

Lógica dos Conectivos: árvores de refutação

Petruccio Viana

IME-UFF

30 de junho de 2015

Sumário

- ▶ Algoritmos para classificação das fórmulas
- ▶ *Intermezzo* sobre Redução ao Absurdo
- ▶ Método de refutação
- ▶ Árvores de refutação
- ▶ Exercícios

Algoritmos para classificação das fórmulas

Problema da classificação

Problema CLASSIFICAÇÃO:

Dada $\varphi \in \text{FLC}$.

Determinar se φ é tautologia, contingência ou contradição.

Solução Algorítmica:

1. Construir $T[\varphi]$.
2. Examinar $T[\varphi]$.
3. Classificar φ de acordo com o resultado do exame.

Mesmo uma máquina que não pensa pode executar esta solução algorítmica para CLASSIFICAÇÃO.

Tabelas de avaliação

O uso de tabelas é:

- simples,
- controlável,
- mecanizável,

porém, dispendioso, se estamos realmente interessados em resolver o problema mecanicamente.

Alternativa para tabelas

Inicialmente, projetamos dois algoritmos baseados em tabelas para resolver: EQUIVALÊNCIA e CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA FINITÁRIA.

Mas, como o uso de tabelas é dispendioso, elaboramos dois métodos alternativos (não algorítmicos) para estes problemas: **transformação por equivalências** e **demonstrações**.

Vamos, agora, elaborar um método algorítmico alternativo, que parece ser mais adequado para a resolução de CLASSIFICAÇÃO do que o algoritmo baseado em tabelas.

Este método será baseado no **Método de Redução ao Absurdo**, que vamos descrever ligeiramente.

Intermezzo sobre Redução ao Absurdo

Redução ao Absurdo, RA

- (1) Temos uma sentença α que julgamos ser V e cuja veracidade queremos justificar.
- (2) Ao invés de justificar que α é V , assumimos por um momento que α é F , ou seja, que $\neg\alpha$ é V .

Redução ao Absurdo, RA

(3) Utilizando o nosso conhecimento, Σ , **que consideramos ser correto**, em conjunto com $\neg\alpha$, **que assumimos ser correta**, raciocinamos em busca de uma informação $\neg\beta$ que contradiga uma informação β que decorre de Σ .

(4) Assim, temos:

- nosso conhecimento correto Σ ,
- uma justificativa de β a partir de Σ ,
- uma justificativa de $\neg\beta$ a partir de $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$.

Redução ao Absurdo, RA

(5) Nestas condições, Σ não pode justificar $\neg\alpha$, pois se assim fosse, teríamos que Σ justificaria β e $\neg\beta$, contradizendo a confiança que temos na correção de Σ .

(6) Agora, α é V ou F .

Quando assumimos que α é F , chegamos a uma contradição com uma informação que decorre de Σ .

Temos, então, que concluir que α é V .

Exemplos clássicos do uso de RA

- ▶ $\sqrt{2}$ é irracional (Escola Pitagórica).
- ▶ Existem infinitos números primos (Euclides).
- ▶ \mathbb{R} é não enumerável (Cantor).
- ▶ Não existe uma bijeção entre X e $\mathcal{P}(X)$ (Cantor).

Redução ao Absurdo

Quando aplicamos RA, estamos tentando resolver o problema

P_1 : justificar α a partir de Σ

transformando P_1 no problema

P_2 : provar uma contradição a partir de $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$.

- ▶ Para provar que $\sqrt{2}$ é irracional, assumimos que $\sqrt{2}$ é uma fração irredutível e provamos que tanto o seu numerador quanto o seu denominador são pares.

Redução ao Absurdo

- ▶ Para provar que existem infinitos primos, assumimos que p_1, p_2, \dots, p_n são todos os primos e provamos que $(p_1 p_2 \dots p_n) + 1$ tem um fator primo diferente de p_1, p_2, \dots, p_n .
- ▶ Para provar que \mathbb{R} é não enumerável, assumimos que $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ é uma enumeração de \mathbb{R} e exibimos um número real diferente de $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$.
- ▶ Para provar que não existe uma bijeção entre X e $\mathcal{P}(X)$, assumimos que existe uma bijeção de X para $\mathcal{P}(X)$ e exibimos um conjunto que não está na imagem da bijeção.

Redução ao Absurdo

RA corresponde às seguintes estratégias de prova:

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi}.$$

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\psi \wedge (\neg\psi)}.$$

Aspectos positivos de RA

Provar que $\frac{\Sigma}{\psi \wedge (\neg\psi)}$ pode ser mais fácil que provar que $\frac{\Sigma}{\varphi}$.

