Lógica dos Conectivos: árvores de refutação

Petrucio Viana

IME–UFF

30 de junho de 2015

Sumário

- Algoritmos para classificação das fórmulas
- *Intermezzo* sobre Redução ao Absurdo
- Método de refutação
- Árvores de refutação
- Exercícios

Parte 1

Algoritmos para classificação das fórmulas

Problema da classificação

Problema CLASSIFICAÇÃO:

Dada $\varphi \in$ FLC.
Determinar se φ é tautologia, contingência ou contradição.

Solução Algorítmica:

1. Construir $T[\varphi]$.
2. Examinar $T[\varphi]$.
3. Classificar φ de acordo com o resultado do exame.

Mesmo uma máquina que não pensa pode executar esta solução algorítmica para CLASSIFICAÇÃO.

Tabelas de avaliação

O uso de tabelas é:

- simples,
- controlável,
- mecanizável,

porém, dispendioso, se estamos realmente interessados em resolver o problema mecanicamente.

Alternativa para tabelas

Inicialmente, projetamos dois algoritmos baseados em tabelas para resolver: EQUIVALÊNCIA e CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA FINITÁRIA.

Mas, como o uso de tabelas é dispendioso, elaboramos dois métodos alternativos (não algorítmicos) para estes problemas: transformação por equivalências e demonstrações.

Vamos, agora, elaborar um método algorítmico alternativo, que parece ser mais adequado para a resoluçao de CLASSIFICAÇÃO do que o algoritmo baseado em tabelas.

Este método será baseado no Método de Redução ao Absurdo, que vamos descrever ligeiramente.

Parte 2

Intermezzo sobre Redução ao Absurdo

Redução ao Absurdo, RA

(1) Temos uma sentença α que julgamos ser V e cuja veracidade queremos justificar.

(2) Ao invés de justificar que α é V, assumimos por um momento que α é F, ou seja, que $\neg\alpha$ é V.

Redução ao Absurdo, RA

(3) Utilizando o nosso conhecimento, Σ, que consideramos ser correto, em conjunto com $\neg\alpha$, que assumimos ser correta, raciocinamos em busca de uma informação $\neg\beta$ que contradiga uma informação β que decorre de Σ.

(4) Assim, temos:

- nosso conhecimento correto Σ,
- uma justificativa de β a partir de Σ,
- uma justificativa de $\neg\beta$ a partir de $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$.

Redução ao Absurdo, RA

(5) Nestas condições, Σ não pode justificar $\neg\alpha$, pois se asssim fosse, teríamos que Σ justificaria β e $\neg\beta$, contradizendo a confiança que temos na correção de Σ.

(6) Agora, α é V ou F.
Quando assumimos que α é F, chegamos a uma contradição com uma informação que decorre de Σ.
Temos, então, que concluir que α é V.

Exemplos clássicos do uso de RA

- $\sqrt{2}$ é irracional (Escola Pitagórica).
- Existem infinitos números primos (Euclides).
- $\mathbb{R}$ é não enumerável (Cantor).
- Não existe uma bijeção entre X e $\mathcal{P}(X)$ (Cantor).

Redução ao Absurdo

Quando aplicamos RA, estamos tentando resolver o problema

$$P_1 : \text{ justificar } \alpha \text{ a partir de } \Sigma$$

transformando P_1 no problema

$$P_2 : \text{ provar uma contradição a partir de } \Sigma \cup \{\neg\alpha\}.$$

- Para provar que $\sqrt{2}$ é irracional, assumimos que $\sqrt{2}$ é uma fração irredutível e provamos que tanto o seu numerador quanto o seu denominador são pares.

Redução ao Absurdo

- Para provar que existem infinitos primos, assumimos que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são todos os primos e provamos que $(p_1 p_2 \ldots p_n) + 1$ tem um fator primo diferente de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

- Para provar que $\mathbb{R}$ é não enumerável, assumimos que $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ é uma enumeração de $\mathbb{R}$ e exibimos um número real diferente de $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$

- Para provar que não existe uma bijeção entre X e $\mathcal{P}(X)$, assumimos que existe uma bijeção de X para $\mathcal{P}(X)$ e exibimos um conjunto que não está na imagem da bijeção.

Redução ao Absurdo

RA corresponde às seguintes estratégias de prova:

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{l}\Sigma\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi}.$$

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{l}\Sigma\\ \varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\neg\varphi}.$$

Aspectos positivos de RA

Provar que $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}$ pode ser mais fácil que provar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$.

Temos mais premissas (Σ e $\neg\varphi$) para manipular.

