



Lógica Fuzzy

Introdução, motivação e conjuntos fuzzy

Professor: Mário Benevides

Monitores: Bianca Munaro

Diogo Borges

Jonas Arêas

Renan Iglesias

Vanius Farias



Introdução

"A lógica difusa tem por objetivo modelar modos de raciocínio aproximados ao invés de precisos."



Princípios

- Na lógica binária (clássica) as proposições são unicamente "Verdadeiras" ou "Falsas".
- Na lógica difusa as proposições podem ter valores intermediários entre "Verdadeiro" e "Falso". A veracidade destas é uma função que pode assumir qualquer valor entre 0 (absolutamente falso) e 1 (absolutamente verdadeiro).
- As sentenças passam a ter um grau de pertinência.



Princípios

- Muitas vezes utiliza-se uma discretização dos valores possíveis para um domínio \Rightarrow lógica de múltiplos-valores.
- Exemplo: $\{0, 0,5, 1\}$ para valores que indiquem "Falso", "Talvez verdadeiro" e "Verdadeiro", respectivamente.
- A lógica difusa então visa modelar modos de raciocínio imprecisos, tendo os casos precisos como situações limite.



Clássica X Difusa

- Clássica
 - Falso x Verdadeiro (0 ou 1);
- Difusa
 - Intervalo [0..1]



Clássica X Difusa

- Clássica
 - Predicados exigem definição exata
 - Não existe resposta diferente de verdadeiro ou falso.
 - é homem, é mortal, é par ...
- Difusa
 - Predicados não possuem definição exata
 - Respostas são relativas; Possuem um grau de veracidade que variam entre “totalmente falso” e “totalmente verdadeiro”:
 - é alto, está cansado, é jovem ...



Clássica X Difusa

- Clássica
 - Quantificadores: Para todo, Existe
- Difusa
 - Quantificadores: Muitos, Poucos, A maioria, Ocasionalmente...
 - Também possuem interpretação matemática sólida.

Clássica X Difusa

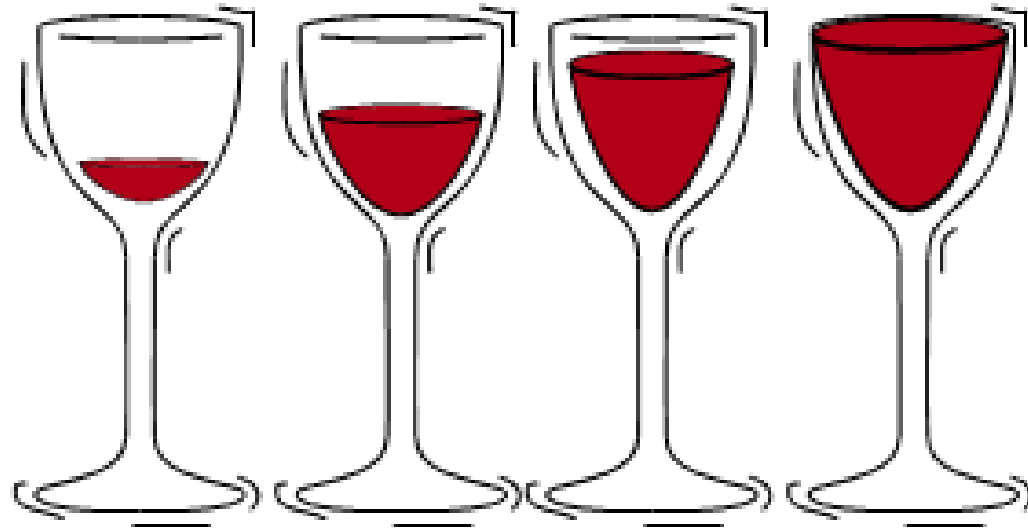




Motivação

"Tão próximas as leis da matemática estejam da realidade, menos próximas da certeza elas estarão. E tão próximas elas estejam da certeza, menos elas se referirão à realidade"
(Albert Einstein)

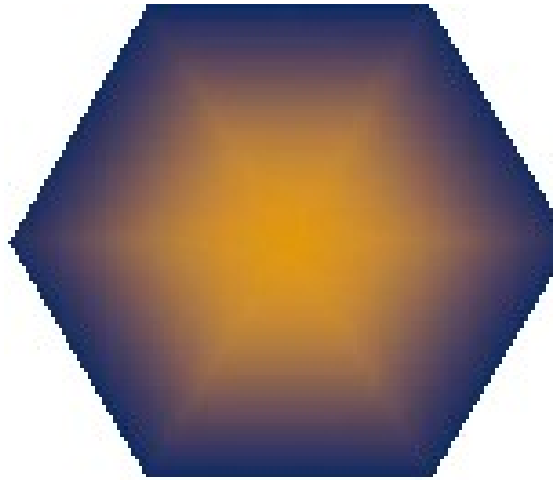
Os copos estão cheios ou vazios ?



