

Lógica Epistêmica e Mudanças de Crenças

Mario Benevides

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, Brasil

2013 - DCC - UFRJ

Inteligência Artificial

- ▶ "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"

Inteligência Artificial

- ▶ "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- ▶ Raciocínio \Rightarrow Conhecimento

Inteligência Artificial

- ▶ "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- ▶ Raciocínio \Rightarrow Conhecimento
- ▶ Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?

Inteligência Artificial

- ▶ "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- ▶ Raciocínio \Rightarrow Conhecimento
- ▶ Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?
 - ▶ Lógica

Inteligência Artificial

- ▶ "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- ▶ Raciocínio \Rightarrow Conhecimento
- ▶ Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?
 - ▶ Lógica
 - ▶ Redes Neurais e etc

Inteligência Artificial

- ▶ "Construir Sistemas Raciocinam como Humanos (???)"
- ▶ Raciocínio \Rightarrow Conhecimento
- ▶ Como Representar o Conhecimento e Raciocinar sobre ele?
 - ▶ Lógica
 - ▶ Redes Neurais e etc
- ▶ Raciocínio \Rightarrow Conhecimento \Rightarrow **Lógica**

Roteiro

- ▶ Jogos e Quebra-Cabeça.

Roteiro

- ▶ Jogos e Quebra-Cabeça.
- ▶ Lógica Epistêmica Multi-Agente.
 - ▶ Halpern, Fagin, Moses e Vardi

Roteiro

- ▶ Jogos e Quebra-Cabeça.
- ▶ Lógica Epistêmica Multi-Agente.
 - ▶ Halpern, Fagin, Moses e Vardi
- ▶ Lógicas Epistêmicas Dinâmicas.

Roteiro

- ▶ Jogos e Quebra-Cabeça.
- ▶ Lógica Epistêmica Multi-Agente.
 - ▶ Halpern, Fagin, Moses e Vardi
- ▶ Lógicas Epistêmicas Dinâmicas.
 - ▶ Public Announcement Logic

Roteiro

- ▶ Jogos e Quebra-Cabeça.
- ▶ Lógica Epistêmica Multi-Agente.
 - ▶ Halpern, Fagin, Moses e Vardi
- ▶ Lógicas Epistêmicas Dinâmicas.
 - ▶ Public Announcement Logic
 - ▶ Action Models Logic

Jogos e Quebra-Cabeça

- ▶ Cartas Russas (Russian Cards)

Jogos e Quebra-Cabeça

- ▶ Cartas Russas (Russian Cards)
- ▶ Cem prisioneiros e uma Lâmpada

Jogos e Quebra-Cabeça

- ▶ Cartas Russas (Russian Cards)
- ▶ Cem prisioneiros e uma Lâmpada
- ▶ Crianças com Lama na Testa

Cartas Russas (Russian Cards)

- ▶ **3 Agentes:** ana e beto e carla

Cartas Russas (Russian Cards)

- ▶ **3 Agentes:** ana e beto e carla
- ▶ **7 Cartas:** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cartas Russas (Russian Cards)

- ▶ **3 Agentes:** ana e beto e carla
- ▶ **7 Cartas:** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ **Distribuição:** 3 cartas para ana e beto e 1 para carla

Cartas Russas (Russian Cards)

- ▶ **3 Agentes:** ana e beto e carla
- ▶ **7 Cartas:** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ **Distribuição:** 3 cartas para ana e beto e 1 para carla
- ▶ **Objetivo:** descobrir as cartas dos outros

Cartas Russas (Russian Cards)

- ▶ **3 Agentes:** ana e beto e carla
- ▶ **7 Cartas:** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ **Distribuição:** 3 cartas para ana e beto e 1 para carla
- ▶ **Objetivo:** descobrir as cartas dos outros
- ▶ **Regra:** ana e beto podem se comunicar publicamente

Cartas Russas (Russian Cards)

- ▶ **3 Agentes:** ana e beto e carla
- ▶ **7 Cartas:** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ **Distribuição:** 3 cartas para ana e beto e 1 para carla
- ▶ **Objetivo:** descobrir as cartas dos outros
- ▶ **Regra:** ana e beto podem se comunicar publicamente
- ▶ **Ganha carla:** se após comunicação ela descobre
- ▶ **Ganha ana e beto:** se após comunicação um deles descobre mas não carla

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- ▶ **Distribuição:** ana \Rightarrow $\{0, 1, 2\}$ e beto \Rightarrow $\{3, 4, 5\}$ e carla \Rightarrow $\{6\}$

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- ▶ **Distribuição:** ana \Rightarrow $\{0, 1, 2\}$ e beto \Rightarrow $\{3, 4, 5\}$ e carla \Rightarrow $\{6\}$
- ▶ **Comunicação 1:** ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- ▶ **Distribuição:** ana \Rightarrow $\{0, 1, 2\}$ e beto \Rightarrow $\{3, 4, 5\}$ e carla \Rightarrow $\{6\}$
- ▶ **Comunicação 1:** ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- ▶ **Ruim:** carla ganha!!! 😊

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- ▶ **Distribuição:** ana \Rightarrow $\{0, 1, 2\}$ e beto \Rightarrow $\{3, 4, 5\}$ e carla \Rightarrow $\{6\}$
- ▶ **Comunicação 1:** ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- ▶ **Ruim:** carla ganha!!! ☹
- ▶ **Comunicação 2:** ana diz "tenho 012 ou 034 ou 056 ou 135 ou 246", bom ou ruim?