Qualquer contradição a que chegarmos manipulando $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ nos autoriza a concluir que Σ acarreta φ.

Temos mais conclusões para onde guiar nossos esforços.

Aspectos negativos de RA

Provar que $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \neg\varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}$ pode ser mais difícil que provar que $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$.

A princípio, não temos uma contradição específica como objetivo a ser alcançado manipulando $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

Podemos nos perder tentando elaborar uma prova por RA.

Exercício 1

Descreva em detalhes o Passo 3 da Solução Algorítimica do Problema CLASSIFICAÇÃO.

Exercício 2

Utilizando RA, construa demonstrações para os seguintes argumentos válidos:

(i) $\dfrac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q}$ (ii) $\dfrac{\neg p \vee \neg q}{\neg(p \wedge q)}$

(iii) $\dfrac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q}$ (iv) $\dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\neg(p \vee q)}$

Parte 3

Método de Refutação

Método de Refutação

O método de refutação tem origem no caso particular em que RA é aplicado ao seguinte problema:

Problema TAUTOLOGIA

Dada $\varphi \in$ FLC.
Determinar se φ é uma tautologia ou não.

Exemplo 1

$\models p \rightarrow p$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models p \rightarrow p$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p\}$ tal que $I^*[p \rightarrow p] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$ e $I^*[p] = F$, uma contradição.

Logo, $\models p \rightarrow p$.

Exemplo 2

$\models p \to (q \to p)$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models p \to (q \to p)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[p \to (q \to p)] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$ e $I^*[q \to p] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$, $I^*[q] = V$ e $I^*[p] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$ e $I^*[p] = F$, uma contradição.

Logo, $\models p \to (q \to p)$.

Método de Refutação

(1) Temos uma fórmula $\varphi \in \text{FLC}$ que julgamos ser uma tautologia.

(2) Ao invés de construir $T[\varphi]$ para verificar que $\models \varphi$, assumimos por um momento que $\not\models \varphi$, ou seja, que φ é F em alguma interpretação I.

(3) Utilizando os conhecimentos fornecidos pelas regras de formação e avaliação de fórmulas, em conjunto com $I^*[\varphi] = F$, raciocinamos em busca de duas informações contraditórias.

Método de Refutação

(4) Aplicando o conteúdo expresso nas tabelas dos conectivos "de fora para dentro", a informação $I^*[\varphi] = F$ é usada para calcularmos os valores das subfórmulas de φ, as subfórmulas das subfórmulas de φ, $\ldots$, até os valores das variáveis para sentenças de φ.

(5) De acordo com RA, se $\models \varphi$, a informação obtida deve ser conflitante.
Este conflito deve ser expresso na existência de variáveis para sentenças s, tais que $I^*[s] = V$ e $I^*[s] = F$.

Exemplo 3

$\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[(p \vee q) \to (\neg p \to q)] = F$.

Daí, $I^*[p \vee q] = V$ e $I^*[\neg p \to q] = F$.

Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $(I^*[\neg p] = V$ e $I^*[q] = F)$.

Exemplo 3

Temos 2 casos:

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[\neg p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$
$$\text{ou}$$
$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[\neg p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

Observe que o primeiro caso leva à contradição $I^*[p] = V$ e $I^*[p] = F$.

Já o segundo caso leva à contradição $I^*[q] = V$ e $I^*[q] = F$.

Como ambos os casos são contraditórios, $\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

Exemplo 4

$\models (p \vee q) \to (p \to q)$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models (p \vee q) \to (p \to q)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[(p \vee q) \to (p \to q)] = F$.

Daí, $I^*[p \vee q] = V$ e $I^*[p \to q] = F$.

Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $(I^*[p] = V$ e $I^*[q] = F)$.

Exemplo 4

Temos 2 casos:

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$
$$\text{ou}$$
$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

Observe que o segundo leva a uma contradição, mas o primeiro, não!

Na verdade, observe que o primeiro caso fornece uma interpretação I tal que $I^*[(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)] = F$.

Logo, $\not\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Exemplo 5

$\models (p \lor q) \to (p \land q)$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models (p \lor q) \to (p \land q)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[(p \lor q) \to (p \land q)] = F$.

Daí, $I^*[p \lor q] = V$ e $I^*[p \land q] = F$.

Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $(I^*[p] = F$ ou $I^*[q] = F)$.

Exemplo 5

Temos 4 casos:

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[p] = F)$$
$$\text{ou}$$
$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$
$$\text{ou}$$
$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[p] = F)$$
$$\text{ou}$$
$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

Observe que o primeiro e o último levam a contradições, mas os outros dois, não!