Temos mais premissas (Σ e $\neg\varphi$) para manipular.

Qualquer contradição a que chegarmos manipulando $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ nos autoriza a concluir que Σ acarreta φ .

Temos mais conclusões para onde guiar nossos esforços.

Aspectos negativos de RA

Provar que $\frac{\Sigma}{\psi \wedge (\neg\psi)}$ pode ser mais difícil que provar que $\frac{\Sigma}{\varphi}$.

A princípio, não temos uma contradição específica como objetivo a ser alcançado manipulando $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

Podemos nos perder tentando elaborar uma prova por RA.

Exercício 1

Descreva em detalhes o Passo 3 da Solução Algorítmica do Problema CLASSIFICAÇÃO.

Exercício 2

Utilizando RA, construa demonstrações para os seguintes argumentos válidos:

$$(i) \quad \frac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q}$$

$$(ii) \quad \frac{\neg p \vee \neg q}{\neg(p \wedge q)}$$

$$(iii) \quad \frac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q}$$

$$(iv) \quad \frac{\neg p \wedge \neg q}{\neg(p \vee q)}$$

Método de Refutação

Método de Refutação

O **método de refutação** tem origem no caso particular em que RA é aplicado ao seguinte problema:

Problema TAUTOLOGIA

Dada $\varphi \in \text{FLC}$.

Determinar se φ é uma tautologia ou não.

Exemplo 1

$\models p \rightarrow p$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models p \rightarrow p$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p\}$ tal que $I^*[p \rightarrow p] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$ e $I^*[p] = F$, uma contradição.

Logo, $\models p \rightarrow p$.

Exemplo 2

$\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$?

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[p \rightarrow (q \rightarrow p)] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$ e $I^*[q \rightarrow p] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$, $I^*[q] = V$ e $I^*[p] = F$.

Daí, $I^*[p] = V$ e $I^*[p] = F$, uma contradição.

Logo, $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Método de Refutação

- (1) Temos uma fórmula $\varphi \in \text{FLC}$ que julgamos ser uma tautologia.
- (2) Ao invés de construir $T[\varphi]$ para verificar que $\models \varphi$, assumimos por um momento que $\not\models \varphi$, ou seja, que φ é F em alguma interpretação I .
- (3) Utilizando os conhecimentos fornecidos pelas regras de formação e avaliação de fórmulas, em conjunto com $I^*[\varphi] = F$, raciocinamos em busca de duas informações contraditórias.

Método de Refutação

- (4) Aplicando o conteúdo expresso nas tabelas dos conectivos “de fora para dentro”, a informação $I^*[\varphi] = F$ é usada para calcularmos os valores das subfórmulas de φ , as subfórmulas das subfórmulas de φ , \dots , até os valores das variáveis para sentenças de φ .
- (5) De acordo com RA, se $\models \varphi$, a informação obtida deve ser conflitante.
Este conflito deve ser expresso na existência de variáveis para sentenças s , tais que $I^*[s] = V$ e $I^*[s] = F$.

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)] = F$.

Daí, $I^*[p \vee q] = V$ e $I^*[\neg p \rightarrow q] = F$.

Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $(I^*[\neg p] = V$ e $I^*[q] = F)$.

Exemplo 3

Temos 2 casos:

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[\neg p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

ou

$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[\neg p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

Observe que o primeiro caso leva à contradição $I^*[p] = V$ e $I^*[p] = F$.

Já o segundo caso leva à contradição $I^*[q] = V$ e $I^*[q] = F$.

Como ambos os casos são contraditórios, $\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$.

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)] = F$.

Daí, $I^*[p \vee q] = V$ e $I^*[p \rightarrow q] = F$.

Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $(I^*[p] = V$ e $I^*[q] = F)$.

Exemplo 4

Temos 2 casos:

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

ou

$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

Observe que o segundo leva a uma contradição, mas o primeiro, não!

Na verdade, observe que o primeiro caso fornece uma interpretação I tal que $I^*[(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)] = F$.

Logo, $\not\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

Assumimos, para uma contradição, que $\not\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$.

Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$ tal que $I^*[(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)] = F$.

Daí, $I^*[p \vee q] = V$ e $I^*[p \wedge q] = F$.

Daí, $(I^*[p] = V$ ou $I^*[q] = V)$ e $(I^*[p] = F$ ou $I^*[q] = F)$.

Exemplo 5

Temos 4 casos:

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[p] = F)$$

ou

$$(I^*[p] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

ou

$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[p] = F)$$

ou

$$(I^*[q] = V \text{ e } I^*[q] = F)$$

Observe que o primeiro e o último levam a contradições, mas os outros dois, não!

