

# Teoria dos Grafos

## Aula 17

### Aula passada

- Ciclo de Euler
- Ciclo de Hamilton
- Quem foi Turing

### Aula de hoje

- Coloração
- Algoritmo guloso
- Número cromático

# Colorindo um Mapa

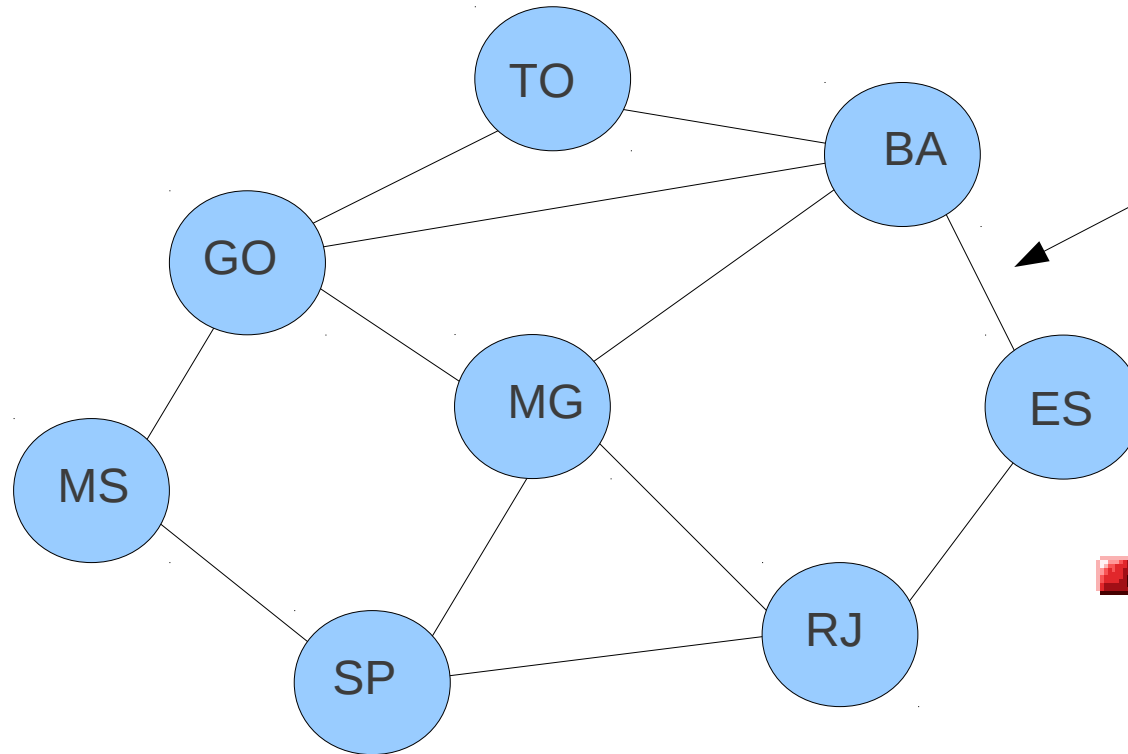


- Mapa de regiões (estados)
- Colorir o mapa
  - regiões vizinhas (com fronteira) **não** podem ter mesma cor

- **Problema 1:** Como colorir um mapa de forma atendendo a restrição
- **Problema 2:** Qual é o **menor** número de cores necessário?

# Colorindo um Mapa

- Abstração via grafos
- Vértices: regiões (estados)
- Arestas: duas regiões são vizinhas

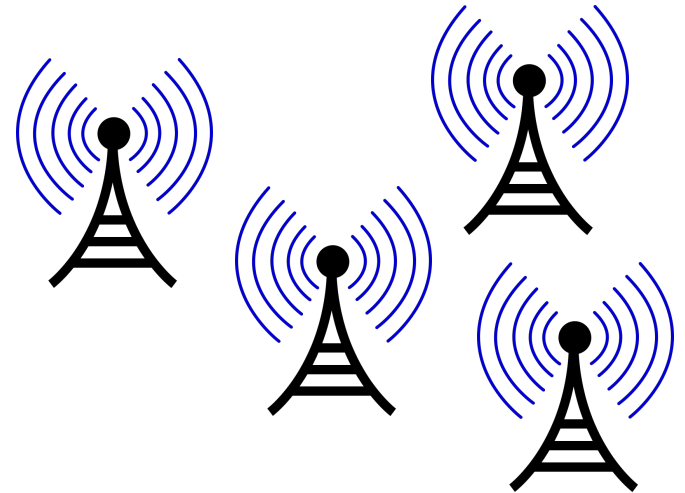


BA e ES são vizinhos

- Número mínimo de cores?

