e outros à Classe 1 (por exemplo, C_n , $n \geq 4$).

Dentre os grafos regulares com n par, destaca-se a procura por grafos cúbicos Classe 2. Esta busca foi impulsionada pela equivalência entre o problema das quatro cores e o problema da coloração de arestas de um grafo planar cúbico sem aresta de corte com três cores. O objetivo era provar ou exibir um contra-exemplo para a então conjectura das quatro cores. Com a conjectura provada [1], sabemos que grafos cúbicos planares sem aresta de corte pertencem à Classe 1. O Teorema 14 demonstra a relação entre os dois problemas. Este resultado data de 1880 e é de Tait [17].

Um **mapa** é um grafo planar conexo e sem aresta de corte.

Teorema 14 *O teorema das quatro cores é equivalente à afirmação de que todo mapa cúbico tem índice cromático igual a 3.*

Prova: Seja G um mapa cúbico com regiões coloridas com as cores a, b, c, d . Construa uma 3-coloração para as arestas de G da seguinte forma:

- use a cor 1 para as arestas que separam as regiões coloridas com as cores a e b , ou c e d ;
- use a cor 2 para as que separam regiões coloridas com as cores a e c , ou b e d ;
- use a cor 3 para as que separam regiões coloridas com as cores a e d , ou b e c . (Veja Figura 25.)

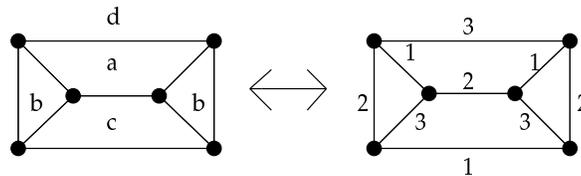


Figura 25: Um mapa cúbico colorido com a, b, c, d .

É fácil ver que dessa forma, obtém-se de fato uma 3-coloração para as arestas de G .

Suponha, agora, que G é um mapa cúbico com uma 3-coloração para as arestas. O subgrafo de G formado pelas arestas coloridas com as cores 1 ou 2 é um ciclo. Pinte a parte interna desse ciclo com a cor α e a externa com a cor β . Analogamente, pinte a parte interna do ciclo formado pelas arestas de cor 1 ou 3 com a cor γ e a externa com a cor ρ . Observe que a união desses dois ciclos, considerando apenas uma vez as arestas repetidas, é G . Associe, agora, a cada região de G um par de coordenadas (x, y) , onde x é α ou β e y é γ ou ρ . Desde que as coordenadas de regiões adjacentes são distintas, (α, γ) , (α, ρ) , (β, γ) e (β, ρ) é uma coloração com quatro cores para as regiões de G (26). \square

A busca por grafos cúbicos Classe 2 passou, então, para não planares e sem arestas de corte. Relembremos que todo grafo sobrecarregado é Classe 2, mas nem todo

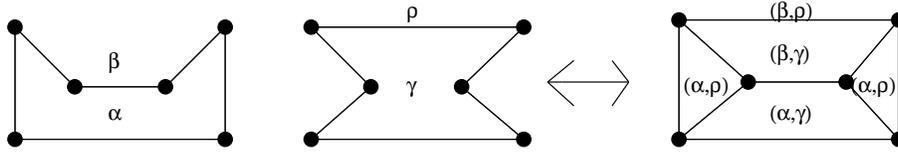


Figura 26: As arestas de um grafo cúbico colorida com três cores.

Classe 2 é sobrecarregado. Uma observação interessante é que grafos cúbicos sobrecarregados possuem aresta de corte (Corolário 1). Portanto, a procura passou para grafos cúbicos Classe 2 que não são sobrecarregados. Estes grafos são conhecidos como **snarks**.

Corolário 1 *Um grafo é sobrecarregado e cúbico se e somente se possui aresta de corte.*

Prova: Sendo G cúbico, o grafo \hat{G} possui $V(\hat{G}) = V(G) \cup \{x\}$, onde x é um vértice isolado e todos os vértices de G são pretos.

Sendo G sobrecarregado com n par, existe um subconjunto próprio S de $V(G)$ tal que $G[S]$ possui $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$ e ele próprio é sobrecarregado.

Do Teorema 13, temos equivalência com $|S|$ é ímpar e $|[S, \bar{S}]| < 3$. Destes e da paridade entre os membros da Equação (1)

$$3|S| = 2|E(S)| + |[S, \bar{S}]|,$$

segue-se que $|[S, \bar{S}]| = 1$. \square

O nome snark foi dado por M. Gardner [18] pela dificuldade em encontrar exemplares não triviais desses grafos. Um snark é **trivial** quando tem cintura menor do que cinco.

Seja G um snark e suponha que G contenha arestas duplas, triângulo ou C_4 . Construa G' da seguinte forma (Figura 27):

- Se G contiver arestas duplas com extremos x e y e adjacentes à x' e y' respectivamente, G' é formado a partir de G retirando-se as arestas duplas e seus extremos e tornando $x'y'$ uma única aresta;
- Se G contiver um triângulo x, y, z adjacentes à x', y', z' , construa G' , contraindo o triângulo em um único vértice;
- Se G contiver um C_4 com vértices x, y, z, w nessa ordem, adjacentes aos vértices x', y', z', w' , respectivamente, fora de C_4 . Construa G' mantendo os vértices $x, x', y, y', z, z', w, w'$ e com as arestas: xx', yy', xy, xz', yw' .

Dessa forma, se é possível colorir G' com três cores, também é possível colorir G com três cores, contradizendo o fato de G ser snark. Logo, G' não é 3-colorível.

Além disso, G' não possui aresta de corte (caso contrário, G também teria aresta de corte). Ou seja, G' não é sobrecarregado.

Concluímos que snarks que contém tais estruturas (arestas duplas, triângulos ou C_4) geram snarks menores, podendo ser considerados triviais.

