

Lógica Modal

Mario R. F. Benevides

16 de setembro de 2010

Resumo

Neste texto apresentamos um resumo dos conceitos básicos de lógica modal.

Atenção \implies Este material está sendo construído durante o curso. Faltam várias figuras, provas, exemplos e explicações. Este material deve ser usado como material suplementar. Nesta versão, em relação a versão 09-2, coloquei o algoritmo para verificar se uma fórmula modal φ é satisfeita num modelo $M = (W, R, V)$ num estado w e a seção 2.4 sobre tradução padrão.

1 Linguagem

1.1 Alfabeto modal sobre Φ

Dado um conjunto Φ de símbolos proposicionais, $\Phi = \{p, q, \dots\}$, o *alfabeto modal* sobre Φ é constituído por: cada um dos elementos de Φ ; o símbolo \perp (absurdo); os conectivos lógicos \neg (negação), \rightarrow (implicação), \wedge (conjunção) e \vee (disjunção); os operadores modais \Box (necessidade) e \Diamond (possibilidade); e os parênteses, como símbolos auxiliares.

1.2 Linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre Φ

A *linguagem modal induzida pelo alfabeto modal sobre Φ* é definida indutivamente da seguinte forma:

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \mid \neg\varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

2 Semântica

2.1 Frames

Um *frame* é um par $F = (W, R)$ onde W é um conjunto não-vazio de *estados* e R é uma relação binária em W dita *relação de acessibilidade*. Diz-se que $s_2 \in W$ é *acessível* a partir de $s_1 \in W$ se, e somente se, $(s_1, s_2) \in R$.

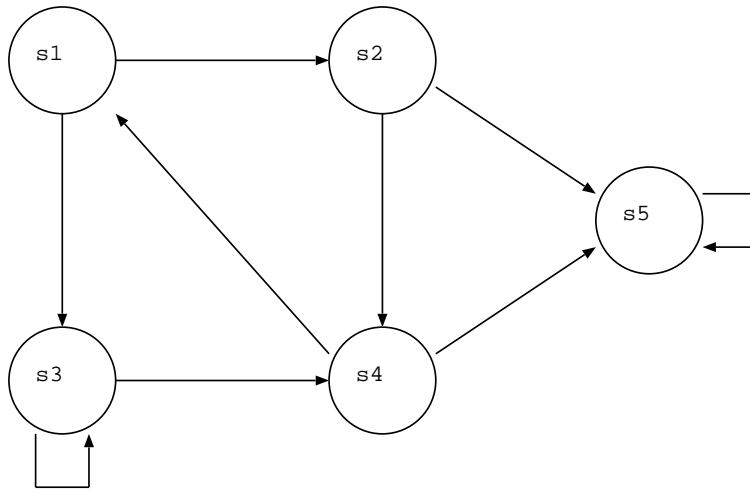


Figura 1: Exemplo de um Frame.

No exemplo da figura 1 o conjunto de estados é $W = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ e a relação de acessibilidade é $R = \{(s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_3, s_3), (s_3, s_4), (s_2, s_4), (s_2, s_5), (s_4, s_1), (s_4, s_5), (s_5, s_5)\}$. O frame é $F = (W, R)$.

2.2 Modelos

Um *modelo* sobre o conjunto Φ é um par $M = (F, V)$ onde $F = (W, R)$ é um *frame* e V é uma função de Φ no conjunto das partes de W , que faz corresponder a todo símbolo proposicional $p \in \Phi$ o conjunto de estados nos quais p é satisfeito, i.e., $V : \Phi \mapsto Pow(W)$.

No exemplo da figura 2 o frame é o mesmo da figura 1 e a função V é:

- $V(p) = \{s_3, s_4, s_5\}$

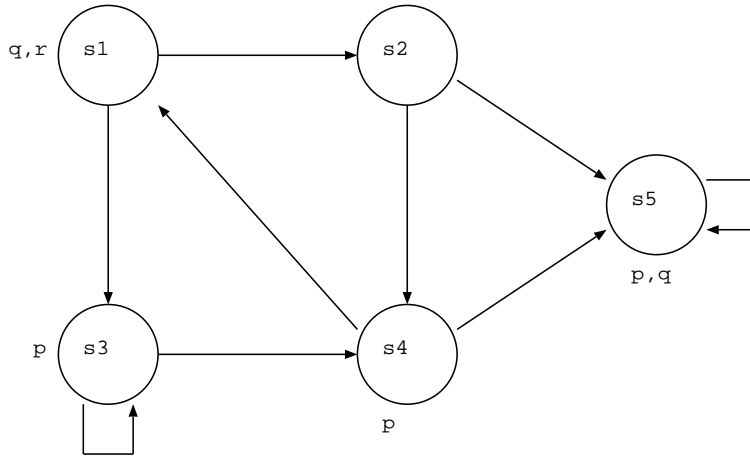


Figura 2: Exemplo de um Modelo.