# Alocação de Frequências

- Rede telefonia celular
  - Estações base (torre)
- Células vizinhas não podem usar mesma frequência
  - interferência!

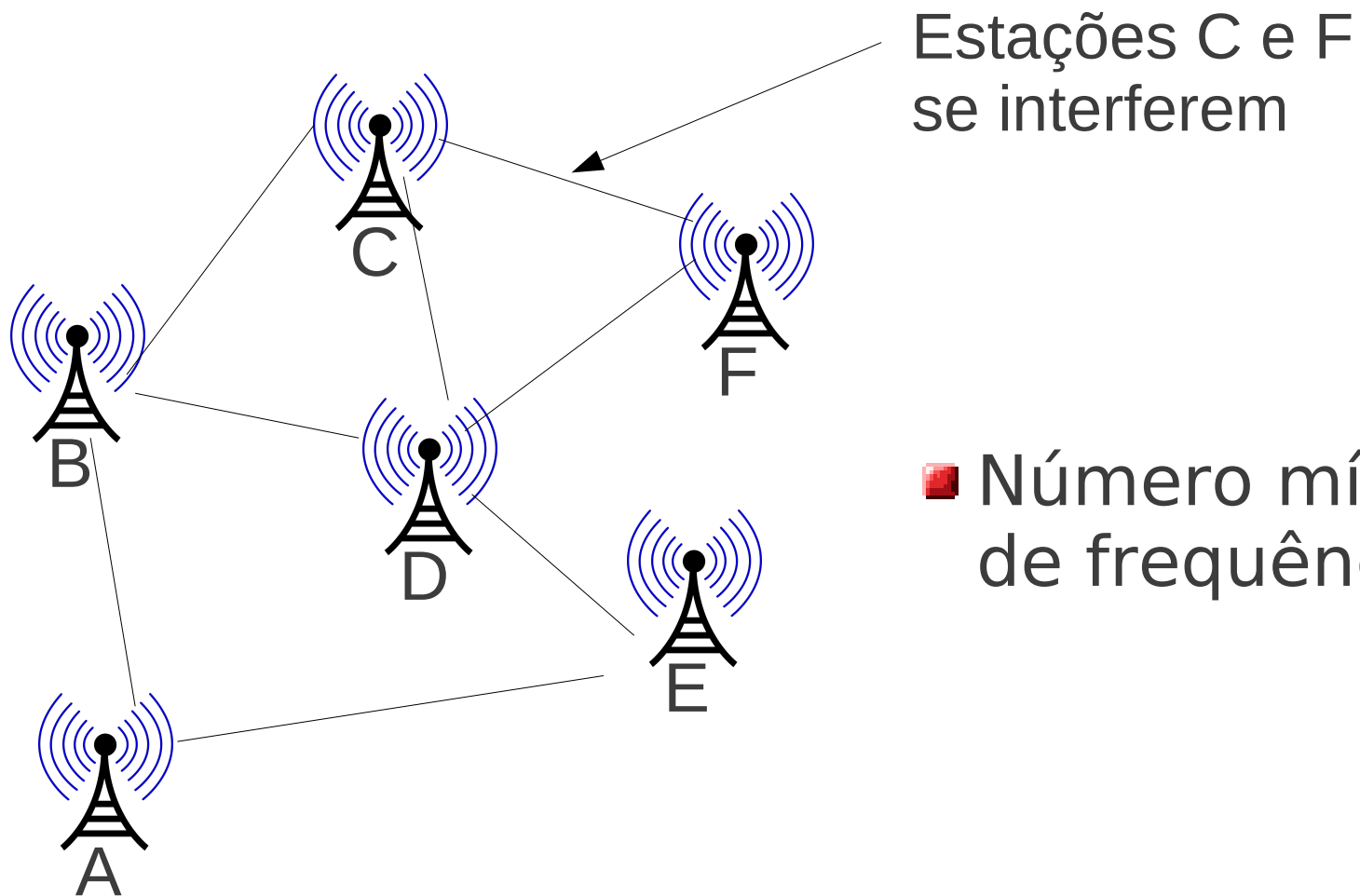


- **Problema 1:** Como alocar frequências às células?
- **Problema 2:** Qual é o menor número de frequências necessário?