Exemplo 5

Na verdade, observe que o segundo e o terceiro casos fornecem, cada um, uma interpretação I tal que $I^*[(p \vee q) \to (p \wedge q)] = F$.

Logo, $\not\models (p \vee q) \to (p \wedge q)$.

Parte 4

Árvores de Refutação para LC

A ideia de árvore

A aplicação do Método de Refutação para decidir se uma fórmula é uma tautologia tem, sempre, a mesma estrutura geral, independente da fórmula em questão:

1. Assuma $\varphi : F$.
2. Calcule sucessivamente os valores das subfórmulas das subfórmulas ... das subfórmulas de φ, considerando todos os casos possíveis que possam ocorrer.
3. Obtenha os valores das variáveis para sentenças.
4. Verifique se em todos os casos possíveis há atribuições de valores contraditórias.

A ideia de árvore

Sendo assim, quando escrevemos *provas por refutação*, é usual, empregarmos uma notação mais econômica que dispensa o uso de frases como:

assuma que

daí

temos que

logo

etc.

Vamos exemplificar esta notação nos exemplos acima e, depois, definí-la precisamente.

Exemplo 1

$\models p \to p$

Assumimos que $p \to p$ é F:

$$p \to p : F$$

Exemplo 1

$\models p \to p$

Temos, então, que p é V e p é F:

$$\begin{array}{c} p \to p : F \\ p : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 1

$\models p \to p$

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{c} p \to p : F \ \surd \\ p : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 1

$\models p \rightarrow p$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow p : F \ \surd \\ p : V \\ p : F \\ \times \end{array}$$

Exemplo 2

$\models p \to (q \to p)$?

Assumimos que $p \to (q \to p)$ é F:

$$p \to (q \to p) : F$$

Exemplo 2

$\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$?

Temos, então, que p é V e $q \rightarrow p$ é F:

$$
\begin{gathered}
p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \\
p : V \\
q \rightarrow p : F
\end{gathered}
$$

Exemplo 2

$\models p \to (q \to p)$?

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{gathered} p \to (q \to p) : F \ \surd \\ p : V \\ q \to p : F \end{gathered}$$

Exemplo 2

$\models p \to (q \to p)$?

Temos, agora, que q é V e p é F:

$$
\begin{array}{c}
p \to (q \to p) : F \;\surd \\
p : V \\
q \to p : F \\
q : V \\
p : F
\end{array}
$$

Exemplo 2

$\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$?

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \ \surd \\ p : V \\ q \rightarrow p : F \ \surd \\ q : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 2

$\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$?

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$
\begin{array}{c}
p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \ \surd \\
p : V \\
q \rightarrow p : F \ \surd \\
q : V \\
p : F \\
\times
\end{array}
$$

Exemplo 3

$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$?

Assumimos que $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ é F:

$$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F$$

Exemplo 3

$\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$?

Temos, então, que $p \vee q$ é V e $\neg p \to q$ é F:

$$(p \vee q) \to (\neg p \to q) : F \ \surd$$
$$p \vee q : V$$
$$\neg p \to q : F$$

Exemplo 3

$\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$?

Agora, temos que p é V ou q é V. Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (\neg p \to q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
\neg p \to q : F \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
p : V & q : V
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 3

$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$?

Agora, temos que $\neg p$ é V e q é F. Esta informação é transportada para cada caso:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
\neg p \rightarrow q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p : V & q : V \\
\neg p : V & \neg p : V \\
q : F & q : F
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 3

$\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$?

Temos, agora, em cada caso, que p é F:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (\neg p \to q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
\neg p \to q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p : V \\ \neg p : V \surd \\ q : F \\ p : F \end{array} &
\begin{array}{c} q : V \\ \neg p : V \surd \\ q : F \\ p : F \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \ ?$$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
\neg p \rightarrow q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
\begin{array}{c} p : V \\ \neg p : V \surd \\ q : F \\ p : F \\ \times \end{array} &
\begin{array}{c} q : V \\ \neg p : V \surd \\ q : F \\ p : F \\ \times \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 4

$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$?

Assumimos que $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é F:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F$$

Exemplo 4

$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$?

Temos, então, que $p \vee q$ é V e $p \rightarrow q$ é F:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F \ \surd \\ p \vee q : V \\ p \rightarrow q : F \end{array}$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \to (p \to q) \ ?$$

Agora, temos que p é V ou q é V. Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso:

$$(p \vee q) \to (p \to q) : F \ \surd$$
$$p \vee q : V \ \surd$$
$$p \to q : F$$
$$p : V \qquad q : V$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \to (p \to q)\ ?$$

Agora, temos que p é V e q é F. Esta informação é transportada para cada caso:

$$\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (p \to q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \to q : F \ \surd
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
p : V & q : V \\
p : V & p : V \\
q : F & q : F
\end{array}$$

Exemplo 4

$\models (p \vee q) \to (p \to q)$?