Exemplo 5

Na verdade, observe que o segundo e o terceiro casos fornecem, cada um, uma interpretação I tal que $I^*[(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)] = F$.

Logo, $\not\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$.

Árvores de Refutação para LC

A ideia de árvore

A aplicação do Método de Refutação para decidir se uma fórmula é uma tautologia tem, sempre, a mesma estrutura geral, independente da fórmula em questão:

1. Assuma $\varphi : F$.
2. Calcule sucessivamente os valores das subfórmulas das subfórmulas . . . das subfórmulas de φ , considerando todos os casos possíveis que possam ocorrer.
3. Obtenha os valores das variáveis para sentenças.
4. Verifique se em todos os casos possíveis há atribuições de valores contraditórias.

A ideia de árvore

Sendo assim, quando escrevemos *provas por refutação*, é usual, empregarmos uma notação mais econômica que dispensa o uso de frases como:

assuma que

daí

temos que

logo

etc.

Vamos exemplificar esta notação nos exemplos acima e, depois, definí-la precisamente.

Exemplo 1

$$\models p \rightarrow p$$

Assumimos que $p \rightarrow p$ é F :

$$p \rightarrow p : F$$

Exemplo 1

$$\models p \rightarrow p$$

Temos, então, que p é V e p é F :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow p : F \\ p : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 1

$$\models p \rightarrow p$$

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow p : F \checkmark \\ p : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 1

$$\models p \rightarrow p$$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow p : F \quad \checkmark \\ p : V \\ p : F \\ \times \end{array}$$

Exemplo 2

$\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$?

Assumimos que $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ é F :

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) : F$$

Exemplo 2

$$\models p \rightarrow (q \rightarrow p) ?$$

Temos, então, que p é V e $q \rightarrow p$ é F :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \\ p : V \\ q \rightarrow p : F \end{array}$$

Exemplo 2

$$\models p \rightarrow (q \rightarrow p) ?$$

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \checkmark \\ p : V \\ q \rightarrow p : F \end{array}$$

Exemplo 2

$$\models p \rightarrow (q \rightarrow p) ?$$

Temos, agora, que q é V e p é F :

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow p) &: F \checkmark \\ p &: V \\ q \rightarrow p &: F \\ q &: V \\ p &: F \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\models p \rightarrow (q \rightarrow p) ?$$

Marcamos a informação que já foi utilizada:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \checkmark \\ \quad p : V \\ \quad q \rightarrow p : F \checkmark \\ \quad \quad q : V \\ \quad \quad p : F \end{array}$$

Exemplo 2

$$\models p \rightarrow (q \rightarrow p) ?$$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow p) : F \checkmark \\ \quad p : V \\ \quad q \rightarrow p : F \checkmark \\ \quad \quad q : V \\ \quad \quad p : F \\ \quad \quad \quad \times \end{array}$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Assumimos que $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ é F :

$$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Temos, então, que $p \vee q$ é V e $\neg p \rightarrow q$ é F :

$$\begin{aligned}(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) &: F \checkmark \\ p \vee q &: V \\ \neg p \rightarrow q &: F\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Agora, temos que p é V ou q é V . Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso:

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ \neg p \rightarrow q : F \\ \swarrow \quad \searrow \\ p : V \quad q : V \end{array}$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Agora, temos que $\neg p$ é V e q é F . Esta informação é transportada para cada caso:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ \neg p \rightarrow q : F \checkmark \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p : V & q : V \\ \neg p : V & \neg p : V \\ q : F & q : F \end{array} \end{array}$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Temos, agora, em cada caso, que p é F :

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ \neg p \rightarrow q : F \checkmark \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p : V & q : V \\ \neg p : V \checkmark & \neg p : V \checkmark \\ q : F & q : F \\ p : F & p : F \end{array} \end{array}$$

Exemplo 3

$$\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) ?$$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ \neg p \rightarrow q : F \checkmark \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p : V & q : V \\ \neg p : V \checkmark & \neg p : V \checkmark \\ q : F & q : F \\ p : F & p : F \\ \times & \times \end{array} \end{array}$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Assumimos que $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é F :

$$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Temos, então, que $p \vee q$ é V e $p \rightarrow q$ é F :

$$\begin{aligned}(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) &: F \checkmark \\ p \vee q &: V \\ p \rightarrow q &: F\end{aligned}$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Agora, temos que p é V ou q é V . Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ p \rightarrow q : F \\ \swarrow \quad \searrow \\ p : V \quad q : V \end{array}$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Agora, temos que p é V e q é F . Esta informação é transportada para cada caso:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ p \rightarrow q : F \checkmark \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p : V & q : V \\ p : V & p : V \\ q : F & q : F \end{array} \end{array}$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ p \rightarrow q : F \checkmark \\ \begin{array}{cc} p : V & q : V \\ p : V & p : V \\ q : F & q : F \\ & \times \end{array} \end{array}$$