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- ▶ **Distribuição:** ana \Rightarrow $\{0, 1, 2\}$ e beto \Rightarrow $\{3, 4, 5\}$ e carla \Rightarrow $\{6\}$
- ▶ **Comunicação 1:** ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- ▶ **Ruim:** carla ganha!!! ☹
- ▶ **Comunicação 2:** ana diz "tenho 012 ou 034 ou 056 ou 135 ou 246", bom ou ruim?
- ▶ **Bom:** : ana e beto ganham!!! ☺

Cartas Russas (Russian Cards) - Exemplo

- ▶ **Distribuição:** ana \Rightarrow $\{0, 1, 2\}$ e beto \Rightarrow $\{3, 4, 5\}$ e carla \Rightarrow $\{6\}$
- ▶ **Comunicação 1:** ana diz "tenho 012 ou beto tem 012" e beto diz "tenho 345 ou ana tem 345", bom ou ruim?
- ▶ **Ruim:** carla ganha!!! ☹
- ▶ **Comunicação 2:** ana diz "tenho 012 ou 034 ou 056 ou 135 ou 246", bom ou ruim?
- ▶ **Bom:** : ana e beto ganham!!! ☺

- ▶ **Como ana chegou a esta comunicação???**

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- ▶ **Início:** Comunicado a todos os prisioneiros
 - ▶ 100 prisioneiros estão numa sala
 - ▶ eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
 - ▶ eles vão ser escolhidos aleatoriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
 - ▶ nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
 - ▶ a lâmpada começa apagada
 - ▶ um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- ▶ **Início:** Comunicado a todos os prisioneiros
 - ▶ 100 prisioneiros estão numa sala
 - ▶ eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
 - ▶ eles vão ser escolhidos aleatoriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
 - ▶ nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
 - ▶ a lâmpada começa apagada
 - ▶ um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- ▶ **Objetivo:** descobrir se todos já foram interrogados.

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- ▶ **Início:** Comunicado a todos os prisioneiros
 - ▶ 100 prisioneiros estão numa sala
 - ▶ eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
 - ▶ eles vão ser escolhidos aleatoriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
 - ▶ nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
 - ▶ a lâmpada começa apagada
 - ▶ um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- ▶ **Objetivo:** descobrir se todos já foram interrogados.
- ▶ **Ruim:** se errar todos morrem!!! ☹

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- ▶ **Início:** Comunicado a todos os prisioneiros
 - ▶ 100 prisioneiros estão numa sala
 - ▶ eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
 - ▶ eles vão ser escolhidos aleatoriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
 - ▶ nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
 - ▶ a lâmpada começa apagada
 - ▶ um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- ▶ **Objetivo:** descobrir se todos já foram interrogados.
- ▶ **Ruim:** se errar todos morrem!!! ☹
- ▶ **Bom:** : se acertar, todos estão livres!!! 😊

Cem prisioneiros e uma Lâmpada

- ▶ **Início:** Comunicado a todos os prisioneiros
 - ▶ 100 prisioneiros estão numa sala
 - ▶ eles vão ser colocados numa cela sozinhos e sem comunicação
 - ▶ eles vão ser escolhidos aleatoriamente um de cada vez para uma sala de interrogatório
 - ▶ nesta sala tem um interruptor que acende ou apaga uma lâmpada
 - ▶ a lâmpada começa apagada
 - ▶ um prisioneiro pode ser interrogado mais de uma vez
- ▶ **Objetivo:** descobrir se todos já foram interrogados.
- ▶ **Ruim:** se errar todos morrem!!! ☹
- ▶ **Bom:** : se acertar, todos estão livres!!! ☺

- ▶ **Como bolar uma estratégia para libertar todos???**

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
 2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

⋮

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
 2. Alguém já sabe se tem lama na testa???
 - ⋮
 - k. Alguém já sabe se tem lama na testa???

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
 2. Alguém já sabe se tem lama na testa???
 - ⋮
 - k. Alguém já sabe se tem lama na testa???
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas?**

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**

Problema Crianças c / Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**
- ▶ Exemplos:
 - ▶ $n = 3$ e $k = 1$ serão **1** anúncios;
 - ▶ $n = 3$ e $k = 2$ serão **2** anúncio;

Problema Crianças c / Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**
- ▶ Exemplos:
 - ▶ $n = 3$ e $k = 1$ serão **1** anúncios;
 - ▶ $n = 3$ e $k = 2$ serão **2** anúncio;
- ▶ Serão necessários k anúncios!!!

Problema Crianças c / Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**
- ▶ Exemplos:
 - ▶ $n = 3$ e $k = 1$ serão **1** anúncios;
 - ▶ $n = 3$ e $k = 2$ serão **2** anúncio;
- ▶ Serão necessários k anúncios!!!
- ▶ **Por quê?**

Modelando Conhecimento

- ▶ **Agentes:** ana e beto

Modelando Conhecimento

- ▶ **Agentes:** ana e beto
- ▶ Carta contendo a informação:
 $p =$ "ana ganhou R\$ 1,00"
 $\neg p =$ "ana **não** ganhou R\$ 1,00"

Modelando Conhecimento

- ▶ **Agentes:** ana e beto
- ▶ Carta contendo a informação:
 $p = \text{"ana ganhou R\$ 1,00"}$
 $\neg p = \text{"ana não ganhou R\$ 1,00"}$
- ▶ envelope lacrado e sobre a mesa

Modelando Conhecimento

- ▶ **Agentes:** ana e beto
- ▶ Carta contendo a informação:
 $p = \text{"ana ganhou R\$ 1,00"}$
 $\neg p = \text{"ana não ganhou R\$ 1,00"}$
- ▶ envelope lacrado e sobre a mesa
- ▶ O que ana e beto sabem?

