Lógica dos Quantificadores: sintaxe e semântica intuitiva (domínios finitos)

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

12 de maio de 2015

Sumário

- Quantificadores sobre domínios finitos
- Exercícios

Domínios finitos

Lógica dos Quantificadores

O próximo passo nos estudos de Lógica Matemática será estudar

- o papel das partículas todo e existe na formação e avaliação de sentenças

  e, consequentemente,

- a formação de sentenças consideradas atômicas.

Nosso objetivo é estender LC para uma lógica mais poderosa que contém as partículas todo e existe.

Todas as decisões que vamos tomar na execução desse projeto são baseadas na semelhança semântica que existe entre o todo e existe e os conectivos e e ou, respectivamente.

As partículas todo e existe são chamadas quantificadores, quando são empregadas da maneira que será descrita agora.

Exemplo 1

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

Maria	*Pedro*
José	*Paulo*

SALA 1

Neste contexto, afirmamos:

todos nesta sala são homens

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 1

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{Maria é homem} & : & F \\ \textit{Pedro é homem} & : & V \\ \textit{José é homem} & : & V \\ \textit{Paulo é homem} & : & V \end{array}$$

concluímos que a sentença é F.

Observe a semelhança do 'todo' com o 'e':

$$\textit{todos nesta sala são homens} \quad : \quad \mathrm{F}$$

$$\begin{array}{rcl} [\textit{Maria é homem}] \wedge [\textit{Pedro é homem}] \wedge & & \\ [\textit{José é homem}] \wedge [\textit{Paulo é homem}] & : & F \end{array}$$

Exemplo 2

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

João	*Pedro*
José	*Paulo*

SALA 2

Neste contexto, afirmamos:

todos nesta sala são homens

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 2

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{João é homem} & : & V \\ \textit{Pedro é homem} & : & V \\ \textit{José é homem} & : & V \\ \textit{Paulo é homem} & : & V \end{array}$$

concluímos que a sentença é V.

Observe a semelhança do ‘todo’ com o ‘e’:

$$\textit{todos nesta sala são homens} \quad : \quad \mathrm{V}$$

$$\begin{array}{lcl} [\textit{João é homem}] \wedge [\textit{Pedro é homem}] \wedge & & \\ \quad [\textit{José é homem}] \wedge [\textit{Paulo é homem}] & : & V \end{array}$$

Generalizando

Dado um domínio finito com m objetos

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

e uma propriedade P sobre estes objetos, a sentença

todos os elementos do domínio possuem a propriedade P

é V quando

$$\begin{array}{c} a_1 \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad V \\ a_2 \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad V \\ \ldots \\ a_m \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad V \end{array}$$

Generalizando

Ou seja, a sentença

$$\textit{todos os elementos do domínio possuem a propriedade } P$$

é V se, e somente se, a conjunção

$$(a_1 \textit{ possui a propriedade } P) \wedge \cdots \wedge (a_m \textit{ possui a propriedade } P)$$

é V.

Generalizando

Analogamente,

todos os elementos do domínio possuem a propriedade P

é F quando

$$\begin{array}{l}
a_1 \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad F \quad \text{ou} \\
a_2 \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad F \quad \text{ou} \\
\qquad\qquad \ldots \\
a_m \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad F
\end{array}$$

Generalizando

Ou seja, a sentença

todos os elementos do domínio possuem a propriedade P

é F se, e somente se, a conjunção

$$(a_1 \textit{ possui a propriedade } P) \wedge \cdots \wedge (a_m \textit{ possui a propriedade } P)$$

é F.

‘Todo’ e ‘e’

A análise semântica acima mostra que, em domínios finitos, uma regra de avalição para o todo deve ser análoga à regra de avaliação para o e

ou seja

em domínios finitos, o todo é equivalente a um e generalizado.

Exemplo 3

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

Maria	*Pedro*
José	*Paulo*

SALA 1

Neste contexto, afirmamos:

existe uma mulher nesta sala

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 3

Como temos:

$$\begin{aligned} \textit{Maria é mulher} &\quad : \quad V \\ \textit{Pedro é mulher} &\quad : \quad F \\ \textit{José é mulher} &\quad : \quad F \\ \textit{Paulo é mulher} &\quad : \quad F \end{aligned}$$

concluímos que a sentença é V.

Observe a semelhança do ‘existe’ com o ‘ou’:

$$\textit{existe uma mulher nesta sala} \quad : \quad \mathrm{V}$$

$$\begin{aligned} &[\textit{Maria é mulher}] \vee [\textit{Pedro é mulher}] \vee \\ &\quad [\textit{José é mulher}] \vee [\textit{Paulo é mulher}] \quad : \quad V \end{aligned}$$

Exemplo 4

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

João	*Pedro*
José	*Paulo*

SALA 1

Neste contexto, afirmamos:

existe uma mulher nesta sala

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 4

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{João é mulher} & : & F \\ \textit{Pedro é mulher} & : & F \\ \textit{José é mulher} & : & F \\ \textit{Paulo é mulher} & : & F \end{array}$$

concluímos que a sentença é F.

Observe a semelhança do ‘existe’ com o ‘ou’:

$$\textit{existe uma mulher nesta sala} \quad : \quad \text{F}$$

$$\begin{array}{rcl} [\textit{João é mulher}] \vee [\textit{Pedro é mulher}] \vee & & \\ [\textit{José é mulher}] \vee [\textit{Paulo é mulher}] & : & F \end{array}$$

Generalizando

Dado um domínio finito com m objetos

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

e uma propriedade P sobre estes objetos, a sentença

existe um elemento do domínio que possui a propriedade P

é V quando

$$\begin{array}{l} a_1 \textit{ possui a propriedade } P \;\text{ é }\; V \quad \text{ou} \\ a_2 \textit{ possui a propriedade } P \;\text{ é }\; V \quad \text{ou} \\ \qquad\qquad\quad \ldots \\ a_m \textit{ possui a propriedade } P \;\text{ é }\; V \end{array}$$

Generalizando

Ou seja, a sentença

existe (ao menos um) elemento do domínio que possui a propriedade P

é V se, e somente se, a disjunção

$$(a_1 \textit{ possui a propriedade } P) \vee \cdots \vee (a_m \textit{ possui a propriedade } P)$$

é V.