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (p \to q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \to q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
p : V & q : V \\
p : V & p : V \\
q : F & q : F \\
 & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 4

$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$?

Há uma possibilidade que não leva a contradições. Ela é marcada com um símbolo especial:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \rightarrow q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p : V & q : V \\
p : V & p : V \\
q : F & q : F \\
\downarrow & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 5

$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$?

Assumimos que $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é F:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$$

Exemplo 5

$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$?

Temos, então, que $p \vee q$ é V e $p \wedge q$ é F:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \ \surd \\ p \vee q : V \\ p \wedge q : F \end{array}$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \to (p \wedge q) \text{ ?}$$

Agora, temos que p é V ou q é V. Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (p \wedge q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \wedge q : F \\
\begin{array}{cc}
p : V & \quad q : V
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 5

$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$?

Agora, temos que p é F ou q é F. Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso. Esta informação é transportada para cada caso já contemplado:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \;\surd$$

$$p \vee q : V \;\surd$$

$$p \wedge q : F \;\surd$$

$$\begin{array}{cc} p : V & q : V \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} p : F & q : F & p : F & q : F \end{array}$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \to (p \wedge q) \ ?$$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$(p \vee q) \to (p \wedge q) : F \ \surd$$

$$p \vee q : V \ \surd$$

$$p \wedge q : F \ \surd$$

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{p : V} & \multicolumn{2}{c}{q : V} \\ p : F & q : F & p : F & q : F \\ \times & & & \times \end{array}$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \to (p \wedge q) \ ?$$

Há duas possibilidades que não levam a contradições. Elas são marcadas com um símbolo especial:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (p \wedge q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \wedge q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
p : V \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p : F \\ \times \end{array} & \begin{array}{c} q : F \\ \downarrow \end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
q : V \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p : F \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} q : F \\ \times \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Árvores de refutação

Seja $\varphi \in$ FLC.

Uma árvore de refutação para $\varphi : F$, denotada $A[\varphi : F]$, é definida por aplicação sucessiva das seguintes regras de refutação.

Regra de inicialização

Iniciamos a construção da árvore escrevendo $\varphi : F$.

Diagramaticamente, temos:

$$\varphi : F$$

Regra do $\neg : V$

$$\neg\varphi \text{ é } V \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } F.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\neg\varphi : V$ ainda não marcada em algum ramo do diagrama construído até o momento, marcamos $\neg\varphi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : F \end{array}$$

Regra do $\neg : V$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi : V \; \surd \\ \vdots \\ | \\ \varphi : F \end{array}$$

Regra do $\neg : F$

$$\neg\varphi \text{ é } F \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } V.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\neg\varphi : F$ ainda não marcada em algum do diagrama construído até o momento, marcamos $\neg\varphi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \end{array}$$

Regra do $\neg : F$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi : F \ \surd \\ \vdots \\ | \\ \varphi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge$: V

$$\varphi \wedge \psi \text{ é } V \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } V \text{ e } \psi \text{ é } V.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \wedge \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \wedge \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \\ \psi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge$: V

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \wedge \psi : V \;\checkmark \\
\vdots \\
| \\
\varphi : V \\
\psi : V
\end{array}
$$

Regra do $\wedge : F$

$$\varphi \wedge \psi \text{ é } F \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } F \text{ ou } \psi \text{ é } F.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \wedge \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \wedge \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\varphi : F \qquad \psi : F$$

Regra do $\wedge : F$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & \varphi \wedge \psi : F \ \surd & \\
 & \vdots & \\
 \varphi : F & & \psi : F
\end{array}
$$

Regra do $\vee$: V

$\varphi \vee \psi$ é V se, e somente se, φ é V ou ψ é V.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \vee \psi$: V ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \vee \psi$: V e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\varphi : V \qquad \psi : V$$

Regra do $\vee : V$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \vee \psi : V \ \checkmark \\
\vdots \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\varphi : V \qquad\quad \psi : V
\end{array}$$

Regra do $\vee : F$

$$\varphi \vee \psi \text{ é } F \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } F \text{ e } \psi \text{ é } F.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \vee \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \vee \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : F \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do $\vee : F$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \vee \psi : F \ \checkmark \\
\vdots \\
| \\
\varphi : F \\
\psi : F
\end{array}
$$