Qual seria a resposta mais apropriada ?

Repostas Apropriadas

- O hexágono é parcialmente azul, ou o hexágono é parcialmente amarelo.
- O hexágono é quase azul, ou quase amarelo.
- O hexágono é 55% azul, ou o hexágono é 45% amarelo.



O conceito de Charles Sanders Peirce (cerca de 1870)

"As pessoas funcionam de modo
"vago", ao invés de no modo "verdadeiro-
falso"





Conjuntos Fuzzy

- No mundo real os problemas muitas vezes não conseguem ser representados pela lógica clássica.
- Conjuntos convencionais têm apenas os critérios de pertinência “pertence” ou “não pertence”, e “está contido” ou “não está contido”, ou seja, um elemento não pode pertencer parcialmente a um conjunto, da mesma forma que um conjunto não pode estar parcialmente contido em outro.



Conjuntos Fuzzy

- Um exemplo é o conjunto das pessoas jovens:
- Um bebê certamente pertence a esse conjunto e um idoso de 100 anos não.
- Mas o que podemos dizer sobre as pessoas com 20, 30 e 40 anos?



Conjuntos Fuzzy

- Grau de pertinência:

Cada elemento do conjunto difuso tem um grau de pertinência no intervalo $[0, 1]$, dessa forma permitindo uma transição gradual da falsidade para a verdade.