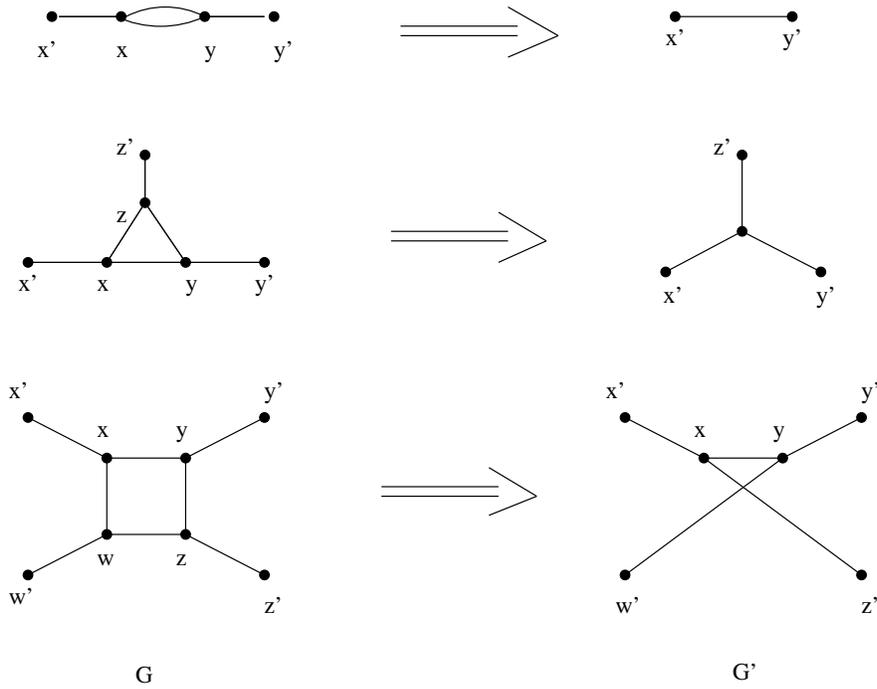


Figura 27: Estruturas pertencentes a snarks triviais.

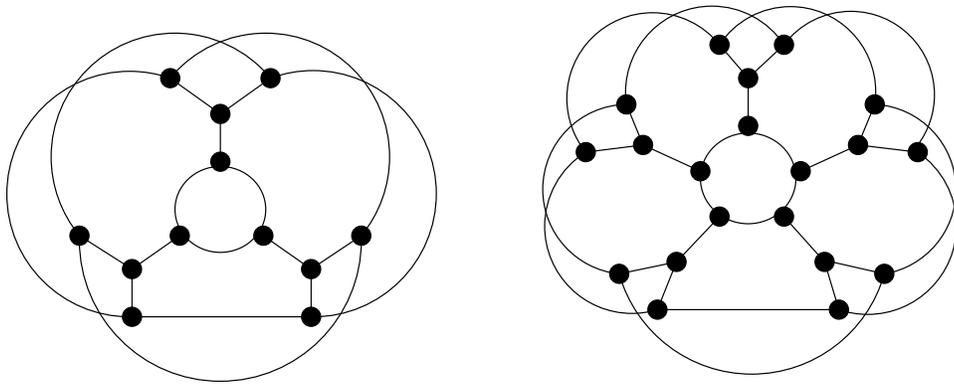


Figura 28: Snarks

O primeiro snark conhecido foi o grafo de Petersen (desde 1898). Somente em 1948, foi encontrado um outro. Atualmente, são conhecidas famílias infinitas de snarks [17]. A Figura 28 corresponde a dois membros de uma das famílias.

Duas conjecturas estão diretamente relacionadas com os snarks. Recentemente, Kochol [31] construiu snarks com cintura grande, demonstrando que a conjectura de Jaeger e Swart [29] (todo snark tem cintura no máximo seis) não é válida. Tutte [49] conjecturou que todo snark contém um grafo homeomorfo ao grafo de Petersen. Esta conjectura permanece, pois todos os snarks conhecidos até agora a satisfazem.

A Conjectura 3, proposta por Hilton [26], diz que para um grafo regular com n par pertencer à Classe 1 é suficiente que n seja menor ou igual ao dobro do $\Delta(G)$. Neste mesmo artigo está a prova de que a Conjectura 2 implica a Conjectura 3.

Conjectura 3 *Seja G um grafo regular com n par tal que $\Delta(G) \geq n/2$. Então G está na Classe 1.*

A Figura 29 mostra a relação de continência entre as classes SO, Classe 1, Classe 2, Δ par e ímpar. O 4-snark está representado na Figura 30.

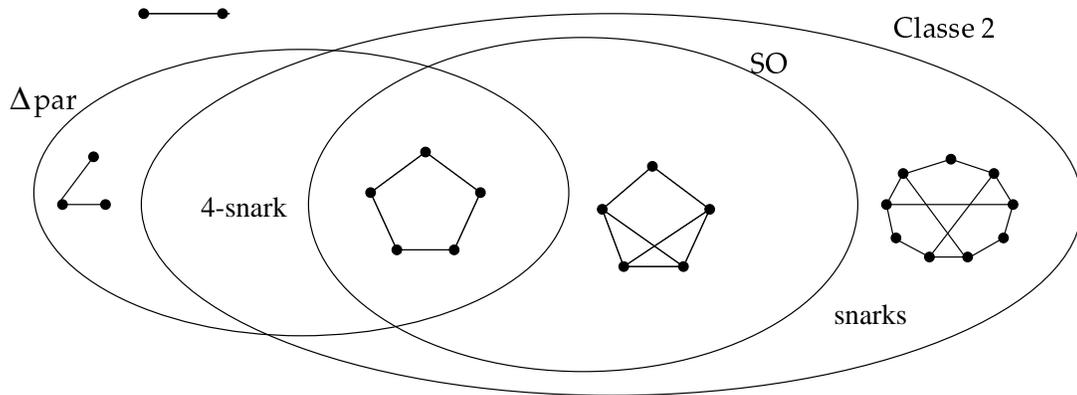


Figura 29: Diagrama de relação de continência entre as classes.