Modelando Conhecimento

- ▶ Dois estados possíveis para ana e beto

Modelando Conhecimento

- ▶ Dois estados possíveis para ana e beto
- ▶ $s_1 = \text{"ana ganhou R\$ 1,00"} \Rightarrow p$
- ▶ $s_2 = \text{"ana não ganhou R\$ 1,00"} \Rightarrow \neg p$

Modelando Conhecimento

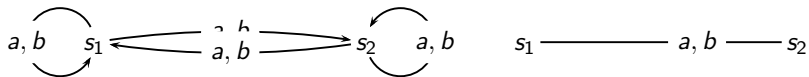
- ▶ Dois estados possíveis para ana e beto
- ▶ $s_1 = \text{"ana ganhou R\$ 1,00"} \Rightarrow p$
- ▶ $s_2 = \text{"ana não ganhou R\$ 1,00"} \Rightarrow \neg p$
- ▶ ana e beto não sabem se estão em s_1 ou s_2

$$\underline{s_1} - a, b - s_2$$

Modelando Conhecimento

$M = \langle S, \sim, V \rangle$:

- ▶ $S = \{s_1, s_2\}$
- ▶ $\sim_a = \{(s_1, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_1), (s_2, s_2)\}$
- ▶ $\sim_b = \{(s_1, s_2), (s_1, s_1), (s_2, s_1), (s_2, s_2)\}$
- ▶ $V(p) = \{s_1\}$



Lógica Epistêmica - Linguagem

- ▶ Alfabeto

- ▶ Φ conj. contável de símbolos prop.,
- ▶ \mathcal{A} conjunto finito de agentes,
- ▶ \neg e \wedge conectivos booleanos,
- ▶ K_a uma modalidade para cada agente a .

Lógica Epistêmica - Linguagem

- ▶ Alfabeto
 - ▶ Φ conj. contável de símbolos prop.,
 - ▶ \mathcal{A} conjunto finito de agentes,
 - ▶ \neg e \wedge conectivos booleanos,
 - ▶ K_a uma modalidade para cada agente a .
- ▶ **Linguagem**

$$\varphi ::= p \mid \top \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid K_a\varphi$$

onde $p \in \Phi$, $a \in \mathcal{A}$.

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ————— a, b ————— s_2

- ▶ Ana não sabe $p \Rightarrow \neg K_a p$

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ————— a, b ————— s_2

- ▶ Ana não sabe $p \Rightarrow \neg K_a p$
- ▶ Ana sabe que Beto não sabe $p \Rightarrow K_a \neg K_b p$

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ————— a, b ————— s_2

- ▶ Ana não sabe $p \Rightarrow \neg K_a p$
- ▶ Ana sabe que Beto não sabe $p \Rightarrow K_a \neg K_b p$
- ▶ Beto sabe que Ana sabe que Beto não sabe $p \Rightarrow K_b K_a \neg K_b p$

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ————— a, b ————— s_2

- ▶ Ana não sabe $p \Rightarrow \neg K_a p$
- ▶ Ana sabe que Beto não sabe $p \Rightarrow K_a \neg K_b p$
- ▶ Beto sabe que Ana sabe que Beto não sabe $p \Rightarrow K_b K_a \neg K_b p$
- ▶ **Por que as proposições são verdadeiras na Estrutura?**

Modelando Conhecimento

s_1 ————— a, b ————— s_2

- ▶ Por que Ana não sabe p em s_1 ? $\Rightarrow s_1 \models \neg K_a p$?

"Ana **não distingue** s_1 de s_2 , e $s_1 \models p$ e $s_2 \models \neg p$ "

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ————— a, b ————— s_2

- ▶ Por que Ana não sabe p em s_1 ? $\Rightarrow s_1 \models \neg K_a p$?

"Ana **não distingue** s_1 de s_2 , e $s_1 \models p$ e $s_2 \models \neg p$ "

- ▶ Por que Ana sabe $(p \vee \neg p)$ em s_1 ? $\Rightarrow s_1 \models K_a(p \vee \neg p)$?

"Ana **não distingue** s_1 de s_2 , e $s_1 \models (p \vee \neg p)$ e $s_2 \models (p \vee \neg p)$ "

Modelando Conhecimento

$\underline{s_1}$ ————— a, b ————— s_2

- ▶ Por que Ana não sabe p em s_1 ? $\Rightarrow s_1 \models \neg K_a p$?

"Ana **não distingue** s_1 de s_2 , e $s_1 \models p$ e $s_2 \models \neg p$ "

- ▶ Por que Ana sabe $(p \vee \neg p)$ em s_1 ? $\Rightarrow s_1 \models K_a(p \vee \neg p)$?

"Ana **não distingue** s_1 de s_2 , e $s_1 \models (p \vee \neg p)$ e $s_2 \models (p \vee \neg p)$ "

- ▶ "Ana sabe uma proposição φ em um estado s_1 ($s_1 \models K_a \varphi$), se em todos os estados que ela **não distingue** de s_1 φ é verdadeira."

Semântica

- ▶ Um *frame* é um par $F = (W, \sim_a)$ onde
 - ▶ W é um conjunto não-vazio de *estados*;
 - ▶ \sim_a é uma relação binária sobre W , para cada agente a
 - ▶ Reflexiva
 - ▶ Transitiva
 - ▶ Simétrica

Semântica

- ▶ Um *frame* é um par $F = (W, \sim_a)$ onde
 - ▶ W é um conjunto não-vazio de *estados*;
 - ▶ \sim_a é uma relação binária sobre W , para cada agente a
 - ▶ Reflexiva
 - ▶ Transitiva
 - ▶ Simétrica
- ▶ Um *modelo* é um par $M = (F, V)$ onde
 - ▶ $F = (W, R)$ é um *frame* e
 - ▶ V é uma função de Φ no conjunto das partes de W , que faz corresponder a todo símbolo proposicional $p \in \Phi$ o conjunto de estados nos quais p é satisfeito, i.e., $V : \Phi \mapsto Pow(W)$.