Generalizando

Analogamente,

existe um elemento do domínio que possui a propriedade P

é F quando

$$\begin{array}{c} a_1 \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad F \\ a_2 \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad F \\ \cdots \\ a_m \textit{ possui a propriedade } P \quad \text{é} \quad F \end{array}$$

Generalizando

Ou seja, a sentença

existe (ao menos um) elemento no domínio que possui a propriedade P

é F se, e somente se, a disjunção

$$(a_1 \textit{ possui a propriedade } P) \vee \cdots \vee (a_m \textit{ possui a propriedade } P)$$

é F.

‘Existe’ e ‘ou’

A análise semântica acima mostra que, em domínios finitos, uma regra de avalição para o existe corresponde à regra de avaliação para o ou

ou seja

em domínios finitos, o existe é equivalente a um ou generalizado.

Parte 2

Exercícios: toda caminhada começa com o primeiro passo!!!

Exercício 1

1. Dados 5 pombos e 3 casas, simbolize as sentenças a seguir, utilizando a legenda:

$$p_{ij} \quad : \quad \textit{o pombo } i \textit{ está na casa } j$$

onde $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2, 3$.

(i) *algum pombo está em alguma casa*
(ii) *algum pombo está em todas as casas*
(iii) *todos os pombos estão em alguma casa*
(iii) *todos os pombos estão em todas as casas*

(ii) *não existe um pombo que esteja em mais de uma casa*

(iii) *existe pelo menos uma casa com dois pombos*

Exercício 1

(a) Dados 5 pombos e 3 casas (de pombos), simbolize as sentenças a seguir, utilizando a legenda:

$$p_{ij} \quad : \quad \textit{o pombo } i \textit{ está na casa } j$$

onde $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2, 3$.

(i) *algum pombo está em alguma casa*

(ii) *algum pombo está em todas as casas*

(iii) *todos os pombos estão em alguma casa*

(iv) *todos os pombos estão em todas as casas*

Exercício 1

(v) *cada pombo está em alguma casa*

(vi) *nenhum pombo está em mais de uma casa*

(vii) *existe ao menos uma casa com dois pombos*

Exercício 2

O Princípio das Casas de Pombo, PCB, estabelece que *se a quantidade de pombos é maior do que a quantidade de casas, então:*

> *se todo pombo está em alguma casa e não existe um pombo que esteja em mais de uma casa, então existe pelo menos uma casa com dois pombos.*

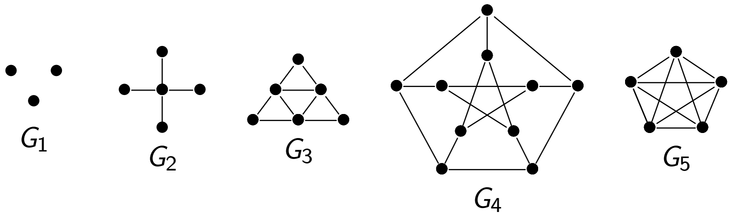
(a) Simbolize o PCB para 5 pombos e 3 casas.

(b) Simbolize o PCB para n pombos e m casas, ou seja, dadas uma certa quantidade n de pombos e uma certa quantidade m de casas, encontre uma fórmula de LC tal que, quando $n > m$, a fórmula é verdadeira em todas as interpretações.

Exercício 3

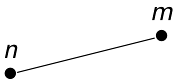
Um grafo consiste de

- um conjunto finito de pontos, chamados vértices;
- linhas, chamadas arestas, ligando estes pontos, de modo que nenhum ponto esteja ligado a si mesmo.



Exercício 3

Um grafo é <u>*n*-colorível</u> se podemos atribuir números naturais em $\{1, 2, \ldots, n\}$ a seus vértices de modo que vértices ligados por arestas tenham números diferentes associados.



$n \neq m$

Se um grafo G é n-colorível e $m > n$, então G também é m-colorível.

Exercício 3

(a) Considere os grafos G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5 apresentados no slide anterior.
Mostre que:

(i) G_1 é 1-colorível;

(ii) Para cada $i = 2, 3, 4, 5$, o grafo G_i é i-colorível mas não é $(i-1)$-colorível.

(b) Para cada $n \geq 6$, determine um grafo G que é n-colorível mas não é $(n-1)$-colorível.

Exercício 4

(a) Dado um grafo G com 5 vértices, a, b, c, d e e, simbolize as sentenças a seguir, utilizando a legenda:

$$\begin{array}{lcl} p_{ij} & : & i \text{ e } j \text{ estão ligados} \\ q_{ij} & : & i \text{ e } j \text{ têm mesma cor} \end{array}$$

onde $i, j = a, b, c, d, e$.

(i) *G é 1-colorível*

(ii) *G é 2-colorível*

(iii) *G é 3-colorível*

(iv) *G é 4-colorível*

Exercício 4

Para cada item acima, você deve encontrar uma fórmula φ de LC tal que, dado um valor V ou F para as variáveis p_{ij} — ou seja, dado o grafo G — existe uma associação de valores para as variáveis q_{ij} de modo que φ seja V.

(b) Dado um grafo G com m vértices, simbolize *G é n-colorível*.