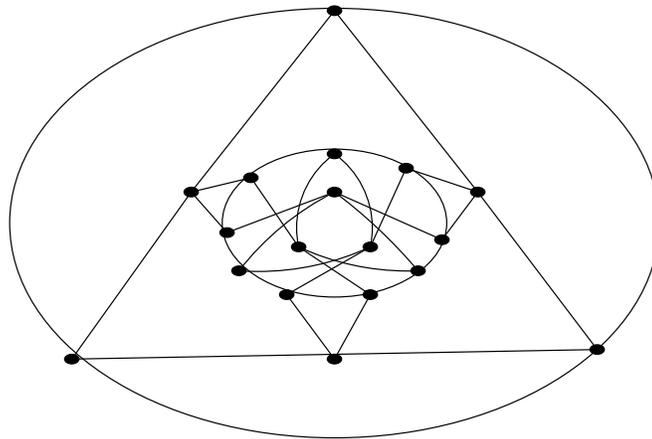


Figura 30: Um grafo Classe 2, com máximo grau par e que não é SO.

3.8 Grafos Completos

Observamos na Seção 3.7 que um grafo completo com n ímpar pertence à Classe 2. Assim, para resolver o problema de classificação para a classe dos grafos completos, basta, então, exibirmos uma coloração com $\Delta(G)$ cores para os grafos completos com n par. Agora, os argumentos usados para colocar K_n com n ímpar na Classe 2, não exibem uma coloração para as arestas de K_n . Bem, o TEOREMA DE VIZING origina um algoritmo que pinta as arestas de qualquer grafo com $\Delta(G) + 1$ cores. Para a demonstração do Teorema 15 abaixo, primeiro exibiremos no Lema 5 uma coloração para as arestas de K_n com n ímpar, e depois a estenderemos para os K_n com n par. A técnica usada é bem mais simples do que o algoritmo originado pelo TEOREMA DE VIZING.

Lema 5 *Seja K_n um grafo completo com n ímpar. Seja $V(G) = \{0, 1, \dots, \Delta(K_n)\}$. Então a função $c: E(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, \Delta(K_n)\}$ tal que $c(ij) = (i + j) \bmod (\Delta(K_n) + 1)$ é uma coloração para as arestas de K_n com $\Delta(K_n) + 1$ cores.*

Prova: Seja K_n um grafo completo com n ímpar. Então, $\Delta(K_n) = n - 1$.

A função c atribui $\Delta(K_n) + 1$ cores às arestas de K_n (os restos das divisões por $\Delta(K_n) + 1$). É necessário provar que não há conflitos, isto é, duas arestas adjacentes com a mesma cor.

Sejam ij e ik arestas distintas de K_n e suponha que $c(ij) = c(ik)$. Então, $(i + j) \bmod (\Delta(K_n) + 1) \equiv (i + k) \bmod (\Delta(K_n) + 1)$, logo, $j = k$, contradição.

Portanto, c é uma coloração válida para K_n , n ímpar. \square

A Figura 31 ilustra a coloração do Lema 5 para o K_5 .

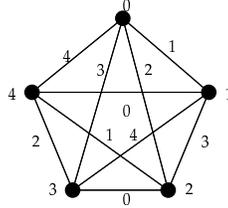


Figura 31: Uma coloração para o K_5 .

Observe que em cada vértice falta uma cor. De fato, c usa $\Delta(K_n) + 1$ cores e cada vértice de G tem grau $\Delta(K_n)$. Além disso, estas cores que faltam são todas distintas, pois são os restos da divisão de $2i$ pelo número ímpar $\Delta(K_n) + 1$.

Teorema 15 K_n está na Classe 1, se n é par, e está na Classe 2, se n é ímpar.

Prova: Considere um grafo completo K_n com n par e seja $V(G) = \{0, 1, 2, \dots, \Delta(K_n) - 1, \mathcal{D}\}$. Pinte as arestas ij com i e j numéricos como no Lema 5 e as arestas $i\mathcal{D}$ com a cor que está faltando no vértice i . Dessa forma, obtém-se uma coloração para as arestas de K_n , n par, com $\Delta(K_n)$ cores.

Do Lema 5 tem-se que K_n está na Classe 2, se n é ímpar. \square

A Figura 32 ilustra a coloração do Teorema 15 para o K_6 .

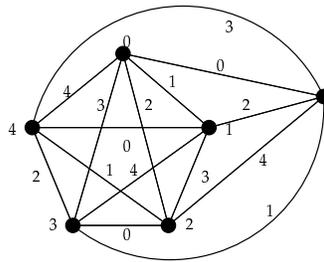


Figura 32: Uma coloração para o K_6 .

3.9 Pullback

Descrevemos um método guloso de rotulação de vértices e sua aplicação para colorir com $\Delta(G)$ cores as arestas de alguns grafos cordais com $\Delta(G)$ ímpar.

Este método é chamado de PULLBACK. Vamos primeiro dar uma idéia do método mostrando como colorir com $\Delta(G)$ cores as arestas dos grafos indiferença com $\Delta(G)$

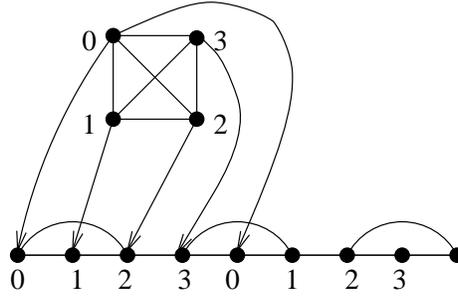


Figura 33: Um grafo indiferença G com $\Delta(G)$ ímpar e a coloração de suas arestas.

ímpar. A seguir, formalizamos o método e discutimos classes de grafos onde sabemos aplicá-lo.