Semântica

- ▶ Dada uma estrutura $\mathcal{M} = \langle S, \sim_a, V \rangle$

$$\mathcal{M}, s \models p \quad \text{iff} \quad s \in V(p)$$

$$\mathcal{M}, s \models \neg\varphi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}, s \not\models \varphi$$

$$\mathcal{M}, s \models \varphi \wedge \psi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}, s \models \varphi \text{ e } \mathcal{M}, s \models \psi$$

$$\mathcal{M}, s \models K_a\varphi \quad \text{iff} \quad p/ \text{ todo } t \in S : s \sim_a t \text{ implica } \mathcal{M}, t \models \varphi$$

Jogo de Cartas

- ▶ 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,

Jogo de Cartas

- ▶ 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,
- ▶ 3 Jogadores **ana**, **bet**o and **carla**,

Jogo de Cartas

- ▶ 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,
- ▶ 3 Jogadores **ana**, **beto** and **carla**,
- ▶ Cada jog. recebe 1 carta e **não** sabe as cartas dos outros

Jogo de Cartas

- ▶ 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,
- ▶ 3 Jogadores **ana**, **bet**o and **carla**,
- ▶ Cada jog. recebe 1 carta e **n**ão sabe as cartas dos outros
- ▶ $0_x, 1_x, 2_x, x \in \{a, b, c\}$ para: “jogador x tem carta **0**, **1** or **2**.”

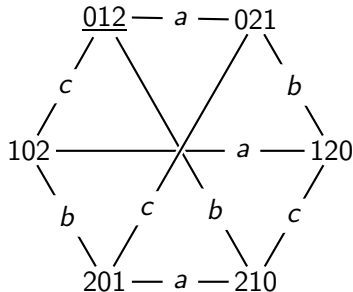
Jogo de Cartas

- ▶ 3 Cartas: **0**, **1** and **2**,
- ▶ 3 Jogadores **ana**, **bet**o and **carla**,
- ▶ Cada jog. recebe 1 carta e **não** sabe as cartas dos outros
- ▶ $0_x, 1_x, 2_x, x \in \{a, b, c\}$ para: “jogador x tem carta **0**, **1** or **2**.”
- ▶ Estados: 012 é o estado onde **a** tem **0**, **b** tem **1** e **c** tem **2**

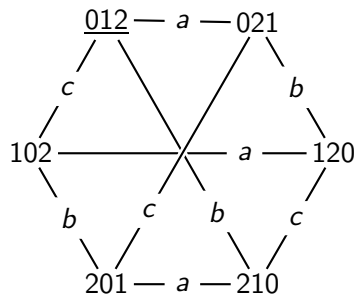
Jogo de Cartas

$Hexa1 = \langle S, \sim, V \rangle$:

- ▶ $S = \{012, 021, 102, 120, 201, 210\}$
- ▶ $\sim_a = \{(012, 012), (012, 021), (021, 021), \dots\}$
- ▶ $V(0_a) = \{012, 021\}$, $V(1_a) = \{102, 120\}$, ...



Jogo de Cartas



$$012 \models K_a(1_b \vee 2_b)$$

Jogo de Cartas - Exercícios

1. $012 \models K_a(K_c1_c \vee K_c2_c)$
2. $012 \models B_c(1_b \wedge K_a2_a)$
3. $012 \models \neg K_a(K_c1_c \wedge K_b2_b)$
4. $012 \models K_a(0_a \wedge K_b(1_b \wedge K_c1_c))$

Axiomatização

► Axiomas

1. Todas as instâncias das tautologias proposicionais,
2. $K_a(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_a\varphi \rightarrow K_a\psi)$,
3. $K_a\varphi \rightarrow \varphi$,
4. $K_a\varphi \rightarrow K_aK_a\varphi$ (+ *introspection*),
5. $\neg K_a\varphi \rightarrow K_a\neg K_a\varphi$ (- *introspection*),

Axiomatização

► Axiomas

1. Todas as instâncias das tautologias proposicionais,
2. $K_a(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_a\varphi \rightarrow K_a\psi)$,
3. $K_a\varphi \rightarrow \varphi$,
4. $K_a\varphi \rightarrow K_aK_a\varphi$ (+ introspection),
5. $\neg K_a\varphi \rightarrow K_a\neg K_a\varphi$ (- introspection),

► Regras de inferência

M.P. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$ U.G. $\varphi / K_a\varphi$ UB. $\varphi / \sigma\varphi$

onde σ é um mapa substituindo uniformemente fórmulas para variáveis proposicionais.

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- ▶ Ações que mudam o estado epistêmico do Agente

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- ▶ Ações que mudam o estado epistêmico do Agente
 - ▶ Ações Públicas
 - ”Todos os agentes percebem (sabem) o conteúdo”
 - Ex. Broadcast de uma mensagem

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- ▶ Ações que mudam o estado epistêmico do Agente
 - ▶ Ações Públicas
 - ”Todos os agentes percebem (sabem) o conteúdo”
Ex. Broadcast de uma mensagem
 - ▶ Ações Privadas
 - ”Todos os agentes num **grupo** percebem (sabem) o conteúdo”
Ex. mensagem de um agente para outro,

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

- ▶ Ações Públicas

"Public Annoucement Logic"

Lógicas Epistêmicas Dinâmicas

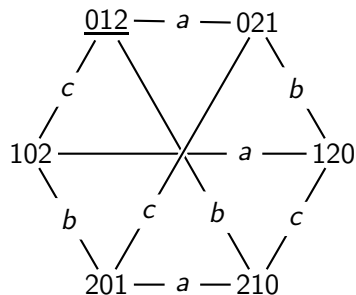
- ▶ Ações Públicas

” **Public Annoucement Logic** ”

- ▶ Ações Privadas

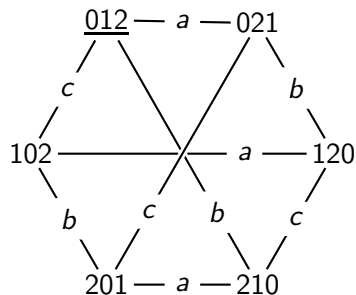
” **Action Model Logic** ”