**Mesma abtração!**

# Alocação de Frequências

- Vértices: estações base
- Arestas: duas estações são vizinhas (interferem)

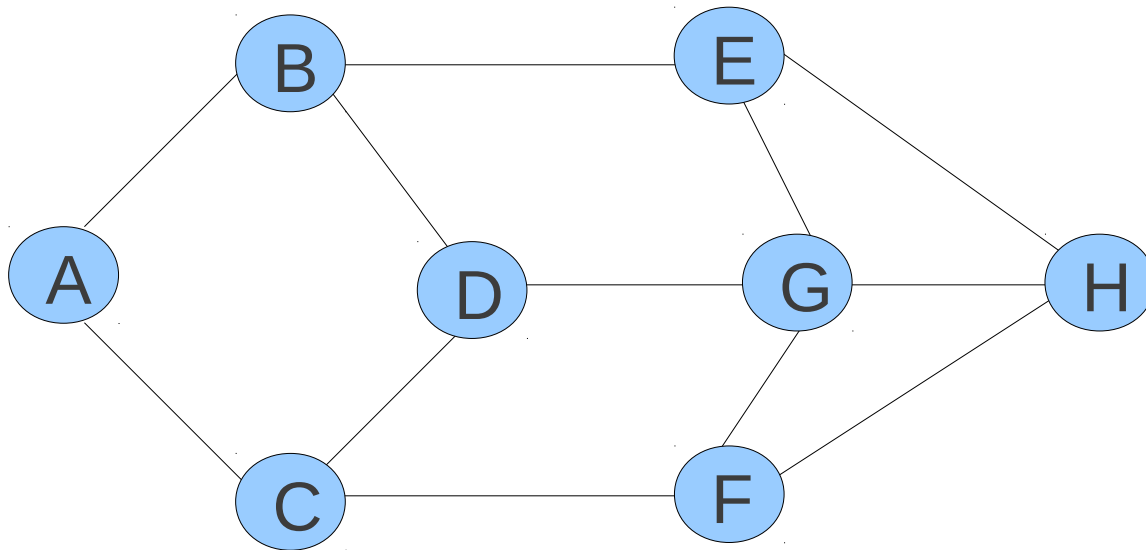


# Coloração em Grafos

- Coloração de vértices
- Dado grafo  $G = (V, E)$
- Restrição: vértices vizinhos não possuem mesma cor
- *k-coloração*: coloração que utiliza exatamente  $k$  cores
  - grafo é *k-colorível*
- **Número cromático**: menor número de cores necessário colorir o grafo

# Exemplo

- Uma coloração qualquer?
- Número cromático?



- Coloração qualquer é fácil, número cromático é difícil

# Algoritmo para Coloração

- Algoritmo para colorir um grafo com o menor número de cores possível
- **Idéias???**
- Método guloso
  - Mas como? Guloso em que?



# Algoritmo Guloso

- Guloso no grau dos vértices
  - maior o grau, mais restrito, colorir primeiro

```
1. Colorir(G)
2. Ordenar vertices em ordem decrescente de graus
3. Define conjunto  $C[i] = \emptyset$  para  $i=1, \dots, n$ 
4. Incluir  $v[1]$  em  $C[1]$  // colorir  $v[1]$ 
5. Para  $j=2, \dots, n$  faça
6.     Selecione  $r$ , a menor cor para colorir  $v[j]$ 
        // menor  $r$  tal que nenhum vertice em  $C[r]$ 
        // seja vizinho de  $v[j]$ 
7.     Incluir  $v[j]$  em  $C[r]$ 
```

# Algoritmo Guloso

- Algoritmo funciona?
  - gera uma coloração de  $G$ ?
- Sim! Prova pelo funcionamento
  
- Algoritmo obtém número cromático?
  - utiliza menor número de cores?
- Não! Contra-exemplo?
  
- Complexidade?

