Lógica dos Conectivos: demonstrações indiretas

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

18 de junho de 2015

Sumário

Parte 1

Olhe para as premissas

Um problema de validade

Considere o seguinte argumento (1):

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ s \rightarrow t \\ \hline p \rightarrow t \end{array}$$

(1) é válido ou não?

Uma demonstração

A resposta é sim...
Uma demonstração da validade de (1) é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$p \to q$
P	2.	$q \to r$
P	3.	$r \to s$
P	4.	$s \to t$
1, 2	5.	$p \to r$
3, 5	6.	$p \to s$
4, 6	7.	$p \to t$ ∎

Nesta demonstração, o único passo lógico utilizado foi:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi \\ \psi \to \theta\end{array}}{\varphi \to \theta}$$

Demonstrações diretas

De maneira geral, podemos dizer que a demonstração anterior foi construída pela execução dos seguintes passos:

1. análise das premissas;
2. aplicação de passos lógicos às premissas para a obtenção de fórmulas intermediárias;
3. aplicação de passos lógicos às premissas e às fórmulas intermediárias, para a obtenção da conclusão.

Por esta razão este tipo de demonstração é chamada de demonstração direta.

Estratégia geral das demonstrações diretas

Em linhas gerais, a estratégia geral das demonstrações diretas é:

parta das premissas

e

analisando as premissas,

através de passos lógicos,

chegue na conclusão.

Outra solução

Parta das premissas e chegue na conclusão.

Ou, alternativamente. . .

Parte 2

Olhe para a conclusão

Olhe para a conclusão

Uma outra demonstração da validade de (1) pode ser obtida, baseada na seguinte ideia:

Esqueça as premissas e note que a conclusão de (1) é uma implicação:

$$\frac{\Sigma}{p \rightarrow t}$$

Para mostrar que a implicação $p \rightarrow t$ segue de um conjunto de premissas, basta mostrar que quando assumimos que as premissas são V, a verdade "não decresce", quando "passamos de p para t".

Mostrar que a verdade "não decresce", quando "passamos de p para t", é mostrar que, quando assumimos que p é V, temos que t é V.

Assim, para mostrar a validade do argumento (1), basta mostrar que o seguinte argumento, (2), é válido:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ s \rightarrow t \\ \hline t \end{array}$$

A esta altura, não temos nenhuma dificuldade em construir uma demonstração direta da validade de (2).

Demonstração

P	1.	$p \to q$
P	2.	$q \to r$
P	3.	$r \to s$
P	4.	$s \to t$
P	5.	p
1, 5	6.	q
2, 6	7.	r
3, 7	8.	s
4, 8	9.	t ■

Nesta demonstração, o único passo lógico utilizado foi:

$$\begin{array}{l} \varphi \to \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

Observe que...

Queríamos demonstrar $p \to t$ a partir de Σ.

Mas, na verdade, demonstramos t a partir de $\Sigma \cup \{p\}$.

Para demonstrar a validade de um argumento dado, demonstramos a validade de um outro argumento inventado.

O argumento inventado tem uma premissa a mais e uma conclusão mais simples.

Outro problema de validade

Considere o argumento (3):

$$\begin{array}{l} (\neg p) \vee r \\ (\neg t) \rightarrow (\neg s) \\ r \rightarrow s \\ \hline (p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t) \end{array}$$

(3) é válido ou não?

Olhe para a conclusão

Para demonstrar

$$\frac{\Sigma}{(p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t)}$$

basta demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{s \wedge t}$$

Olhe para a conclusão, novamente

Esqueça as premissas e note que agora a conclusão é uma conjunção:

$$\frac{\Sigma}{s \wedge t}$$

Quando podemos considerar que a conjunção $s \wedge t$ é consequência de um conjunto de premissas?

Por exemplo, quando assumindo que todas as premissas são V, podemos garantir que ambas s e t são V.

Olhe para a conclusão, novamente

Para demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{s \wedge t}$$

basta demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{s}$$

e

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{t}$$

Demonstrações

P	1.	$(\neg p) \vee r$
P	2.	$(\neg t) \rightarrow (\neg s)$
P	3.	$r \rightarrow s$
P	4.	$p \wedge q$
4	5.	p
1, 5	6.	r
3, 6	7.	s ■

P	1.	$(\neg p) \vee r$
P	2.	$(\neg t) \rightarrow (\neg s)$
P	3.	$r \rightarrow s$
P	4.	$p \wedge q$
4	5.	p
1, 5	6.	r
3, 6	7.	s
2, 7	8.	t ■

Observação

Queríamos demonstrar $(p \wedge q) \to (s \wedge t)$ a partir de Σ.

Na verdade, demonstramos ambas s e t a partir de $\Sigma \cup \{p \wedge q\}$.

Para demonstrar a validade de um argumento dado, demonstramos a validade de dois outros argumentos inventados.

Os argumentos inventados têm, cada um, uma premissa a mais e uma conclusão mais simples.

Ainda outro problema de validade

Considere o argumento (4)

$$\begin{array}{c} t \to (\neg q) \\ (\neg t) \to r \\ \hline (s \wedge q) \to (r \vee \neg s) \end{array}$$

(4) é válido ou não?

Olhe para a conclusão

Para demonstrar

$$\frac{\Sigma}{(s \wedge q) \rightarrow (r \vee (\neg s))}$$

basta demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ s \wedge q\end{array}}{r \vee \neg s}$$

Olhe para a conclusão, novamente

Esqueça as premissas e note que agora a conclusão é uma disjunção:

$$\frac{\Sigma}{r \vee \neg s}$$

Quando podemos considerar que a disjunção $r \vee \neg s$ é consequência de um conjunto de premissas?