Public Announcement Logic



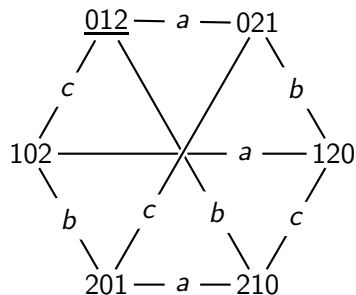
- ▶ Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**

Public Announcement Logic



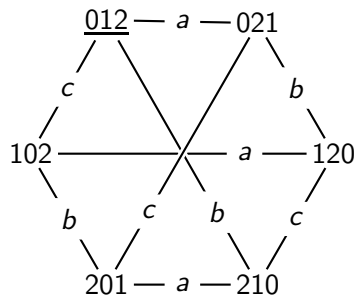
- ▶ Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**
- ▶ Após anúncio Carla sabe Beto tem carta **1**

Public Announcement Logic



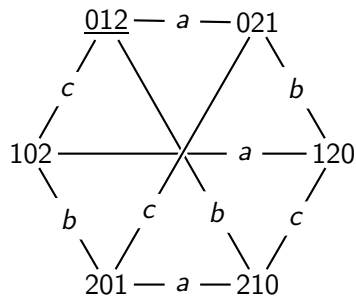
- ▶ Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**
- ▶ Após anúncio Carla sabe Beto tem carta **1**
- ▶ Após anúncio Carla sabe Ana tem carta **0**

Public Announcement Logic



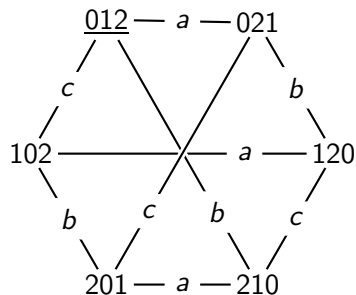
- ▶ Ana anuncia Publicamente que não tem carta **1**
- ▶ Após anúncio Carla sabe Beto tem carta **1**
- ▶ Após anúncio Carla sabe Ana tem carta **0**
- ▶ Após anúncio Beto não sabe a carta de Ana

Public Announcement Logic



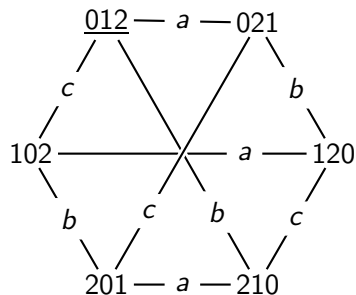
- ▶ Após anúncio Carla sabe Beto tem carta **1**
 $[\neg 1_a]K_c 1_b$

Public Announcement Logic



- ▶ Após anúncio Carla sabe Beto tem carta **1**
 $[\neg 1_a]K_c 1_b$
- ▶ Após anúncio Carla sabe Ana tem carta **0**
 $[\neg 1_a]K_c 0_a$

Public Announcement Logic



- ▶ Após anúncio Carla sabe Beto tem carta **1**
 $[\neg 1_a]K_c 1_b$
- ▶ Após anúncio Carla sabe Ana tem carta **0**
 $[\neg 1_a]K_c 0_a$
- ▶ Após anúncio Beto não sabe a carta de Ana
 $[\neg 1_a]\neg(K_b 0_a \vee K_b 1_a \vee K_b 2_a)$

Public Announcement Logic: Linguagem

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid [\varphi]\psi$$

Significado: $[\varphi]\psi \Rightarrow$ “depois do anúncio de φ , ψ é verdadeiro.”

Exemplo: $[\neg 1_a]K_c 1_b \Rightarrow$ Após anúncio que Ana não tem a carta **1**, Carla sabe Beto tem carta **1**

Public Announcement Logic: Semântica

- ▶ O efeito de anunciar φ publicamente é um **restrição** no modelo para conter somente estados onde φ 'verdadeiro.

Public Announcement Logic: Semântica

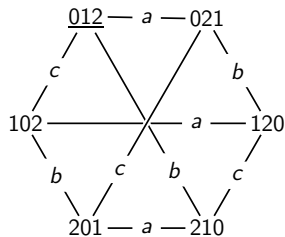
- ▶ O efeito de anunciar φ publicamente é um **restrição** no modelo para conter somente estados onde φ 'verdadeiro.
- ▶ Anúncios são públicos e verdadeiros.

$$M, s \models [\varphi]\psi \text{ iff } (M, s \models \varphi \text{ implica } M|\varphi, s \models \psi)$$

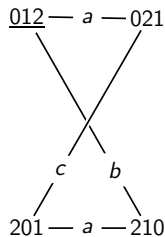
$$M|\varphi := \langle S', \sim', V' \rangle:$$

$$\begin{aligned} S' &:= \llbracket \varphi \rrbracket_M & := \{s \in S \mid M, s \models \varphi\} \\ \sim'_a &:= \sim_a \cap (\llbracket \varphi \rrbracket_M \times \llbracket \varphi \rrbracket_M) \\ V'(p) &:= V(p) \cap \llbracket \varphi \rrbracket_M \end{aligned}$$

Exemplo Anúncio



\Rightarrow



$Hexa, 012 \models [\neg 1_a]K_c 0_a$

\Leftrightarrow

$Hexa, 012 \models \neg 1_a$ and $Hexa \upharpoonright \neg 1_a, 012 \models K_c 0_a$

\Leftarrow

$Hexa, 012 \models \neg 1_a$ and $(Hexa \upharpoonright \neg 1_a, 012 \models 0_a$ and $\sim_c(012) = \{012\})$

\Leftarrow

$012 \neq V(1_a)$ and $012 \in V'(0_a)$

Jogo de Cartas - PAL - Exercícios

Represente (como uma fórmula em PAL) e verifique, formalmente (\models), se algum jogador já sabe a sua carta para os seguintes anúncios:

1. Ana anuncia que ou tem a carta 1 ou a carta 2.
2. Ana anuncia que acredita que a carta de Beto é a 2.
3. Beto anuncia que se ele tem a carta 1 a Ana tem a 0.