- $V(q) = \{s_1, s_5\}$
- $V(r) = \{s_1\}$

2.3 Satisfação

Seja $M = (F, V)$ um modelo e $w \in W$ um estado. A notação $M, w \Vdash \varphi$ indica que a fórmula φ é *satisfeita* pelo modelo M no estado w , o que é definido indutivamente como:

- $M, w \Vdash p$ sse $w \in V(p) (\forall p \in \Phi)$
- $M, w \not\Vdash \perp$
- $M, w \Vdash \neg\varphi$ iff $M, w \not\Vdash \varphi$,
- $M, w \Vdash \varphi \rightarrow \varphi'$ sse $M, w \not\Vdash \varphi$ **ou** $M, w \Vdash \varphi'$
- $M, w \Vdash \varphi \wedge \varphi'$ sse $M, w \Vdash \varphi$ **e** $M, w \Vdash \varphi'$
- $M, w \Vdash \varphi \vee \varphi'$ sse $M, w \Vdash \varphi$ **ou** $M, w \Vdash \varphi'$
- $M, w \Vdash \Box\varphi$ sse para todo $w' \in W$ se wRw' **implica** $M, w' \Vdash \varphi$
- $M, w \Vdash \Diamond\varphi$ sse existe $w' \in W$, wRw' **e** $M, w' \Vdash \varphi$

Exemplo: Seja M o modelo da figura 2. Queremos verificar se $M, s_2 \Vdash \Box p$.

$M, s_2 \Vdash \Box p$ sse para todo $w' \in W$ se $s_2 R w'$ **implica** $M, w' \Vdash p$, nós precisamos verificar para $w' \in \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. Como temos uma implicação, para os não vizinhos de s_2 a implicação é vacoamente verdadeira. Então precisamos verificar somente para

- $w' = s_4, M, s_4 \Vdash p$ sse $s_4 \in V(p)$ o que é verdade;
- $w' = s_5, M, s_5 \Vdash p$ sse $s_5 \in V(p)$ o que é verdade.

A seguir apresentamos um algoritmo para verificar se uma fórmula modal φ é satisfeita num modelo $M = (W, R, V)$ ¹ num estado w .

função Satisfaz(φ, M, w): **booleano**

caso φ :

- | | |
|-------------------------------------|--|
| p : | se $w \in V(p)$ então retorna verdadeiro
senão retorna falso |
| \perp : | retorna falso |
| $\neg\varphi_1$: | retorna not Satisfaz(φ_1, M, w) |
| $\varphi_1 \wedge \varphi_2$: | retorna Satisfaz(φ_1, M, w) and Satisfaz(φ_2, M, w) |
| $\varphi_1 \vee \varphi_2$: | retorna Satisfaz(φ_1, M, w) or Satisfaz(φ_2, M, w) |
| $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: | retorna not Satisfaz(φ_1, M, w) or Satisfaz(φ_2, M, w) |
| $\Diamond\varphi_1$: | para todo w' t. q. $w R w'$ faça
se Satisfaz(φ_1, M, w') então retorna verdadeiro
retorna falso |
| $\Box\varphi_1$: | para todo w' t. q. $w R w'$ faça
se not Satisfaz(φ_1, M, w') então retorna falso
retorna verdadeiro |

Complexidade: para cada conectivo booleano são feitas, no pior caso, duas chamadas e para cada ocorrência de símbolo proposicional temos uma chamada. Para os conectivos modais temos que percorrer a lista de adjacências, no pior caso, para todos os estados de W . Logo a complexidade é $O(|\varphi| \times (|W| + |R|))$, isto é, linear no tamanho da fórmula e no tamanho do modelo.

¹Usaremos no texto $M = (W, R, V)$ quando na verdade deveríamos usar $M = (F, V)$ e $F = (W, R)$.