Um grafo é **indiferença** se é possível ordenar totalmente seus vértices de tal forma que vértices contidos em uma mesma clique maximal sejam consecutivos nessa ordem. Tal ordem é denominada **ordem indiferença**. Os grafos indiferença formam uma subclasse dos grafos de intervalo, e são conhecidos também como grafos de intervalos unitários.

Sejam G um grafo indiferença e $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ uma ordem indiferença em seus vértices. Desejamos colorir as arestas do grafo indiferença quando $\Delta(G)$ é ímpar.

Considere um grafo completo K cujo grau é $\Delta(G)$, ou seja, $K = K_{\Delta(G)+1}$. Pinte as arestas de K . (Use a técnica de sua preferência.) Para facilitar, rotule os vértices de K com $\{0, 1, 2, \dots, \Delta(G)\}$.

Considere, agora, a função $\lambda: V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, \Delta(G)\}$, definida como:

$$\lambda(v_i) = i \bmod (\Delta(G) + 1)$$

Esta função λ associa a cada vértice de G o rótulo de um vértice de K , originando seqüências consecutivas de $\Delta(G)+1$ vértices de G rotulados com $0, 1, \dots, \Delta(G)$ (veja Figura 33).

Empreste a cor de cada aresta $\lambda(x)\lambda(y)$ de K para a correspondente aresta xy de G . Este método origina uma coloração válida para G com $\Delta(G)$ cores.

Uma mesma aresta de K emprestará a sua cor para uma ou mais arestas de G . Tais arestas não poderão ser adjacentes, ou seja, um vértice x em G não pode ter dois vizinhos com o mesmo rótulo. Isto não ocorre, pois se um vértice x é adjacente a dois outros de rótulos iguais, então x é adjacente a todos os vértices entre eles, por propriedade da ordem indiferença. Mas existem $\Delta(G)$ vértices entre eles. Logo, o grau de x é $\Delta(G) + 1$, uma contradição.

Além disso, todas as arestas de G são coloridas por esta técnica, ou seja, G não tem arestas entre vértices com o mesmo rótulo. Um argumento análogo ao anterior demonstra esse fato.

Duas arestas adjacentes ij e ik de G possuem cores diferentes, pois $j \neq k$ e em K as arestas $\lambda(i)\lambda(j)$ e $\lambda(i)\lambda(k)$ possuem cores distintas.

Dessa forma, mostramos que todo grafo indiferença com grau máximo ímpar pertence à Classe 1. A Figura 33 ilustra a aplicação desta técnica.

Observe que, se o grau máximo do grafo indiferença G é par, então o método acima exhibe uma coloração para o grafo com $\Delta(G) + 1$ cores. Para isso, basta

considerar a função λ definida sobre o conjunto que representa as cores de K_n com n ímpar.

Dados dois grafos G e G' , um PULLBACK é uma função $f: V(G) \rightarrow V(G')$, tal que

- f é um homomorfismo, i.e., se $xy \in E(G)$, então $f(x)f(y) \in E(G')$;
- f é injetora quando restrita a $N(v)$, para todo $v \in V(G)$.

Lema 6 *Se $f: V(G) \rightarrow V(G')$ é um PULLBACK e κ' é uma coloração das arestas de G' , então a atribuição de cores κ definida por*

$$\kappa(xy) = \kappa'(f(x)f(y))$$

é uma coloração das arestas de G .

Prova: Cada aresta de G tem uma cor definida por κ por que $f: V(G) \rightarrow V(G')$ é um homomorfismo.

Por outro lado, suponha que a atribuição de cores κ tem conflitos, digamos duas arestas adjacentes e distintas xy e xz com $\kappa(xy) = \kappa(xz)$. Logo, $\kappa'(f(x)f(y)) = \kappa'(f(x)f(z))$. Como f é injetora quando restrita a $N(x)$, e $y \neq z \in N(x)$, temos $f(y) \neq f(z) \in N(f(x))$. Isto implica que κ' não é uma coloração das arestas de G' , uma contradição. \square

Uma coloração κ das arestas de G é um PULLBACK de uma coloração κ' das arestas de G' , se κ é definida a partir de κ' como no Lema 6.

Denotamos por G^2 o grafo obtido a partir de G , adicionando-se a G arestas entre vértices a distância 2 em G . O teorema a seguir prova que se existe uma coloração dos vértices de G^2 com ℓ cores, então existe um PULLBACK $f: V(G) \rightarrow V(K_\ell)$. Note que, qualquer coloração dos vértices de G^2 precisa de $\ell \geq \Delta(G) + 1$ cores. Logo, este resultado diz que se existe uma coloração dos vértices de G^2 com $\Delta(G) + 1$ cores, então existe um modo natural de colorir as arestas de G com $\Delta(G) + 1$ cores.

Teorema 16 *Existe um PULLBACK $f: V(G) \rightarrow V(K_\ell)$ se e somente se $\chi(G^2) \leq \ell$.*

Prova: Seja $\lambda: V(G^2) \rightarrow S$ uma coloração dos vértices de G^2 com $|S| = \ell$. Considere a bijeção $g: S \rightarrow V(K_\ell)$. Mostraremos que a composição $f = g \circ \lambda$ é um PULLBACK $f: V(G) \rightarrow V(K_\ell)$ (lembre que $V(G) = V(G^2)$).

A primeira condição de PULLBACK é satisfeita por f . Para a segunda condição, note que λ também é uma coloração dos vértices de G com ℓ cores e que vértices à distância dois em G tem cores diferentes. Logo f é injetora quando restrita a $N(v)$, para todo $v \in V(G)$.