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
 2. Alguém já sabe se tem lama na testa???

⋮

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
 2. Alguém já sabe se tem lama na testa???
 - ⋮
 - k. Alguém já sabe se tem lama na testa???

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças brincando na lama;
- ▶ Pai chega e vê que algumas possuem lama na testa;
- ▶ Crianças podem ver a lama na testas das outras mas não na própria testa;
- ▶ Pai Anuncia:
 1. Tem pelo menos uma criança c. lama!!!
 2. Alguém já sabe se tem lama na testa???
 - ⋮
 - k. Alguém já sabe se tem lama na testa???
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas?**

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;

Problema Crianças c/ Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**

Problema Crianças c / Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**
- ▶ Exemplos:
 - ▶ $n = 3$ e $k = 1$ serão **1** anúncios;
 - ▶ $n = 3$ e $k = 2$ serão **2** anúncio;

Problema Crianças c / Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**
- ▶ Exemplos:
 - ▶ $n = 3$ e $k = 1$ serão **1** anúncios;
 - ▶ $n = 3$ e $k = 2$ serão **2** anúncio;
- ▶ Serão necessários k anúncios!!!

Problema Crianças c / Lama na testa

- ▶ Grupo de crianças n brincando na lama;
- ▶ Tem k com lama na testa;
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c . lama saibam que estão sujas?**
- ▶ Exemplos:
 - ▶ $n = 3$ e $k = 1$ serão **1** anúncios;
 - ▶ $n = 3$ e $k = 2$ serão **2** anúncio;
- ▶ Serão necessários k anúncios!!!
- ▶ **Por quê?**

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ Grupo de crianças **3**: **ana**, **bet**o, **carla**;

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ Grupo de crianças **3**: **ana**, **bet**o, **carla**;
- ▶ Representação Array : $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$;
010 \Rightarrow ana e carla limpas e beto com lama
101 \Rightarrow ana e carla com lama e beto limpo

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ Grupo de crianças **3**: **ana**, **bet**o, **carla**;
- ▶ Representação Array : $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$;
 - 010** \Rightarrow ana e carla limpas e beto com lama
 - 101** \Rightarrow ana e carla com lama e beto limpo
- ▶ Tem **2** com lama na testa: ana e beto \Rightarrow Estado real **110**

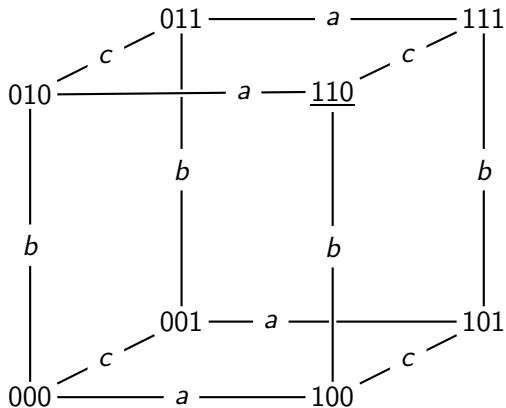
Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ Grupo de crianças **3**: **ana**, **bet**, **carla**;
- ▶ Representação Array : $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$;
 - 010** \Rightarrow ana e carla limpas e beto com lama
 - 101** \Rightarrow ana e carla com lama e beto limpo
- ▶ Tem **2** com lama na testa: ana e beto \Rightarrow Estado real **110**
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas?**

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

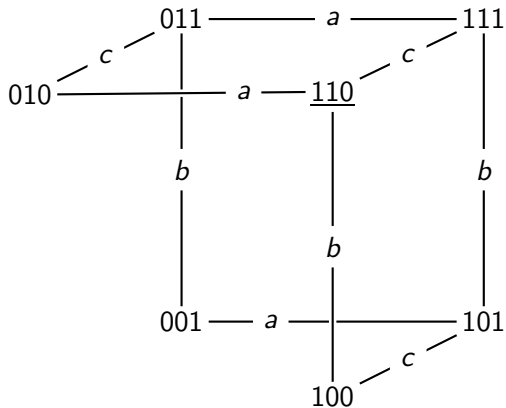
- ▶ Grupo de crianças **3**: **ana**, **bet**, **carla**;
- ▶ Representação Array : $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$;
 - 010** \Rightarrow ana e carla limpas e beto com lama
 - 101** \Rightarrow ana e carla com lama e beto limpo
- ▶ Tem **2** com lama na testa: ana e beto \Rightarrow Estado real **110**
- ▶ **Quantos anúncios serão feitos até que crianças c. lama saibam que estão sujas?**
- ▶ **2** anúncios

Problema Crianças c/ Lama na testa



Representação

Problema Crianças c/ Lama na testa



Anúncio: tem pelo menos uma *c*. lama.

Problema Crianças c/ Lama na testa

110

Anúncio: Alguém já sabe se tem lama na testa?