2.4 Tradução Padrão

\mathcal{LM} : Linguagem modal com conjunto Φ de símbolos proposicionais, $\Phi = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$

\mathcal{LPO} : Linguagem de primeira ordem com um predicado binário R e um conjunto de predicados unários $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$

Definição 1. Tradução Padrão: *Seja x uma variável de primeira ordem. A tradução padrão \mathcal{T} é uma função que mapeia fórmulas da linguagem modal \mathcal{LM} para linguagem de primeira ordem \mathcal{LPO} : $\mathcal{LM} \mapsto^{\mathcal{T}} \mathcal{LPO}$, definida a seguir:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_x(\perp) &= \perp \\
\mathcal{T}_x(p_i) &= P_i(x), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^+ \\
\mathcal{T}_x(\neg\varphi) &= \neg\mathcal{T}_x(\varphi) \\
\mathcal{T}_x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &= \mathcal{T}_x(\varphi_1) \wedge \mathcal{T}_x(\varphi_2) \\
\mathcal{T}_x(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= \mathcal{T}_x(\varphi_1) \vee \mathcal{T}_x(\varphi_2) \\
\mathcal{T}_x(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) &= \mathcal{T}_x(\varphi_1) \rightarrow \mathcal{T}_x(\varphi_2) \\
\mathcal{T}_x(\diamond\varphi) &= \exists y(xRy \wedge \mathcal{T}_y(\varphi)) \\
\mathcal{T}_x(\Box\varphi) &= \forall y(xRy \rightarrow \mathcal{T}_y(\varphi))
\end{aligned}$$

Dado um modelo modal $M = (W, R, V)$ nós podemos ver este modelo modal como um modelo para a linguagem de primeira ordem \mathcal{LPO} interpretando W como o domínio, o predicado R como a relação binária R e cada predicado unário P_i como o conjunto $V(p_i)$.

Teorema 1. *Seja ϕ uma fórmula modal na linguagem \mathcal{LM} . Para todo modelo modal M e todo estado w temos²,*

$$M, w \Vdash \phi \text{ iff } M \models \phi[x/w]$$

Prova: *Por indução no comprimento da fórmula ϕ .*

△

Exemplo 1. *Obter a tradução padrão de $\Box(p \rightarrow \diamond q)$*

²Onde \models é a relação de satisfação da Lógica de Primeira Ordem

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_x(\Box(p \rightarrow \Diamond q)) &= \forall y(xRy \rightarrow \mathcal{T}_y((p \rightarrow \Diamond q))) \\
&= \forall y(xRy \rightarrow (\mathcal{T}_y(p) \rightarrow \mathcal{T}_y(\Diamond q))) \\
&= \forall y(xRy \rightarrow (\mathcal{T}_y(p) \rightarrow \exists z(yRz \wedge \mathcal{T}_z(q)))) \\
&= \forall y(xRy \rightarrow (P(y) \rightarrow \exists z(yRz \wedge Q(z))))
\end{aligned}$$

Desafio: No exemplo anterior usamos três variáveis quando na verdade só precisávamos usar duas. Na realidade, qualquer fórmula modal pode ser traduzida para uma de primeira ordem usando-se somente duas variáveis. Por que? Escreva a fórmula do exemplo anterior somente com duas variáveis. Explique como conseguiu.

Exercício 1. *Obtenha a tradução padrão para as seguintes fórmulas modais:*

1. $\Box p \rightarrow p$
2. $p \rightarrow \Diamond p$, qual a relação com a fórmula anterior?
3. $\Box p \rightarrow \Box \Box p$
4. $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$, qual a relação com a fórmula anterior?
5. $p \rightarrow \Box \Diamond p$
6. $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
7. $\Box(p \wedge \Diamond(q \rightarrow \Diamond \neg p))$

2.5 Clásses de Frames

Nesta seção apresentamos algumas classes de frames que são mais usuais.

Seja um frame $F = (W, R)$ e \mathcal{F} a classe de todos os frames.