Exemplo 4

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) ?$$

Há uma possibilidade que não leva a contradições. Ela é marcada com um símbolo especial:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ p \rightarrow q : F \checkmark \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} p : V & q : V \\ p : V & p : V \\ q : F & q : F \\ \downarrow & \times \end{array} \end{array}$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

Assumimos que $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é F :

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

Temos, então, que $p \vee q$ é V e $p \wedge q$ é F :

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \checkmark$$

$$p \vee q : V$$

$$p \wedge q : F$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

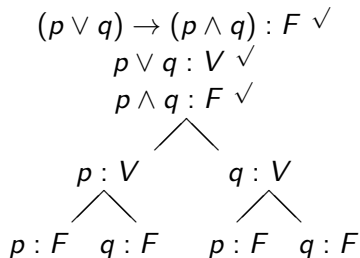
Agora, temos que p é V ou q é V . Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \checkmark \\ p \vee q : V \checkmark \\ p \wedge q : F \\ \swarrow \quad \searrow \\ p : V \quad q : V \end{array}$$

Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

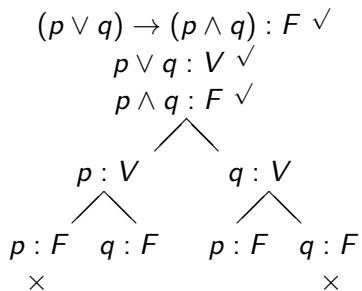
Agora, temos que p é F ou q é F . Fazemos uma bifurcação para contemplar cada caso. Esta informação é transportada para cada caso já contemplado:



Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

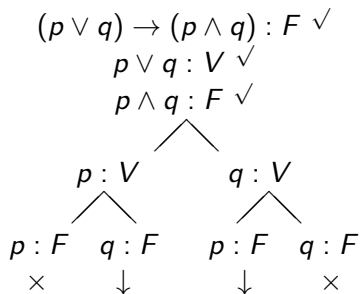
Examinamos a estrutura e marcamos as contradições:



Exemplo 5

$$\models (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) ?$$

Há duas possibilidades que não levam a contradições. Elas são marcadas com um símbolo especial:



Árvores de refutação

Seja $\varphi \in \text{FLC}$.

Uma **árvore de refutação** para $\varphi : F$, denotada $A[\varphi : F]$, é definida por aplicação sucessiva das seguintes **regras de refutação**.

Regra de inicialização

Iniciamos a construção da árvore escrevendo $\varphi : F$.

Diagramaticamente, temos:

$$\varphi : F$$

Regra do $\neg : V$

$\neg\varphi$ é V se, e somente se, φ é F .

Assim, se temos uma ocorrência de $\neg\varphi : V$ ainda não marcada em algum ramo do diagrama construído até o momento, marcamos $\neg\varphi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : F \end{array}$$

Regra do $\neg : V$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi : V \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : F \end{array}$$

Regra do $\neg : F$

$\neg\varphi$ é F se, e somente se, φ é V .

Assim, se temos uma ocorrência de $\neg\varphi : F$ ainda não marcada em algum do diagrama construído até o momento, marcamos $\neg\varphi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \end{array}$$

Regra do $\neg : F$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi : F \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge : V$

$\varphi \wedge \psi$ é V se, e somente se, φ é V e ψ é V .

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \wedge \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \wedge \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \\ \psi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge : V$

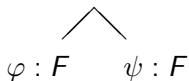
Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \psi : V \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : V \\ \psi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge : F$

$\varphi \wedge \psi$ é F se, e somente se, φ é F ou ψ é F .

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \wedge \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \wedge \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:



Regra do $\wedge : F$

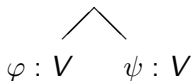
Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \psi : F \quad \checkmark \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi : F \quad \psi : F \end{array}$$

Regra do $\vee : \vee$

$\varphi \vee \psi$ é V se, e somente se, φ é V ou ψ é V .

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \vee \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \vee \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:



Regra do $\vee : V$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \vee \psi : V \quad \checkmark \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi : V \quad \psi : V \end{array}$$

Regra do $\vee : F$

$\varphi \vee \psi$ é F se, e somente se, φ é F e ψ é F .