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?
- ▶ Anúncio + Silêncio

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?
- ▶ Anúncio + Silêncio
- ▶ Primeiro Anúncio:

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?
- ▶ Anúncio + Silêncio
- ▶ Primeiro Anúncio:
 - ▶ $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?
- ▶ Anúncio + Silêncio
- ▶ Primeiro Anúncio:
 - ▶ $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$
- ▶ Segundo Anúncio:

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?
- ▶ Anúncio + Silêncio
- ▶ Primeiro Anúncio:
 - ▶ $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$
- ▶ Segundo Anúncio:
 - ▶ $[\neg K_a 1_a \wedge \neg K_b 1_b \wedge \neg K_c 1_c]$

Problema Crianças c/ Lama na testa: Exemplo

- ▶ O que está sendo anunciado?
- ▶ Anúncio + Silêncio
- ▶ Primeiro Anúncio:
 - ▶ $[\neg(0_a \wedge 0_b \wedge 0_c)]$
- ▶ Segundo Anúncio:
 - ▶ $[\neg K_a 1_a \wedge \neg K_b 1_b \wedge \neg K_c 1_c]$
- ▶ Exercício: descreva os anúncios para $n = 5$ e $k = 3$

Axiomatização

$$[\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$$

$$[\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\varphi]\psi)$$

$$[\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\varphi]\psi \wedge [\varphi]\chi)$$

$$[\varphi]K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_a[\varphi]\psi)$$

$$[\varphi][\psi]\chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi]\psi]\chi$$

From φ , infer $[\psi]\varphi$

From $\chi \rightarrow [\varphi]\psi$ and $\chi \wedge \varphi \rightarrow E_B\chi$, infer $\chi \rightarrow [\varphi]C_B\psi$

Expressividade (Plaza, Gerbrandy):

Today fórmula da linguagem de PAL, **sem conhecimento comum**, é equivalente a uma fórmula na linguagem da lógica epistêmica.

Action Models

- ▶ Modelar Ações entre Agentes.

Action Models

- ▶ Modelar Ações entre Agentes.
- ▶ Ações Privadas

Action Models

- ▶ Modelar Ações entre Agentes.
- ▶ Ações Privadas
- ▶ Porém todos sabem que elas ocorreram

Action Models

- ▶ Modelar Ações entre Agentes.
- ▶ Ações Privadas
- ▶ Porém todos sabem que elas ocorreram
- ▶ Embora só alguns distingam seu conteúdo.
- ▶ **Exemplos:**

Action Models

- ▶ Modelar Ações entre Agentes.
- ▶ Ações Privadas
- ▶ Porém todos sabem que elas ocorreram
- ▶ Embora só alguns distingam seu conteúdo.
- ▶ **Exemplos:**

Action Models

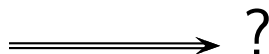
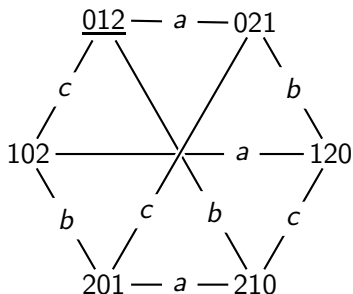
- ▶ Modelar Ações entre Agentes.
- ▶ Ações Privadas
- ▶ Porém todos sabem que elas ocorreram
- ▶ Embora só alguns distingam seu conteúdo.
- ▶ **Exemplos:**
 - ▶ Um jogador mostrar suas cartas para outro;

Action Models

- ▶ Modelar Ações entre Agentes.
- ▶ Ações Privadas
- ▶ Porém todos sabem que elas ocorreram
- ▶ Embora só alguns distingam seu conteúdo.
- ▶ **Exemplos:**
 - ▶ Um jogador mostrar suas cartas para outro;
 - ▶ Um jogador sussurrar um informação para outro;

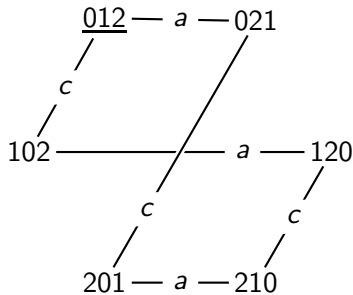
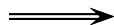
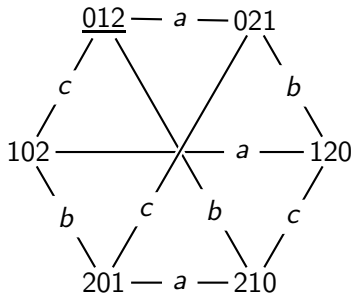
Exemplo: Jogo das 3 Cartas

- ▶ ana \Rightarrow 0, beto \Rightarrow 1 e carla \Rightarrow 2
- ▶ ana mostra sua carta para beto
- ▶ carla não vê a carta de ana



Exemplo: Jogo das 3 Cartas

- ▶ ana \Rightarrow 0, beto \Rightarrow 1 e carla \Rightarrow 2
- ▶ ana mostra sua carta para beto
- ▶ carla não vê a carta de ana



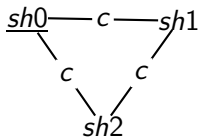
Modelos de Ação

Um modelo de ação M é uma estrutura $\langle S, \sim_a, \text{pre} \rangle$

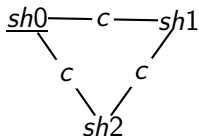
- ▶ S é um domínio *finito* de ações ou eventos
- ▶ \sim_a é uma relação de equivalência entre S
- ▶ $\text{pre} : S \mapsto \mathcal{L}$ é uma função de pré-condição que atribui uma pré-condição para cada $s \in S$.

Exemplo Cartas

- ▶ gente **a** deseja mostrar a sua carta para o agente **b**.
- ▶ 3 ações, **a** mostra **0**, **1** or **2**.
- ▶ **a** e **b** distinguem as 3 ações mas **c** não.



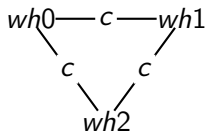
Exemplo Cartas



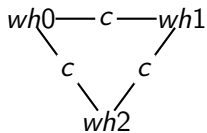
- ▶ $S = \{sh0, sh1, sh2\}$
- ▶ $\sim_a = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- ▶ $\sim_b = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- ▶ $\sim_c = S \times S$
- ▶ $pre(sh0) = 0_a$
- ▶ $pre(sh1) = 1_a$
- ▶ $pre(sh2) = 2_a$

Exemplo Cartas

- ▶ **a** sussura $p/$ **b** que não tem a carta **0**.
- ▶ 3 ações, **a** sussurra que não tem **0**, **1** or **2**.
- ▶ **a** e **b** distinguem as 3 ações mas **c** não.