2.5.1 Classe dos Frames Reflexivos \mathcal{F}_r

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja reflexiva.

$$\forall x \in W (xRx)$$

\implies : *Inserir exemplo de frame reflexivo*

2.5.2 Clásse dos Frames Simétricos \mathcal{F}_s

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja simétrica.

$$\forall x, y \in W (xRy \rightarrow yRx)$$

\implies : *Inserir exemplo de frame simétrico*

2.5.3 Clásse dos Frames Transistivos \mathcal{F}_t

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja transitiva.

$$\forall x, y, z \in W (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

\implies : *Inserir exemplo de frame transitivo*

2.5.4 Clásse dos Frames Seriais \mathcal{F}_{serial}

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja serial.

$$\forall x \exists y (xRy)$$

\implies : *Inserir exemplo de frame serial*

2.5.5 Clásse dos Frames Euclidianos \mathcal{F}_{eucl}

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja Euclideana.

$$\forall x, y, z \in W (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz)$$

\implies : *Inserir exemplo de frame euclideano*

2.6 Validade

1. φ é **verdadeira em um modelo** M , $M \Vdash \varphi$, sse φ é verdadeira em todos os estados de M ;
2. φ é **válida em um frame** F , $F \Vdash \varphi$, sse φ é verdadeira em todos os modelos M baseados em F ;
3. φ é **válida numa classe de frames** \mathcal{F} , $\mathcal{F} \Vdash \varphi$, sse φ válida em todos os frames $F \in \mathcal{F}$.

Lema 1. : $\mathcal{F} \Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$, onde \mathcal{F} é a classe de todos os frames.

Prova: *Suponha, por contradição, que existe um modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ com um mundo possível $w \in W$ tal que*

$$(\mathcal{M}, w) \not\Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$$

Então,

$$(1) \mathcal{M}, w \Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \text{ e}$$

$$(2) \mathcal{M}, w \not\Vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$$

(1) *se e somente se* $\forall w' \in W$, *se* $wR_\alpha w'$ *então* (3) $\mathcal{M}, w' \Vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

(2) *se e somente se* (4) $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi$ e (5) $\mathcal{M}, w \not\Vdash \Box\psi$.

(4) *se e somente se* $\forall w' \in W$, *se* $wR_\alpha w'$ *então* (6) $\mathcal{M}, w' \Vdash \varphi$.

De (3) e (6) e pela definição de satisfação, $\forall w' \in W$, se $wR_\alpha w'$ então $\mathcal{M}, w' \Vdash \psi$, mas isto é se e somente se $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\psi$. O que contraria (5).

△

Exercício 2. *Mostre que as seguintes fórmulas são válidas ou não na classe \mathcal{F} de todos os frames.*

$$1. \mathcal{F} \Vdash \Box(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$$

$$2. \mathcal{F} \Vdash (\Box\phi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box(\phi \wedge \psi)$$

$$3. \mathcal{F} \Vdash \Diamond(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi)$$

4. $\mathcal{F} \Vdash (\diamond\phi \wedge \diamond\psi) \rightarrow \diamond(\phi \wedge \psi)$
5. $\mathcal{F} \Vdash \Box(\phi \vee \psi) \rightarrow (\Box\phi \vee \Box\psi)$
6. $\mathcal{F} \Vdash (\Box\phi \vee \Box\psi) \rightarrow \Box(\phi \vee \psi)$
7. $\mathcal{F} \Vdash \diamond(\phi \vee \psi) \rightarrow (\diamond\phi \vee \diamond\psi)$
8. $\mathcal{F} \Vdash (\diamond\phi \vee \diamond\psi) \rightarrow \diamond(\phi \vee \psi)$
9. $\mathcal{F} \Vdash \Box(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\phi \rightarrow \Box\psi)$ *Lema 1*
10. $\mathcal{F} \Vdash (\Box\phi \rightarrow \Box\psi) \rightarrow \Box(\phi \rightarrow \psi)$
11. $\mathcal{F} \Vdash \diamond(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\diamond\phi \rightarrow \diamond\psi)$
12. $\mathcal{F} \Vdash (\diamond\phi \rightarrow \diamond\psi) \rightarrow \diamond(\phi \rightarrow \psi)$
13. $\mathcal{F} \Vdash \diamond\phi \rightarrow \neg\Box\neg\phi$
14. $\mathcal{F} \Vdash \Box\phi \rightarrow \neg\diamond\neg\phi$

2.6.1 Validade na Classe dos Frames Reflexivos \mathcal{F}_r

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja reflexiva.

$$\forall x \in W (xRx)$$

Lema 2. : $\mathcal{F}_r \Vdash \Box\phi \rightarrow \phi$, onde \mathcal{F}_r é a classe dos os frames reflexivos.