Por outro lado, seja $f: V(G) \rightarrow V(K_\ell)$ um PULLBACK. Esta função pode ser vista como uma atribuição de cores com $S = V(K_\ell)$. Se $uv \in E(G)$, então $f(u)f(v) \in E(K_\ell)$, i.e., $f(u) \neq f(v)$. Se u e v estão à distância dois em G , então existe $w \in V(G)$ com $u, v \in N(w)$. Como f é injetora quando restrita a $N(w)$, $f(u)$ também é diferente de $f(v)$. Logo, não temos conflitos e f é uma coloração dos vértices de G^2 . Segue que $\chi(G^2) \leq \ell$. \square

Os índices cromáticos dos grafos completos são conhecidos: K_ℓ é Classe 1, se $\ell > 0$ é par e K_ℓ é Classe 2, se ℓ é ímpar. Em particular, exibimos a seguir condições suficientes para um grafo G ser Classe 1: G tem $\Delta(G)$ ímpar e G^2 admite uma coloração de vértices com $\Delta(G) + 1$ cores.

Corolário 2 *Suponha que $\chi(G^2) \leq \ell$. Então*

- $\chi'(G) \leq \ell - 1$, se ℓ é par e $\ell > 0$;
- $\chi'(G) \leq \ell$, se ℓ é ímpar.

O PULLBACK que exibimos para colorir os grafos indiferença com grau máximo ímpar pode ser generalizado e usado para demonstrar que os grafos duplamente cordais com grau máximo ímpar pertencem à Classe 1. Esta classe contém os grafos de intervalos e os grafos fortemente cordais [13].

3.10 Decomposição

Na Teoria dos Grafos, a técnica da DECOMPOSIÇÃO consiste em particionar um grafo em subgrafos de um determinado tipo.

Nesta seção, consideraremos a partição das arestas de um grafo G de tal forma que os subgrafos G_i gerados pelos elementos da partição satisfaçam $\Delta(G) = \sum_i \Delta(G_i)$. Se soubermos colorir com $\Delta(G_i)$ cores as arestas de cada G_i , teremos uma coloração com $\Delta(G)$ cores para as arestas de G .

Mostraremos uma aplicação da técnica de DECOMPOSIÇÃO na classe dos grafos split.

Um grafo é **split** se o conjunto de seus vértices admitir uma partição em uma clique A e um conjunto independente B . O grafo P_4 é um exemplo de um grafo split, enquanto C_4 não é split.

A definição de grafos split gera uma partição em suas arestas em um grafo completo, $K_{|A|}$, formado pelas arestas com ambos os extremos em A , e um grafo bipartido, H , formado por arestas com extremos em A e em B .

Observe que podemos tomar A maximal e, neste caso, A conterà os vértices de grau máximo em G .

Teorema 17 *Seja G um grafo split e $\{A, B\}$ uma partição de $V(G)$ com $|A| = a$. Se $\Delta(G) \geq 2a - 1$, então G está na Classe 1.*

Prova: Sejam G um grafo split, $\{A, B\}$ uma partição de $V(G)$ e $|A| = a$. Suponhamos A maximal e consideremos a partição das arestas de G , $\{K_a, H\}$, gerada por $\{A, B\}$. Analisemos dois casos.

Se a é par, então o grafo completo K_a pode ser colorido com $a - 1$ cores. Além disso, o grafo bipartido, H , tem grau máximo $\Delta(H) = \Delta(G) - a + 1$, desde que pelo menos um vértice de A tem este grau em H e para cada $x \in B$ tem-se

$$\deg_H(x) = \deg_G(x) \leq a - 1 < \Delta(G) - a + 1.$$

Sendo bipartido, H pertence à Classe 1 e pode ser colorido com $\Delta(G) - a + 1$ cores. Logo, o número total de cores necessárias é:

$$(a - 1) + (\Delta(G) - a + 1) = \Delta(G).$$

Se a é ímpar, então o mesmo argumento não poderá ser utilizado, pois K_a precisa de a cores. Mas podemos emprestar uma cor de H da seguinte forma. Pinte H com $\Delta(G) - a + 1$ cores. Escolha uma cor e considere o emparelhamento M formado pelas arestas desta cor. As arestas em M incidem em todos os vértices de grau máximo em H . Dessa forma, o grafo $H - M$ pode ser colorido com $\Delta(G) - a$ cores e $K_a + M$ com a cores, desde que em uma coloração com a cores de K_a uma cor falta em cada vértice. Esta cor poderá ser usada para colorir as arestas extras (M). Portanto, usamos $\Delta(G) - a$ cores para $H - M$ e a cores para $K_a + M$, totalizando $\Delta(G)$ cores para G . \square

A seguir, aplicaremos a técnica da DECOMPOSIÇÃO a uma subclasse dos grafos indiferença.

Sejam G um grafo indiferença e v_1, v_2, \dots, v_n uma ordem indiferença para G . Rotule cada v_i com i . Denote por M o conjunto das arestas de G que ligam vértices cujos rótulos possuem a mesma paridade, por D o conjunto das arestas que ligam vértices com rótulos de paridades distintas, por $G[M]$ o subgrafo de G formado pelas arestas em M e por $G[D]$ o subgrafo de G formado pelas arestas em D . (Veja Figura 34.)

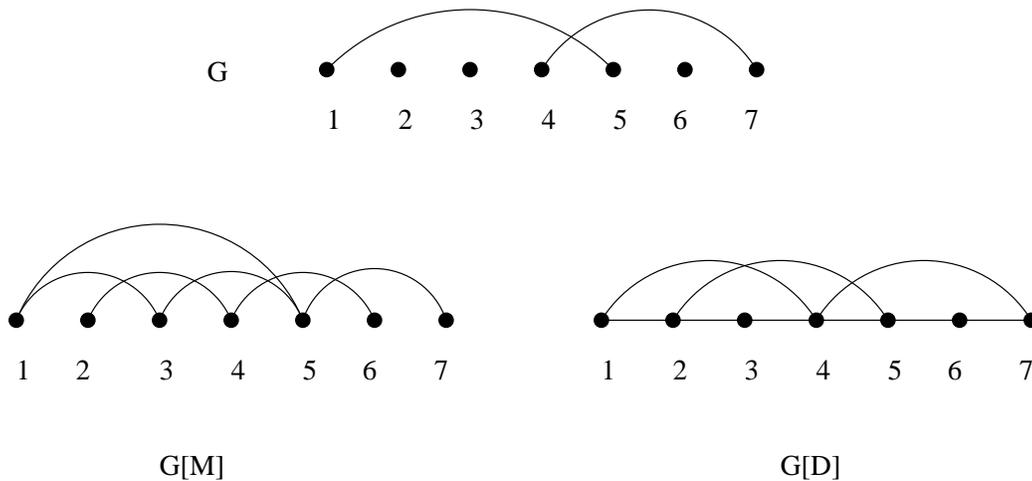


Figura 34: Um grafo indiferença G , $G[M]$ e $G[D]$.

