

Lógica dos Quantificadores: sintaxe

Renata de Freitas e Petrucio Viana

IME, UFF
18 de junho de 2015

Sumário

1. Princípios sintáticos
2. Alfabeto de LQ
3. Fórmulas de LQ
4. Variáveis livres, variáveis ligadas e sentenças
5. Exercícios

Princípios sintáticos

Sintaxe da LQ

A lógica que estamos definindo é uma extensão de LC e é chamada de **Lógica dos Quantificadores**, LQ.

Tudo o que foi dito anteriormente é formalizado nas definições que seguem.

As definições obedecem aos mesmos padrões que as definições correspondentes em LC, mas são um pouco mais complicadas, devido às ocorrências das variáveis e dos quantificadores.

Sintaxe da LQ

A **sintaxe** de LQ está baseada nos seguintes princípios:

- ▶ As sentenças são classificadas em atômicas ou moleculares.
- ▶ As sentenças atômicas não possuem ocorrências de conectivos nem de quantificadores.
- ▶ Os enunciados moleculares são formados a partir dos enunciados atômicos pelo uso dos conectivos e dos quantificadores.

- ▶ As sentenças atômicas são analisadas como tendo uma das formas:
 - ▶ **Fato atômico**: sentenças que por alguma razão não vamos analisar (isto é como em LC: sentenças que não analisamos são classificadas como atômicas);
 - ▶ **Propriedade aplicada a um objeto**: sentenças que afirmam a pertinência de um objeto a um conjunto;
 - ▶ **Relação aplicada a mais de um objeto**: sentenças que afirmam a interrelação de vários objetos, segundo algum critério.

Exemplo 1

(a) *as ruas A, B, C e D formam um quarteirão*

Relação aplicada a mais de um objeto

(b) *Maria é executiva*

Propriedade aplicada a um objeto

(c) *chove torrencialmente
é necessário que Maria pegue o avião
às 7h de hoje Maria vai estar presa no engarrafamento*

Fatos-atômicos

Alfabeto de LQ

Alfabeto de LQ

O **alfabeto** de LQ consiste dos seguintes símbolos:

- (i) *Variáveis para sentenças*: p, q, r, \dots
(indexadas ou não)
- (ii) *Variáveis para indivíduos*: x, y, z, \dots
(indexadas ou não)
- (iii) *Constantes para indivíduos*: a, b, c, \dots
(indexadas ou não)
- (iv) *Variáveis para propriedades ou relações*: P, Q, R, \dots
(indexadas ou não)

Alfabeto de LQ

(v) *Conectivos*: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
(os mesmos de LC)

(vi) *Quantificadores*: \forall , \exists

(vii) *Sinais de pontuação*: (,)

Assumimos que os símbolos acima são distintos dois a dois e que nenhum símbolo é uma sequência de outros símbolos.

Observação importante

Os conjuntos das variáveis e constantes são denotados de acordo com a seguinte tabela:

| | |
|---|----|
| variáveis para sentenças | VS |
| variáveis para indivíduos | VI |
| constantes para indivíduos | CI |
| variáveis para propriedades e relações | VR |

LQ é uma família de sistemas semelhantes, parametrizada pelos conjuntos de variáveis e constantes que estão sendo adotados.

Significado intuitivo

Variáveis para sentenças: sentenças (atômicas) da Língua Portuguesa ou da Linguagem Matemática.

Variáveis para indivíduos: objetos não especificados no contexto, que pertencem a um determinado universo de discurso.

Constantes para indivíduos: objetos especificados no contexto, que pertencem a um determinado universo de discurso.

Variáveis para propriedades: subconjuntos de objetos pertencentes a um determinado universo de discurso.

Significado intuitivo

Variáveis para relações: relações entre objetos pertencentes a um determinado universo de discurso.

| conectivo | <i>nome</i> | <i>significado</i> |
|-------------------|-------------------------|--------------------------------------|
| \neg | símbolo de negação | não (é o caso que) |
| \wedge | símbolo de conjunção | e (simultaneamente) |
| \vee | símbolo de disjunção | ou (inclusivo) |
| \rightarrow | símbolo de implicação | se...então (causa e consequência) |
| \leftrightarrow | símbolo de biimplicação | se, e somente se (é o mesmo que) |

Significado intuitivo

| quantificador | <i>nome</i> | <i>significado</i> |
|---------------|--------------------------------------|---------------------------|
| \forall | símbolo de quantificação universal | para todo objeto |
| \exists | símbolo de quantificação existencial | existe ao menos um objeto |

Os quantificadores são chamados carinhosamente de **para todo** e **existe**.

Fórmulas de LQ

Vamos, agora, apresentar uma definição indutiva das fórmulas de LQ, isto é, das palavras formadas com os símbolos do alfabeto de LQ que consideraremos como fazendo sentido.

Chamamos de **termo** a qualquer constante ou variável para indivíduos.

Termos são denotados genericamente pela letra t (indexada ou não).

O conjunto dos termos é $TRM = VI \cup CI$.

Observe que **termos não são fórmulas**.