Prova: *Suponha, por contradição, que existe um modelo $M = (F, V)$ com um estado $w \in W$ tal que*

$$M, w \not\models \Box p \rightarrow p \Leftrightarrow$$

$$(1) M, w \Vdash \Box p \text{ e}$$

$$(2) M, w \not\models p$$

(1) \Leftrightarrow *para todo w' , se wRw' então $M, w' \Vdash p$. Mas como o frame F é reflexivo, wRw e portanto $M, w \Vdash p$, o que contraria (2).*

△

Lema 3. : *Se $F \Vdash \Box p \rightarrow p$ então F é reflexivo.*

Prova: Vamos provar a contra-positiva. Suponha que F não é reflexivo. Precisamos mostrar que $F \not\vdash \Box p \rightarrow p$. Para tanto, vamos construir um modelo $W = (W, R, V)$ baseado em F tal que $M, w \not\vdash \Box p \rightarrow p$, onde w é um estado de F que não é reflexivo, i. e., $(w, w) \notin R$. Seja $V(p) = \{v \in W \mid v \neq w\}$.

$M, w \vdash \Box p \rightarrow p \Leftrightarrow M, w \not\vdash \Box p$ (1) ou $M, w \vdash p$ (2)

(1) \Leftrightarrow existe w' , wRw' e $M, w' \not\vdash p \Leftrightarrow w' \notin V(p)$. Mas como w não é reflexivo, $w' \neq w$ e pela definição de $V(p)$, $w' \in V(p)$ o que é uma contradição.

(2) $\Leftrightarrow w \in V(p)$, o que é uma contradição com a definição de $V(p)$.

△

Teorema 2. $F \vdash \Box p \rightarrow p$ se e somente se F é reflexivo.

Prova: Direta do lema 2 e lema 3.

△

Corolário 1. : $\mathcal{F}_r \vdash \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$, onde \mathcal{F}_r é a classe dos os frames reflexivos.

Prova: Direta do lema 2 e do item 14 do exercício 2.

△

2.6.2 Validade na Classe dos Frames Transitivos \mathcal{F}_t

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja transitiva.

$$\forall x, y, z \in W (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

Lema 4. : $\mathcal{F}_t \vdash \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$, onde \mathcal{F}_t é a classe dos frames transitivos.

Prova: COLOCAR A PROVA!!!

△

Corolário 2. : $\mathcal{F}_t \vdash \Diamond \Diamond \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$, onde \mathcal{F}_t é a classe dos frames transitivos.

Prova: Direta do lema 4 e do item 14 do exercício 2.

△

2.6.3 Validade na Classe dos Frames Simétricos \mathcal{F}_s

Composta pelos frames cuja a relação de acessibilidade seja simétrica.

$$\forall x, y \in W (xRy \rightarrow yRx)$$

Lema 5. : $\mathcal{F}_s \Vdash \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$, onde \mathcal{F}_s é a classe dos frames simétricos.

Prova: COLOCAR A PROVA!!!

△

Corolário 3. : $\mathcal{F}_s \Vdash \Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$, onde \mathcal{F}_s é a classe dos frames simétricos.

Prova: Direta do lema 5 e dos itens 13 e 14 do exercício 2.

△

\implies : Inserir outras classes

Exercício 3. Prove:

1. Prove Corolário 1 sem usar lema 2;
2. Prove Corolário 3 sem usar lema 5;
3. Prove Corolário 2 sem usar lema 4;
4. Euclidiano
5. combinações
6. Serial

3 Sistema Modais Normais

3.1 O sistema K

O sistema modal K é o menor sistema modal normal contendo os seguintes axiomas e regras de inferência:

Axiomas

ax.1 todas as tautologias proposicionais

ax.2 $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ axioma K

ax.1 $\Diamond\phi \leftrightarrow \neg\Box\neg\phi$

Regras de Inferência

3.2 O sistema KV_1V_2

Sejam V_1 e V_2 os seguintes axiomas:

- $V_1 \quad \varphi \Rightarrow [a]\langle b\rangle\varphi$
- $V_2 \quad \varphi \Rightarrow [b]\langle a\rangle\varphi$

O sistema a que chamaremos KV_1V_2 conterà as regras do sistema K adicionadas aos axiomas V_1 e V_2 .