Lema 7 *Seja G um grafo indiferença, então $G[M]$ é indiferença e $G[D]$ um grafo bipartido.*

Prova: Seja G um grafo indiferença. Considere v_1, v_2, \dots, v_n uma ordem indiferença para G e uma rotulação dos vértices como definida anteriormente.

Para ver que $G[M]$ é um grafo indiferença, ordene seus vértices colocando os que possuem rótulo par na ordem indiferença de G consecutivamente na ordem de $G[M]$ e, a seguir, os de rótulo ímpar: $v_2, v_4, \dots, v_{2i}, v_1, v_3, \dots, v_{2i-1}$, $i \geq 1$.

Esta ordem é uma ordem indiferença para $G[M]$. Se $M = \phi$, então $G[M]$ é indiferença. Seja $v_i v_j \in M$, onde v_j é o vizinho mais à direita de v_i na ordem

dos vértices definida para $G[M]$. Então, $i \neq j$, $v_i v_j \in E(G)$ e i e j têm a mesma paridade. Portanto, para todo v_k tal que $v_i \leq v_k \leq v_j$, com k de mesma paridade de i e j , tem-se $v_i v_k$ e $v_k v_j$ são arestas de G e também de $G[M]$, por definição, e conclui-se que a ordem definida para os vértices de $G[M]$ é uma ordem indiferença.

Para ver que $G[D]$ é um grafo bipartido, basta observar que $G[D]$ não contém ciclos ímpares, pois caso contrário $G[D]$ teria aresta com ambos os extremos de igual paridade. \square

Observe que nem sempre $\Delta(G) = \Delta(G[M]) + \Delta(G[D])$. Na Figura 34, temos $\Delta(G) = 6$, $\Delta(G[M]) = 3$ e $\Delta(G[D]) = 4$. Mas para algumas subclasses dos indiferença temos a igualdade e, em especial para a que vamos considerar, podemos também mostrar que esta classe possui uma $\Delta(G)$ -coloração.

Um grafo indiferença é uma **linha vermelha** quando o vizinho mais à direita de cada v_i na ordem indiferença é v_{i+x} , onde x é constante, $x \geq 0$ e $1 \leq i \leq n - x$. Dizemos que x é o **comprimento** da linha vermelha e que uma aresta de comprimento x , $x \geq 0$, é **máxima**.

Em uma linha vermelha, todas as cliques maximais possuem a mesma cardinalidade: $x + 1$. A Figura 35 é um exemplo para $x = 2$. (Exercício: Explique o porquê do nome deste grafo.)

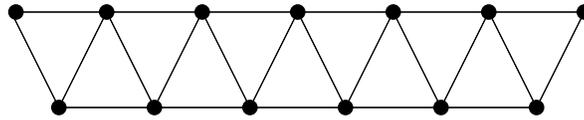


Figura 35: Um grafo linha vermelha com $x = 2$.

Corolário 3 *Seja G uma linha vermelha com aresta máxima de comprimento $x = 2i$ ou $x = 2i + 1$, $i \geq 1$. Então $G[M]$ é uma linha vermelha com aresta máxima de comprimento i .*

Prova: Seja G uma linha vermelha. Pelo Lema 7, $G[M]$ é indiferença. Considere as ordens indiferença para G e $G[M]$ definidas no Lema 7.

Se $x \leq 1$, então $M = \emptyset$ e $G[M]$ é uma linha vermelha.

Seja $x \geq 2$. Se $x = 2i$, $i \geq 1$, então tem-se que $v_j v_{j+x} \in E(G)$, $1 \leq j \leq n - x$. Logo, as arestas máximas em G possuem ambos os extremos com a mesma paridade. Portanto, $v_j v_{j+x}$ é aresta máxima de $G[M]$, $1 \leq j \leq n - x$. Como existem $i + 1$ vértices v_k com rótulo par (ímpar) tal que $j \leq k \leq j + x$, o comprimento da aresta $v_j v_{j+x}$ é i em $G[M]$.

Se $x = 2i + 1$, $i \geq 1$, então as arestas máximas em G possuem extremos de paridade distintas. Logo, para cada $v_j \in G$, temos que v_{j+x-1} é o vértice de mesma paridade de v_j mais à direita na ordem indiferença de G . Logo $v_j v_{j+x-1} \in A(G[M])$, $1 \leq j \leq n - x$ e seu comprimento é i . \square

Observe que o grau máximo em uma linha vermelha G de comprimento x é $2x$. Segue-se do Corolário 3 que o comprimento de $G[M]$ é $\lfloor x/2 \rfloor$. Logo, $\Delta(G[M]) = \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$. Por outro lado, dado um vértice v_i de G , o número de vértices com rótulos de paridade distinta à de i é $\lceil x/2 \rceil$. Logo, $\Delta(G[D]) = \lceil \Delta(G)/2 \rceil$. Conclui-se que se G é uma linha vermelha, então $\Delta(G) = \Delta(G[M]) + \Delta(G[D])$.

Dessa forma, se soubermos colorir com $\Delta(G[M])$ cores o grafo $G[M]$, mostraremos que G pertence à Classe 1.

Teorema 18 *Se G é uma linha vermelha, então G está na Classe 1.*

Prova: Provaremos por indução no comprimento x de G .