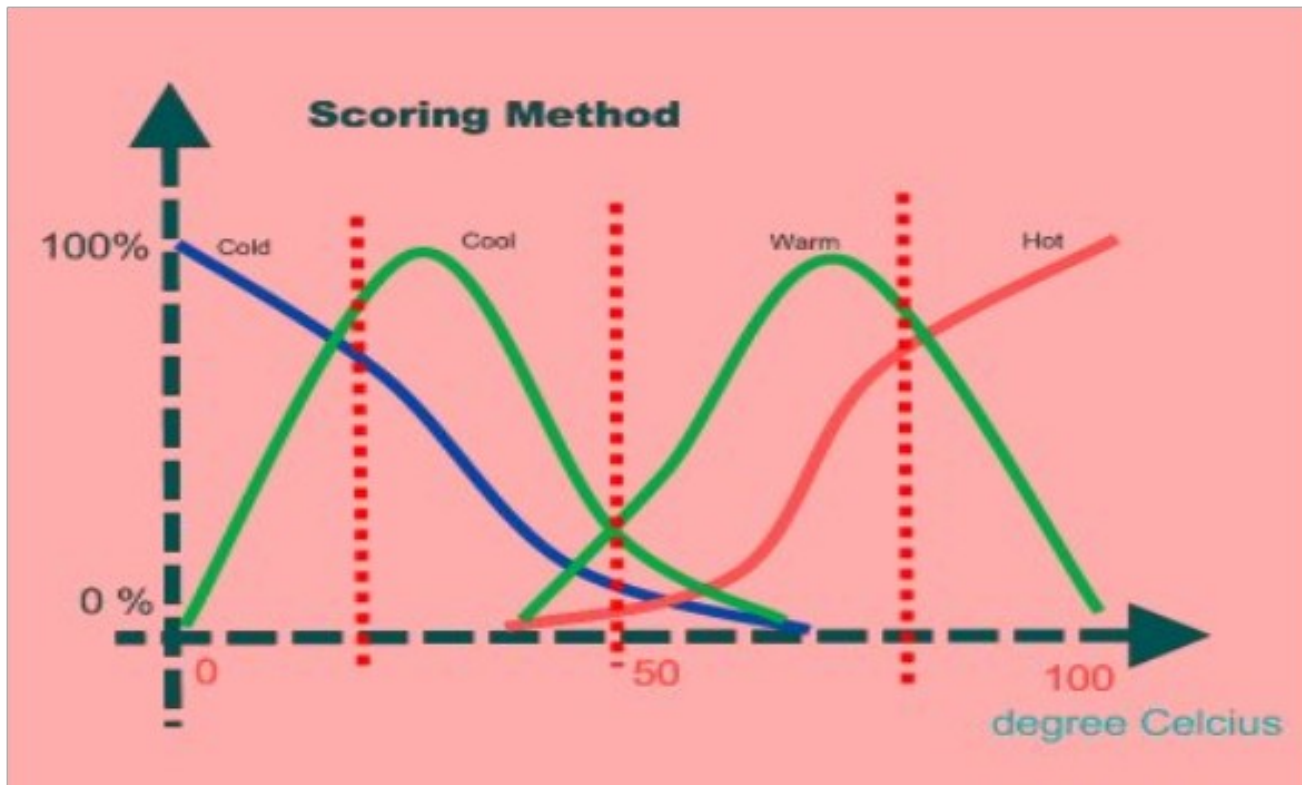


Conjuntos Fuzzy

- Não existe uma base formal para determinar o grau de pertinência. Este é escolhido experimentalmente / empiricamente.
- O grau de pertinência nos permite representar valores imprecisos como quente e frio.

Conjuntos Fuzzy

- No eixo x representamos a temperatura da água e no y seu grau de pertinência.





Conjuntos Fuzzy

- Grau de pertinência X probabilidade
 - O grau de pertinência fuzzy difere da noção estatística de probabilidade. Isto pode ser ilustrado no exemplo abaixo:
 - "José comeu X ovos no café da manhã."
 - $X \in U = \{1, 2, \dots, 8\}$.



Conjuntos Fuzzy

- o Noção estatística: Distribuição de probabilidades e em um espaço de 100 dias:

$$U = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8]$$

$$e = [0.1 \quad 0.8 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = 1$$

- o Noção de crença: Conjunto fuzzy que expressa o grau de possibilidade neste mesmo tempo:

$$U = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8]$$

$$c\Pi = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 0.4 \quad 0.2] \langle \rangle 1$$



Conjuntos Fuzzy

- o Vemos, por exemplo, que a possibilidade para $X = 3$ é igual a 1, enquanto a probabilidade é apenas 0.1.
- o O exemplo mostra que um evento possível não implica que ele é provável. Por outro lado, se um evento é provável, ele deve ser possível.



Conjuntos Fuzzy

- Universo:
 - O universo contém os elementos que podem ser considerados no conjunto
 - Seu objetivo é não permitir o uso de dados incorretos ou incoerentes.
 - Por exemplo o universo de um conjunto que mede sabor poderia ser o conjunto de noções psicológicas {doce, amargo etc. }



Conjuntos Fuzzy

- Representação:
- Um conjunto fuzzy A é uma coleção de pares:
$$A = \{(x, \mu(x))\}$$
- Onde $\mu(x)$ é o grau de pertinência do elemento x .



Conjuntos Fuzzy

- Exemplo: um conjunto fuzzy representando o conceito “céu ensolarado” poderia associar:
- Pertinência 1,0 a uma cobertura de nuvens de 0%
- Pertinência 0,8 a uma cobertura de nuvens de 20%
- Pertinência 0,4 a uma cobertura de 30%
- Pertinência 0,0 a uma cobertura de 75% ou mais