# Número Cromático

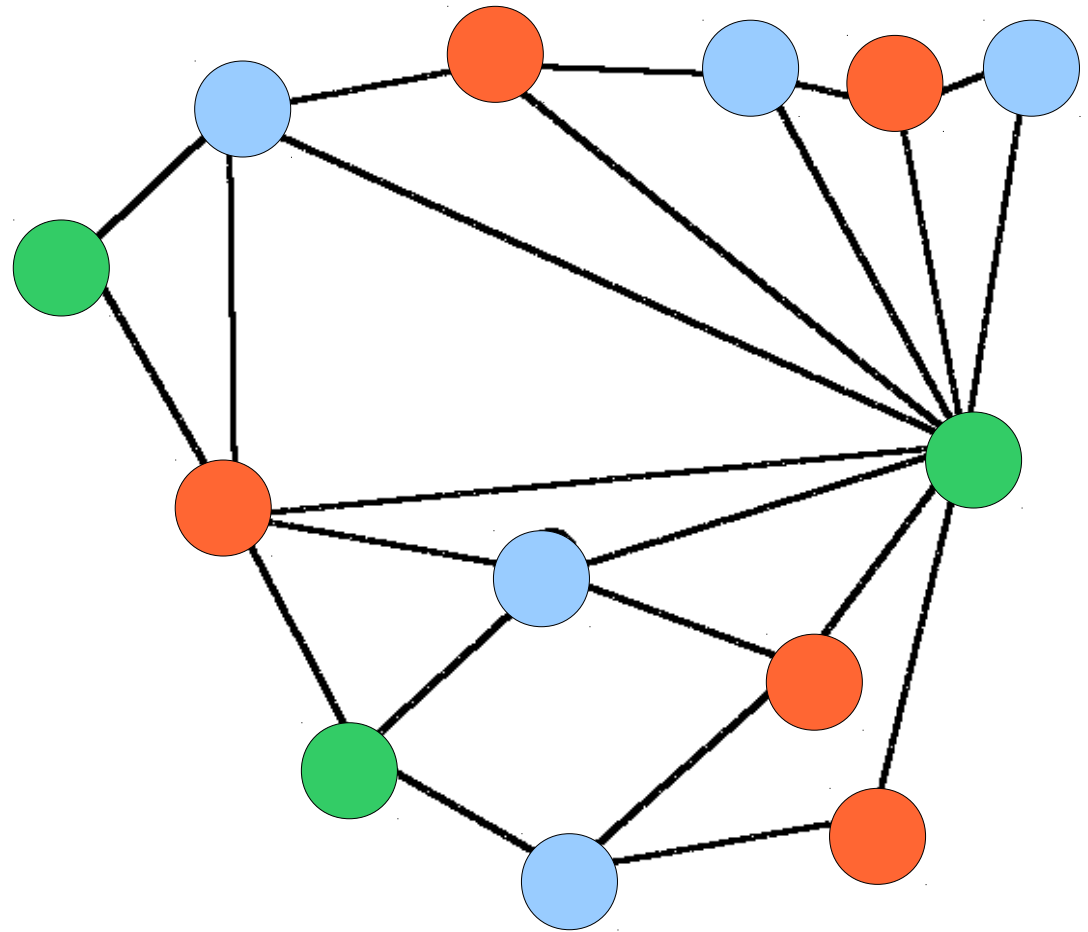
- **Problema difícil!**
- Não se conhece algoritmo eficiente para determinar o número cromático
- Determinar se um grafo é *k-colorível* é igualmente difícil, para  $k > 2$ 
  - para  $k = 2$  é fácil, já fizemos aqui

# Coloração de Mapas

- Caso especial de coloração de grafos
- Grafo induzido pelo mapa é *planar*
  - restrição geométrica das fronteiras.
- Grafo planar: é possível desenhar o grafo sem cruzar as arestas
  
- **Problema:** Qual é o menor número de cores necessário para colorir qualquer mapa?

# Exemplo

## ■ América do Sul



- Número cromático?
- Exemplo com 4 cores?

# Teorema das 4 Cores

- Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa
- Conjectura de De Morgan em 1852
- Várias provas erradas da conjectura!
- Provado somente em 1972 por Appel, Haken e um computador
  - prova por “força bruta” mostra que não há mapa para qual 5 cores seja necessário
  - Análise de 2000 casos, via computador!
- Primeira grande prova com ajuda do computador
- Matemáticos não gostam: e se tiver bug no programa?