Se $x \leq 1$, então $G \cong G[D]$. Logo, G está na Classe 1.

Seja G uma linha vermelha de comprimento x , $x \geq 2$.

Construamos $G[M]$ e $G[D]$. Pelo Lema 7, $G[M]$ é uma linha vermelha de comprimento $\lfloor x/2 \rfloor$. Logo, por hipótese de indução, $G[M]$ é colorida com $\Delta(G[M])$ cores.

Sendo que, pelo Lema 7, $G[D]$ é bipartido e que $\Delta(G) = \Delta(G[M]) + \Delta(G[D])$, tem-se que G possui uma $\Delta(G)$ -coloração. \square

A DECOMPOSIÇÃO foi, também, usada por Plantholt [41, 42] na coloração das arestas dos grafos que possuem vértices universais e quase-universais, respectivamente. Posteriormente, foi aplicada por Chetwynd e Hilton [9] na coloração das arestas da classe de grafos com grau máximo $|V| - 3$. Apesar desta classe incluir as outras duas anteriores, a demonstração neste artigo não as dispensa. O conceito desta técnica é simples, mas as demonstrações citadas são bastante intrincadas para serem descritas neste texto.

3.11 Grafo das Cores Faltantes

Sempre que um grafo G é colorido com k cores, podemos formar o chamado GRAFO DAS CORES FALTANTES. Este grafo é bipartido e constrói-se como segue. De um lado colocamos os vértices de G . Do outro lado, as cores $1, 2, \dots, k$. Haverá uma aresta entre o vértice v e a cor i exatamente quando i faltar em v . O grafo das cores faltantes é importante quando se trata de estender uma coloração já existente a um grafo obtido acrescentando novos vértices a G . Por exemplo, um emparelhamento no grafo de cores faltantes significa que escolhemos alguns vértices de G e uma coleção de cores distintas, uma faltando em cada um destes vértices. Ora, isto pode ser usado para adicionar um vértice novo a G , ligado aos vértices escolhidos pelas cores emparelhadas a eles. De maneira análoga, um conjunto de emparelhamentos disjuntos corresponde à adição de vários vértices.

Em geral, a técnica do GRAFO DAS CORES FALTANTES é usada quando a k -coloração inicial de G é **equilibrada**, ou seja, a diferença entre os números de arestas pintadas por duas cores i e j é no máximo uma unidade. É fácil transformar uma coloração qualquer numa coloração equilibrada: basta utilizar as CADEIAS DE KEMPE. Observe que o subgrafo $H(i, j)$ induzido pelas arestas coloridas com i ou j é uma coleção de caminhos e ciclos pares. Se i colore mais arestas que j , então deve haver pelo menos um caminho destes que comece e termine com aresta de cor i . Trocando i por j neste caminho, conseguimos equilibrar mais a coloração. Este processo pode ser repetido até que a coloração seja equilibrada.

Como exemplo destas técnicas, mostraremos como colorir um grafo tripartido completo $G = K_{k,k,k}$, onde cada parte tem o mesmo número de vértices k e este tamanho comum é par. Sejam A , B e C as três partes de G . Lembramos que num

grafo tripartido completo existem todas as arestas entre vértices de partes distintas, mas não existem arestas entre vértices da mesma parte.

Um tal grafo G pode ser colorido com $\Delta = 2k$ cores. Para tanto, começamos colorindo o bipartido $H = K_{k,k}$, formado por A e B , com Δ cores. Observe que o grau máximo de H é k , mas estamos “esbanjando” e colorindo-o com o dobro de cores. Além disso, escolheremos uma coloração equilibrada. Neste caso, o equilíbrio significa que cada cor terá o mesmo número de arestas: $k/2$. Há k^2 arestas e $2k$ cores. Neste ponto precisamos de que k seja par.

Agora construímos o GRAFO DE CORES FALTANTES F . Cada vértice u de H terá grau k em F , pois do total de $2k$ cores, k delas colorem as k arestas incidentes a u em H e as k restantes faltam em u . Por outro lado, cada cor i pinta $k/2$ arestas em H , logo atinge k vértices. Como o total de vértices em H é $2k$, cada cor falta em exatamente k vértices.

Concluimos que F é regular de grau k . Além disso, é bipartido. Logo, pode ser colorido com k cores. Identifique agora cada uma destas cores com um vértice de C . Se a cor α pinta uma aresta ui em F , considere que a cor i pinta a aresta $u\alpha$ em G . Não é difícil verificar que a coloração assim obtida é uma Δ -coloração do tripartido G .

Conclusão

Fechamos este texto chamando atenção para os problemas de coloração em grafos que nos atraíram para esta área.

Em coloração de vértices, temos trabalhado com grafos perfeitamente contraíveis. De acordo com a Seção 2.3, estes grafos são coloridos por contrações sucessivas de duplas pares. Everett e Reed [16] conjecturaram uma caracterização dos grafos perfeitamente contraíveis através de uma família de subgrafos proibidos. Conseguimos recentemente dar evidências positivas para esta conjectura [12].

Em coloração de arestas, temos trabalhado com grafos sobrecarregados. De acordo com a Seção 3.6, estes grafos podem ser reconhecidos em tempo polinomial. Conjecturamos que para os grafos cordais, ser Classe 2 é equivalente a ser sobrecarregado. Conseguimos recentemente, dar evidências positivas para esta conjectura [14, 13]. Em [14] colorimos todos os grafos com no máximo três cliques maximais. Em [13] colorimos os grafos duplamente cordais com grau máximo ímpar. Os grafos duplamente cordais contém os conhecidos grafos de intervalos.

Referências

- [1] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. *Ill. J. Math.*, 21:429–567, 1977.
- [2] S. R. Arikati and U. N. Peled. A polynomial algorithm for the parity path problem on perfectly orientable graphs. *Discrete Applied Math.*, 65:5–20, 1996.
- [3] S. R. Arikati and C. Pandu Rangan. An efficient algorithm for finding a two-pair, and its applications. *Discrete Applied Math.*, 31:71–74, 1991.