Fórmulas de LQ

Definição O conjunto das **fórmulas** de LQ, denotado FLQ, é definido pelas seguintes regras:

1. Cada variável para sentença é uma fórmula.
2. Se t é um termo e X é uma variável para propriedades, então $X(t)$ é uma fórmula;
3. Se t_1, t_2, \dots, t_n são termos e X é uma variável para relações, então $X(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é uma fórmula;

Fórmulas de LQ

4. Se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;
5. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas;
6. Se v é uma variável para indivíduos e φ é uma fórmula, então $(\forall v\varphi)$ e $(\exists v\varphi)$ são fórmulas.

Assumimos que nenhum objeto é uma fórmula a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Exemplos de fórmulas

p , $P(a)$, $P(z)$

$Q(a, x)$, $R(a, x, b, y)$

$P(x)$, $P(y)$

$(\forall x P(x))$

$(P(y) \rightarrow (\forall x P(x)))$

$(\exists y (P(y) \rightarrow (\forall x P(x))))$

Atômicas e moleculares em LQ

Definição Sejam $\varphi, \psi \in \text{FLQ}$, $v \in \text{VI}$ e $X \in \text{VR}$.

1. Dizemos que φ é **atômica** se é uma variável sentencial, ou é da forma $X(t)$, onde t é uma constante ou variável para indivíduos, ou é da forma $X(t_1, t_2, \dots, t_n)$, onde t_1, t_2, \dots, t_n são variáveis ou constantes para indivíduos.
2. Dizemos que $(\forall v\varphi)$ é uma **quantificação universal** de φ .
3. Dizemos que $(\exists v\varphi)$ é uma **quantificação existencial** de φ .

Variáveis livres, variáveis ligadas e sentenças

Variáveis livres e ligadas

Fórmulas podem expressar propriedades de objetos e relações entre objetos (específicos ou não), pertencentes a um universo de discurso, ou **domínio**.

$F(a)$: *Almir é feliz*

$A(a, x)$: *Almir é amigo dele*

Variáveis livres e ligadas

Fórmulas também podem expressar propriedades do próprio domínio, fazendo referências a seus elementos.

$\forall xF(x)$: *todos são felizes*, ou seja,
o domínio é formado apenas por seres felizes

$\exists y\forall xA(x, y)$: *alguém ama a todos*, ou seja,
o domínio tem um ser que ama a
todos os seres do domínio

Variáveis livres e ligadas

A diferença crucial entre fórmulas como

$$F(a) \quad , \quad F(x)$$

que expressam propriedades de objetos, e fórmulas como

$$\forall xF(x) \quad , \quad \exists xF(x)$$

que expressam propriedades do domínio, está na maneira como os quantificadores são aplicados às variáveis.

Variáveis ligadas

Definição Sejam $v \in VI$ e $\varphi, \psi \in FLQ$.

1. Dizemos que v **ocorre ligada** em $(\forall v\varphi)$ e em $(\exists v\varphi)$.
2. Dizemos que v **ocorre ligada** em ψ se v ocorre ligada em alguma subfórmula de ψ .

Variáveis livres

Definição Sejam $v \in VI$, $X, Y \in VR$ e $\varphi, \psi \in FLQ$.

1. Dizemos que v **ocorre livre** em $X(v)$.
2. Dizemos que v **ocorre livre** em $T(t_1, t_2, \dots, t_n)$ se existe i tal que v é t_i .
3. Dizemos que v **ocorre livre** em φ se v ocorre livre em alguma subfórmula de φ .

Sentenças em LQ

Definição

Seja φ uma fórmula de LQ. Dizemos que φ é uma **sentença** se não possui ocorrências livres de variáveis.

Exercícios

Exercício 1

Simbolizar em LQ.

- (i) *Marcelo é dono de uma Ferrari.*
- (ii) *A lua é um planeta e o Sol também.*
- (iii) *n é um número natural e, portanto, é real.*
- (iv) *João não é marido de Ana.*
- (v) *Maria não é mãe de Isabel e Ana.*
- (vi) *2 é par e n é primo.*
- (vii) *Nem o Sol é uma estrela, nem Marte é um satélite.*
- (viii) *Se Petrúcio é o professor de Lógica, a aula é chata.*
- (ix) *Mariana é inteligente pois sabe todas as coisas.*
- (x) *A raiz quadrada de 2 não é um número racional.*

- (xi) *Todos são estudiosos, ou dão sorte nas provas.*
- (xii) *Para alguém ser aprovado, é necessário que todos estudem.*
- (xiii) *Uma condição necessária e suficiente para que duas retas dadas sejam paralelas é que elas tenham interseção vazia.*
- (xiv) *Petrúcio raciocina bem somente se sabe conceitos de Lógica.*
- (xv) *Uma condição necessária para que um quadrilátero seja quadrado é que seja redondo.*
- (xvi) *Uma condição suficiente para que um número natural seja par é que não seja ímpar.*
- (xvii) *A condição de ser estudioso é suficiente para que ele aprenda a matéria.*
- (xviii) *Se x é primo e é diferente de 2, então é par.*
- (xix) *Se a é ímpar e b é par, então a e b são primos entre si.*
- (xx) *Se x e y são números pares, então sua soma também é um número par.*

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 15.
2. Resolver os exercícios da Lista 15.