Conjunto : $\{ (0 , 1.0), (20 , 0.8), (30 , 0.4), (75 , 0.0) \}$

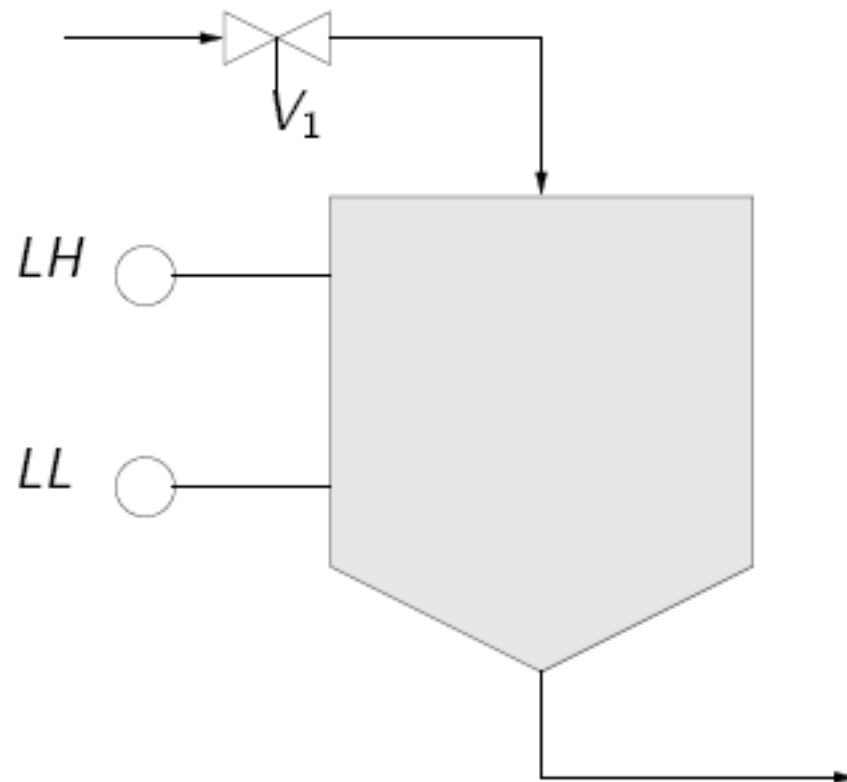


Conjuntos Fuzzy

- Terminologia:
 - Uma “variável linguística” é aquela que tem como valores palavras ou sentenças.
 - O conjunto de valores que ela pode assumir é chamado “conjunto de termos”
 - Cada valor no conjunto de termos é uma "variável fuzzy" definida sobre a "variável base".
 - A “variável base” define o universo para todas as variáveis fuzzy no conjunto de termos.

Conjuntos Fuzzy

- Exemplo do tanque:





Conjuntos Fuzzy

- Exemplo do tanque:

- Na premissa:

Se o nível é baixo, ...

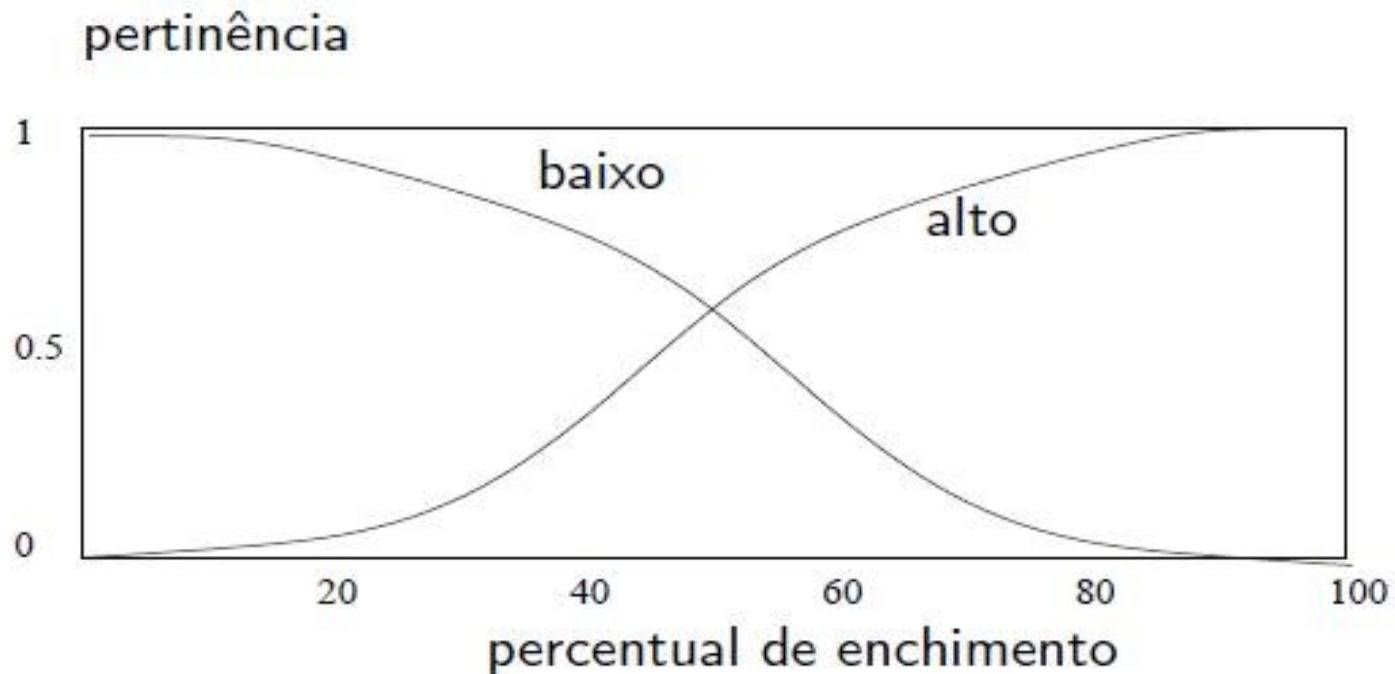
- “baixo” é uma variável fuzzy, ou seja, um valor da variável linguística “nível”.