Por exemplo, quando assumindo que todas as premissas são V, podemos garantir que r é V.

Demonstração

P	1.	$t \rightarrow (\neg q)$
P	2.	$(\neg t) \rightarrow r$
P	3.	$s \wedge q$
3	4.	q
1, 3	5.	$\neg t$
2, 5	8.	r ■

Observação

Queríamos demonstrar $(s \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg s)$ a partir de Σ.

Na verdade, demonstramos r a partir de $\Sigma \cup \{s \wedge q\}$.

Para demonstrar a validade de um argumento dado, demonstramos a validade de um outro argumento inventado.

O argumento inventado tem uma premissa a mais e uma conclusão mais simples.

Parte 3

Estratégias indiretas

Estratégias diretas

Nos esboços de demonstrações acima, aplicamos passos lógicos, como:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \quad , \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}(\neg\varphi) \to (\neg\psi) \\ \psi\end{array}}{\varphi}$$

que afirmam diretamente que certos argumentos são válidos.

Estratégias indiretas

Aplicamos, também, estratégias aparentemente corretas, como:

(i) Para demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi \to \psi}$, basta demonstrar $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \varphi\end{matrix}}{\psi}$,

(ii) Para demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi \wedge \psi}$, basta demonstrar ambos $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ e $\dfrac{\Sigma}{\psi}$,

(iii) Para demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}$, basta demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$,

que afirmam indiretamente que certos argumentos são válidos.

Estratégias indiretas

Um passo lógico (ou uma regra de inferência correta) afirma que um certo argumento (ou argumentos que possuem a mesma forma) é válido (são válidos).

Uma estratégia indireta é uma regra de outro tipo.

Ela não afirma que um certo argumento (ou argumentos que possuem a mesma forma) é válido (são válidos).

Estratégias indiretas

Mas, sim, que a validade de certos argumentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ou de argumentos que possuem a mesma forma) acarreta a validade de outro argumento A (ou de argumentos que possuem a mesma forma).

Além disto, para que a estratégia faça sentido, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ devem ser mais simples (sob um determinado critério de simplicidade) que A.

Estratégias corretas

Seja

$$\text{Se } A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\text{ então } A$$

uma estratégia indireta de demonstração.

Dizemos que

$$\text{Se } A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\text{ então } A$$

é correta se a validade simultânea de A_1, A_2, ..., A_n acarreta a validade de A.

Parte 4

Principais exemplos

Método da suposição

Para demonstrar uma implicação, basta supor o antecedente e demonstrar o consequente.

$$\text{Se } \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \varphi\end{array}}{\psi}, \text{ então } \dfrac{\Sigma}{\varphi \to \psi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de Introdução do $\to$.

Exemplício 1

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da suposição.

$$\begin{array}{l} a \rightarrow b \vee c \\ a \rightarrow \neg b \\ c \rightarrow \neg d \\ \hline a \rightarrow \neg d \end{array}$$

Método da conjunção

Para demonstrar uma conjunção, basta demonstrar cada componente.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi} \text{ e } \frac{\Sigma}{\psi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \wedge \psi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de Introdução do $\wedge$.

Exemplício 2

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da conjunção.

$$\begin{array}{l} a \to \neg b \\ d \vee \neg c \\ b \\ \hline c \to \neg a \wedge \neg d \end{array}$$

Método da disjunção

Para demonstrar uma disjunção, basta demonstrar ao menos um dos componentes.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}.$$

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\psi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}.$$

Estas duas estratégias indiretas também são chamadas de Introdução do $\vee$.

Exemplício 3

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da disjunção.

$$\begin{array}{l} (a \wedge e) \wedge f \\ a \rightarrow b \vee c \\ b \rightarrow \neg a \\ \neg d \rightarrow \neg c \\ \hline c \vee d \end{array}$$

Método da bi-implicação

Para demonstrar uma bi-implicação, basta demonstrar duas implicações associadas: uma que demonstra que o primeiro componente acarreta o segundo componente e a outra que demonstra, reciprocamente, que o segundo componente acarreta o primeiro componente.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi \to \psi} \text{ e } \frac{\Sigma}{\psi \to \varphi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \leftrightarrow \psi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de Introdução do $\leftrightarrow$.

Exemplício 4

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da bi-implicação.

$$
\begin{array}{l}
a \rightarrow c \\
\neg c \vee d \\
b \leftrightarrow d \\
b \rightarrow \neg(\neg a \wedge d) \\
\hline
a \leftrightarrow b
\end{array}
$$

Método de redução ao absurdo

Para demonstrar uma negação, basta supor a sentença negada e demonstrar uma contradição.

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\neg\varphi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de Introdução do $\neg$ ou Redução ao Absurdo Intuicionista.

Exemplício 5

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da redução ao absurdo.

$$
\begin{array}{l}
a \vee b \\
c \rightarrow \neg a \\
\neg b \vee d \\
d \rightarrow \neg c \\
\hline
\neg c
\end{array}
$$

Variante do Método de redução ao absurdo

Para demonstrar uma fórmula qualquer, basta supor a sua negação e demonstrar uma contradição.

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de Redução ao Absurdo Clássica.

Exemplício 6

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando a variante do Método de redução ao absurdo.

$$
\begin{array}{l}
a \to (b \to c) \\
c \to \neg d \\
\neg e \leftrightarrow d \\
a \wedge b \\
\hline
e
\end{array}
$$

Parte 5

Exercícios: finalmente, algo com que me preocupar!

Exercícios

1. Ler o texto da Aula 9.

2. Resolver os exercícios da Lista 9.