- [4] S. R. Arikati, C. Pandu Rangan, and G. K. Manacher. Efficient reduction for path problems on circular-arc graphs. *BIT*, 31:182–193, 1991.
- [5] D. Bienstock. On the complexity of testing for odd holes and induced odd paths. *Discrete Math.*, 90:85–92, 1991.
- [6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [7] L. Cai and J. A. Ellis. NP-completeness of edge-colouring some restricted graphs. *Discrete Applied Math.*, 30:15–27, 1991.
- [8] Bor-Liang Chen and Hung-Lin Fu. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Comb. Math. Comb. Comput.*, 17:137–146, 1995.
- [9] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. The edge-chromatic class of graphs with maximum degree at least $|V| - 3$. *Ann. Discrete Math.*, 41:91–110, 1989.
- [10] V. Chvátal. Perfectly ordered graphs. In C. Berge and V. Chvátal, editors, *Topics on Perfect Graphs*, pages 63–68. North Holland, Amsterdam, 1984.
- [11] C. M. H. de Figueiredo and S. Klein. The NP-completeness of multi-partite cutset testing. *Congressus Numerantium*, 119:217–222, 1996.
- [12] C. M. H. de Figueiredo, F. Maffray, and O. Porto. On the structure of bull-free perfect graphs. *Graphs and Combinatorics*, 13:31–55, 1997.
- [13] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. A greedy method for edge-colouring odd maximum degree doubly chordal graphs. *Congressus Numerantium*, 111:170–176, 1995.
- [14] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. On edge-colouring indifference graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 911:286–299, 1995.
- [15] G. A. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 25:50–71, 1961.
- [16] H. Everett, C. M. H. de Figueiredo, C. Linhares-Sales, F. Maffray, O. Porto, and B. A. Reed. Path parity and perfection. *Discrete Math.*, 165/166:233–252, 1997.
- [17] S. Fiorini and R.J. Wilson. *Edge-Colourings of Graphs*. Pitman, London, 1977.
- [18] M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 234:126–130, 1976.
- [19] M. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, San Francisco, 1979.
- [20] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [21] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1:169–197, 1981.
- [22] R. Hayward. Weakly triangulated graphs. *J. Comb. Theory (B)*, 39:200–208, 1985.
- [23] R. Hayward, C. T. Hoàng, and F. Maffray. Optimizing weakly triangulated graphs. *Graphs and Combinatorics*, 5:339–349, 1989.

- [24] John L. Hennessy and David A. Paterson. *Computer Architecture: A Quantitative Approach*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1990.
- [25] A. Hertz. A fast algorithm for colouring Meyniel graphs. *J. Comb. Theory (B)*, 50:231–240, 1990.
- [26] A. J. W. Hilton. Two conjectures on edge-colouring. *Discrete Math.*, 74:61–64, 1989.
- [27] D. G. Hoffman and C. A. Rodger. The chromatic index of complete multipartite graphs. *J. of Graph Theory*, 16:159–163, 1992.
- [28] I. Holyer. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720, 1981.
- [29] F. Jaeger and T. Swart. Conjecture 1. *Ann. Discrete Math.*, 9:305, 1980.
- [30] Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, 1995.
- [31] M. Kochol. Snarks without small cycles. *J. Comb. Theory (B)*, 67:34–47, 1996.
- [32] A. S. Lapauqh and C. H. Papadimitriou. The even path problem for graphs and digraphs. *Networks*, 14:507–513, 1984.
- [33] C. L. Lucchesi. *Introdução à Teoria dos Grafos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1979.
- [34] C. L. Lucchesi, I. Simon, I. Simon, J. Simon, and T. Kowaltowski. *Aspectos Teóricos da Computação*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1979.
- [35] R. M. McConnell and J. Spinrad. Linear-time transitive orientation. In *Proceedings of the Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 19–25, 1997.
- [36] H. Meyniel. On the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 16:253–267, 1976.
- [37] M. Middendorf and F. Pfeiffer. On the complexity of recognizing perfectly orderable graphs. *Discrete Math.*, 81:327–333, 1990.
- [38] P. O. Boaventura Netto. *Grafos, Teoria, Modelos, Algoritmos*. Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1996.
- [39] O. Ore. *The Four-Colour Problem*. Academic Press, New York, 1967.
- [40] M. W. Padberg and M. R. Rao. Odd minimum cut-sets and b -matching. *Math. Oper. Res.*, 7:67–80, 1982.
- [41] M. Plantholt. The chromatic index of graphs with a spanning star. *J. of Graph Theory*, 5:45–53, 1981.
- [42] M. Plantholt. The chromatic index of graphs with large maximum degree. *Discrete Math.*, 47:91–96, 1983.
- [43] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. The four-colour theorem. *J. Comb. Theory (B)*, 70:2–44, 1997.

- [44] C. R. Satyan and C. Pandu Rangan. The parity path problem on some subclasses of perfect graphs. *Discrete Applied Math.*, 68:293–302, 1996.
- [45] J. Spinrad. On comparability and permutation graphs. *SIAM J. Comput.*, 14(3):658–670, 1985.
- [46] J. Spinrad and R. Sritharan. Algorithms for weakly triangulated graphs. *Discrete Applied Math.*, 59:181–191, 1995.
- [47] J. L. Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1986.
- [48] J. L. Szwarcfiter, C. P. de Mello, and C. M. H. de Figueiredo. Sources, sinks, even and odd pairs in comparability graphs. Technical report, LIRMM 93-076, Montpellier, France, 1993. To appear in *Order*.
- [49] W. T. Tutte. On the algebraic theory of graph colorings. *Journal of Combinatorial Theory*, 1:15–50, 1966.
- [50] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diket. Analiz.*, 3:25–30, 1964. In russian.
- [51] S. H. Whitesides. An algorithm for finding clique cut-sets. *Inf. Proc. Letters*, 12:31–32, 1981.