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \vee \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \vee \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : F \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do $\vee : F$

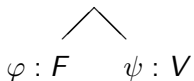
Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \vee \psi : F \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : F \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do \rightarrow : V

$\varphi \rightarrow \psi$ é V se, e somente se, φ é F ou ψ é V .

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \rightarrow \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \rightarrow \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:



Regra do \rightarrow : V

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi : V \checkmark \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \varphi : F \quad \psi : V \end{array}$$

Regra do \rightarrow : F

$\varphi \rightarrow \psi$ é F se, e somente se, φ é V e ψ é F .

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \rightarrow \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \rightarrow \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do \rightarrow : F

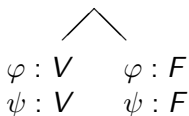
Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi : F \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : V \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do \leftrightarrow : V

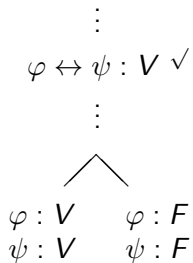
$\varphi \leftrightarrow \psi$ é V sse φ e ψ possuem o mesmo valor.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:



Regra do \leftrightarrow : V

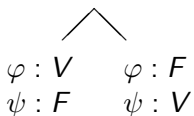
Diagramaticamente, temos:



Regra do \leftrightarrow : F

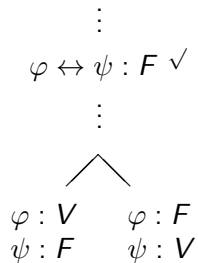
$\varphi \leftrightarrow \psi$ é F sse, φ e ψ possuem valores diferentes.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:



Regra do \leftrightarrow : F

Diagramaticamente, temos:



Regra de saturação

Uma árvore já construída é **saturada** se todas as fórmulas moleculares que ocorrem nela estão marcadas.

Aplice as regras acima (**em alguma ordem, de maneira controlada**) até que a árvore esteja saturada.

A árvore saturada obtida é $A[\varphi : F]$.

Ramo fechado e ramo aberto

Seja $\varphi \in \text{FLC}$, $A[\varphi : F]$ uma árvore de refutação para $\varphi : F$ e R um ramo de $A[\varphi : F]$.

(1) R é **fechado** se existem uma variável para sentenças s e nós n_1 e n_2 em R tais que n_1 é $s : V$ e n_2 é $s : F$.

(2) R é **aberto** se não é fechado.

Método das Árvores de Refutação de LC

Objetivo: Dada uma fórmula φ de LC, determinar se $\models \varphi$.

Método: Consiste dos seguintes passos:

1. Construir uma árvore de refutação (saturada) $A[\varphi : F]$;
2. Examinar todos os ramos de $A[\varphi : F]$.
3. Se todos os ramos de $A[\varphi : F]$ estão fechados, então concluir que $\models \varphi$, se não, concluir que $\not\models \varphi$.

Resultado fundamental

Árvores de refutação são o resultado de um trabalho empreendido ao longo dos anos pelos lógicos C.L. Dodgson (ou Lewis Carroll) (1832-1898), E.W. Beth (1908-1964), R.M Smullyan (1919- –) e K.J.J. Hintikka (1929- –).

No contexto tratado aqui, o seguinte resultado garante que as árvores cumprem o papel para o qual foram projetadas.

Teorema (Smullyan, 1968)

Se $\varphi \in \text{FLC}$, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) $\models \varphi$.

(2) Existe uma árvore de refutação fechada para $\varphi : F$.

Exercícios

Exercício 3

Verifique, pelo Método de Refutação, se as seguintes fórmulas são válidas:

(i) $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)$

(ii) $p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

(iii) $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow (p \vee q)$

(iv) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

Exercício 3

$$(v) [(p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge s)] \vee [(p \wedge (q \wedge \neg r)) \wedge \neg s]$$

$$(vi) [p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

$$(vii) [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

Exercício 4

Este exercício ilustra que, apesar da sua aparente simplicidade, as árvores de refutação podem, em geral, serem tão custosas quanto as tabelas de avaliação.

Dê exemplos de fórmulas φ tais que:

- (i) $VS[\varphi] = \{p\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 2 ramos.
- (ii) $VS[\varphi] = \{p, q\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 4 ramos.
- (iii) $VS[\varphi] = \{p, q, r\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 8 ramos.
- (iv) $VS[\varphi] = \{p, q, r, s\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 16 ramos.
- (v) $VS[\varphi] = \{p_1, \dots, p_n\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 2^n ramos.