Regra do $\rightarrow$: V

$$\varphi \rightarrow \psi \text{ é } V \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } F \text{ ou } \psi \text{ é } V.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \rightarrow \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \rightarrow \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\varphi : F \qquad \psi : V$$

Regra do $\rightarrow$: V

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \rightarrow \psi : V \ \checkmark \\
\vdots \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\varphi : F & \psi : V
\end{array}
\end{array}
$$

Regra do $\rightarrow$: F

$\varphi \rightarrow \psi$ é F se, e somente se, φ é V e ψ é F.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \rightarrow \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \rightarrow \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando p seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do $\rightarrow$: F

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \rightarrow \psi : F \ \surd \\
\vdots \\
| \\
\varphi : V \\
\psi : F
\end{array}
$$

Regra do $\leftrightarrow$: V

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ é } V \text{ sse } \varphi \text{ e } \psi \text{ possuem o mesmo valor.}$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{cc}
\varphi : V & \varphi : F \\
\psi : V & \psi : F
\end{array}$$

Regra do $\leftrightarrow$: V

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \leftrightarrow \psi : V \;\checkmark \\
\vdots \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\varphi : V & \varphi : F \\
\psi : V & \psi : F
\end{array}
\end{array}
$$

Regra do $\leftrightarrow$: F

$\varphi \leftrightarrow \psi$ é F sse, φ e ψ possuem valores diferentes.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$
\begin{array}{cc}
\varphi : V & \varphi : F \\
\psi : F & \psi : V
\end{array}
$$

Regra do $\leftrightarrow$: F

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \leftrightarrow \psi : F \ \surd \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \varphi : V & \varphi : F \\ \psi : F & \psi : V \end{array}$$

Regra de saturação

Uma árvore já construída é saturada se todas as fórmulas moleculares que ocorrem nela estão marcadas.

Aplique as regras acima (em alguma ordem, de maneira controlada) até que a árvore esteja saturada.

A árvore saturada obtida é $A[\varphi : F]$.

Ramo fechado e ramo aberto

Seja $\varphi \in \text{FLC}$, $A[\varphi : F]$ uma árvore de refutação para $\varphi : F$ e R um ramo de $A[\varphi : F]$.

(1) R é fechado se existem uma variável para sentenças s e nós n_1 e n_2 em R tais que n_1 é $s : V$ e n_2 é $s : F$.

(2) R é aberto se não é fechado.

Método das Árvores de Refutação de LC

Objetivo: Dada uma fórmula φ de LC, determinar se $\models \varphi$.

Método: Consiste dos seguintes passos:

1. Construir uma árvore de refutação (saturada) $A[\varphi : F]$;
2. Examinar todos os ramos de $A[\varphi : F]$.
3. Se todos os ramos de $A[\varphi : F]$ estão fechados, então concluir que $\models \varphi$, se não, concluir que $\not\models \varphi$.

Resultado fundamental

Árvores de refutação são o resultado de um trabalho empreendido ao longo dos anos pelos lógicos C.L. Dodgson (ou Lewis Carroll) (1832-1898), E.W. Beth (1908-1964), R.M Smullyan (1919- –) e K.J.J. Hintikka (1929- –).

No contexto tratado aqui, o seguinte resultado garante que as árvores cumprem o papel para o qual foram projetadas.

Teorema (Smullyan, 1968)
Se $\varphi \in$ FLC, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) $\models \varphi$.

(2) Existe uma árvore de refutação fechada para $\varphi : F$.

Parte 5

Exercícios

Exercício 3

Verifique, pelo Método de Refutação, se as seguintes fórmulas são válidas:

(i) $(p \to q) \vee (p \wedge \neg q)$

(ii) $p \to (q \to \neg p)$

(iii) $[p \vee (q \wedge r)] \to (p \vee q)$

(iv) $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [(p \to r) \vee (q \to r)]$

Exercício 3

(v) $[(p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge s)] \vee [(p \wedge (q \wedge \neg r)) \wedge \neg s]$

(vi) $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

(vii) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Exercício 4

Este exercício ilustra que, apesar da sua aparente simplicidade, as árvores de refutação podem, em geral, serem tão custosas quanto as tabelas de avaliação.

Dê exemplos de fórmulas φ tais que:

(i) $VS[\varphi] = \{p\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 2 ramos.

(ii) $VS[\varphi] = \{p, q\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 4 ramos.

(iii) $VS[\varphi] = \{p, q, r\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 8 ramos.

(iv) $VS[\varphi] = \{p, q, r, s\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 16 ramos.

(v) $VS[\varphi] = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 2^n ramos.