Exemplo Cartas



- ▶ $S = \{wh0, wh1, wh2\}$
- ▶ $\sim_1 = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- ▶ $\sim_2 = \{(s, s) \mid s \in S\}$
- ▶ $\sim_3 = S \times S$
- ▶ $\text{pre}(wh0) = \neg 0_a$
- ▶ $\text{pre}(wh1) = \neg 1_a$
- ▶ $\text{pre}(wh2) = \neg 2_a$

Ações

- ▶ se distinguimos duas ações, então distinguimos os estados resultantes da execução das mesmas

Ações

- ▶ se distinguimos duas ações, então distinguimos os estados resultantes da execução das mesmas
- ▶ estados que distinguimos antes da execução de uma ação continuamos a distinguir após a execução;

Ações

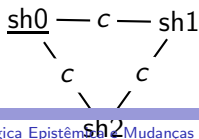
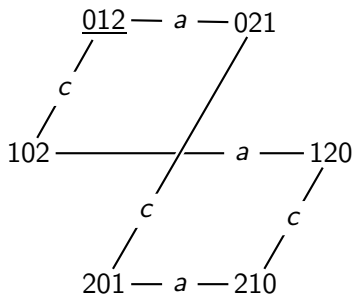
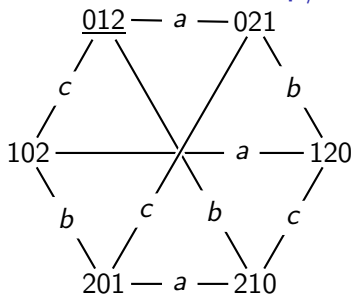
- ▶ se distinguimos duas ações, então distinguimos os estados resultantes da execução das mesmas
- ▶ estados que distinguimos antes da execução de uma ação continuamos a distinguir após a execução;
- ▶ ações só podem ser executadas em estados onde as suas pré-condições são satisfeitas.

Produto

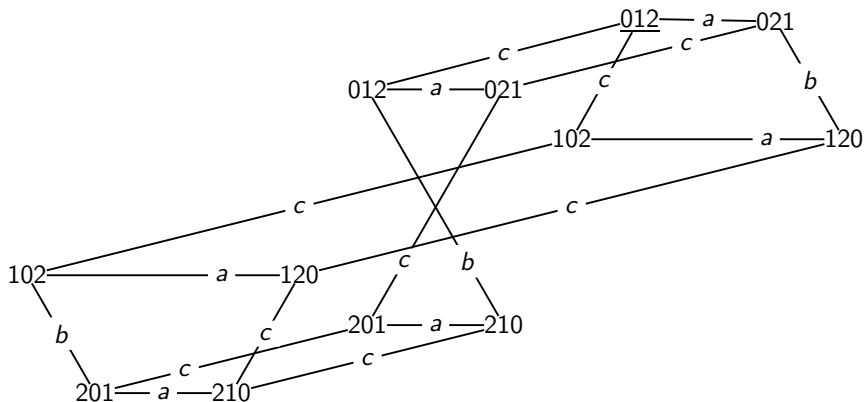
Dado um estado epistêmico (\mathcal{M}, s) com $\mathcal{M} = \langle S, \sim_a, V \rangle$ e um modelo de ação (M, s) com $M = \langle S, \sim, \text{pre} \rangle$. O resultado da execução (M, s) em (\mathcal{M}, s) é $(\mathcal{M} \otimes M, (s, s))$ onde $\mathcal{M} \otimes M = \langle S', \sim', V' \rangle$ de tal forma que:

1. $S' = \{(s, s) \text{ de tal forma que } s \in S, s \in S, \text{ e } \mathcal{M}, s \models \text{pre}(s)\}$
2. $(s, s) \sim'_a (t, t)$ sse $(s \sim_a t \text{ e } s \sim_a t)$
3. $(s, s) \in V'(p)$ sse $s \in V(p)$

Ana mostra carta 0 p/ Beto



Ana sussrra p/ Beto 'não 0'



Linguagem

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid C_B\varphi \mid [M,s]\varphi$$

Semântica

$M, s \models p$:iff	$s \in V(p)$
$M, s \models \neg\varphi$:iff	$M, s \not\models \varphi$
$M, s \models \varphi \wedge \psi$:iff	$M, s \models \varphi$ and $M, s \models \psi$
$M, s \models K_a\varphi$:iff	para todo $s' \in S : s \sim_a s'$ implica $M, s' \models \varphi$
$M, s \models [M, s]\varphi$:iff	$M, s \models \text{pre}(s)$ implica $M \otimes M, (s, s) \models \varphi$

Semântica

- ▶ Mistura Sintaxe com Semântica?

SIM e NÃO

Axiomatização

$$[M, s]p \leftrightarrow (\text{pre}(s) \rightarrow p)$$

$$[M, s]\neg\varphi \leftrightarrow (\text{pre}(s) \rightarrow \neg[M, s]\varphi)$$

$$[M, s](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ([M, s]\varphi \wedge [M, s]\psi)$$

$$[M, s]K_a\varphi \leftrightarrow (\text{pre}(s) \rightarrow \bigwedge_{s \sim_a t} K_a[M, t]\varphi)$$

$$[M, s][M', s']\varphi \leftrightarrow [(M, s); (M', s')]\varphi$$

De φ , infira $[M, s]\varphi$

Toda fórmula da linguagem de Lógica de Modelos de Ação, sem conhecimento comum, é equivalente a uma fórmula na linguagem da Lógica Epistêmica.

Conclusões

- ▶ Desenvolver Linguagens e Algoritmos para Representar e Inferir sobre estas estruturas
- ▶ Sistemas Assíncronos e Distribuídos
- ▶ Probabilísticos
- ▶ Temporais