Conjuntos Fuzzy

- o A “variável base” está definida sobre um universo, que é a faixa de valores esperados para “nível”, ou seja, o intervalo $[0, 100]$ com percentuais de tanque cheio.
- o As medidas de “nível” são escalares, e a declaração “nível é baixo” corresponde ao valor de pertinência “nível(i)” à variável “baixo”, onde i é o percentual de tanque cheio.
- o A saída é um número $\mu \in [0, 1]$ que diz quão bem a premissa “nível é baixo” é satisfeita.

Conjuntos Fuzzy



- Figura: Termos {baixo,alto} para o problema do tanque.
- Exemplo: Aproximadamente para $i < 10\%$ a premissa “nível é baixo” é totalmente verdadeira ($\mu = 1$).



Operações em Conjuntos Fuzzy

- Operações difusas:
 - Intersecção: $u(A \cap B) = \min (u(A), u(B))$
 - União: $u(A \cup B) = \max (u(A), u(B))$
 - Complemento: $u(A') = 1 - u(A)$



Operações em Conjuntos Fuzzy

- Exemplo (comprando uma casa)
 - Uma família com quatro integrantes deseja comprar uma casa.
 - Uma indicação de conforto se refere ao número de dormitórios.
 - Eles também desejam comprar uma casa grande.
 - Seja $u = (1, 2, \dots, 10)$ o conjunto de casas descritas pelo número de quartos de dormir (ou seja, a casa i tem possui i dormitórios).

Operações em Conjuntos Fuzzy



- o O conjunto fuzzy c que caracteriza conforto pode ser descrito como:

$$c = [0.2 \ 0.5 \ 0.8 \ 1 \ 0.7 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

- o Seja i o conjunto fuzzy caracterizando a noção de grande. O conjunto pode ser caracterizado por:

$$i = [0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Operações em Conjuntos Fuzzy

- o A interseção entre confortável e grande é dado por:
$$c \cap i = [0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$
- o Interpretando o conjunto fuzzy $c \cap i$, concluimos que uma casa com 5 dormitórios é a mais satisfatória, com grau 0,6. A segunda melhor solução é a casa com 4 dormitórios.
- o A união de confortável e grande nos dá:
$$c \cup i = [0.2 \ 0.5 \ 0.8 \ 1 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$
- o O complemento de grande produz: Qual a interpretação de i ?
$$i = [1 \ 1 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.4 \ 0.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$



Modificadores

- Definição:
Um modificador linguístico é um termo que modifica o significado de um conjunto fuzzy, ou seja, é uma operação sobre este conjunto que retrata a imprecisão presente na lógica fuzzy.
- Exemplos:
 - “pouco”, “mais ou menos”, “possivelmente”, “com certeza” são exemplos de modificadores.
 - “pouco quente”, “mais ou menos cheio”, “extremamente chato” são exemplos de conjuntos fuzzy aplicados de um modificador.



Modificadores

- Embora seja difícil deixar preciso o significado do efeito do modificador “muito”, com certeza ele produz um efeito intensificador.
- O modificador “mais ou menos” tem o efeito oposto.
- Os modificadores são muitas vezes aproximados pelas operações:

$$\begin{aligned}\text{muito} &\equiv (a \rightarrow a^2) \\ \text{mais ou menos} &\equiv (a \rightarrow \sqrt{a})\end{aligned}$$



Modificadores

- Exemplo: Dado o conjunto: jovem = [10, 20, 30, 40, 50] com graus de pertinência [1 , 0.6 , 0.1 , 0 , 0], respectivamente:
 - Podemos derivar a função de pertinência para o conjunto “muito jovem” elevando todos os termos ao quadrado, o que produz:
$$\text{muito jovem} = \text{jovem}^2 = [1 \ 0.36 \ 0.01 \ 0 \ 0]$$
 - Da mesma forma, o conjunto “muito muito jovem” é obtido fazendo:
$$\text{muito muito jovem} = \text{jovem}^4 = [1 \ 0.13 \ 0 \ 0 \ 0]$$



Modificadores

- Uma família de modificadores pode ser gerada fazendo a^p onde p é a potência entre zero e infinito.
- Quando $p = \infty$ o modificador pode ser dito “exatamente”, pois isto força a nulificação de pertinência de todas as entradas menores do que 1.