GAN00166: Lógica para Ciência da Computação

Texto da Aula 16

Interpretaçãoes em LQ

Petrucio Viana
Departamento de Análise, IME–UFF

Sumário

Neste texto, abordamos o conceito de *quantificador* (Seção 1); e estendemos os conceitos de *enunciados componentes* (Seção 2), *legenda* (Seção 3), e *simbolização baseada em uma legenda* (Seção 4), para os enunciados quantificados, principalmente aqueles que possuem uma única ocorrência de quantificador (no início) e só possuem ocorrências de propriedades. Introduzimos, também, os *símbolos para os quantificadores* (Seção 1).

Depois de estudarmos este texto, vamos ser capazes de: reconhecer os componentes de um enunciado quantificado (Exercícios 1 e 2); determinar uma legenda para a simbolização de um enunciado quantificado (Exercício 3); simbolizar um enunciado quantificado usando uma legenda (Exercícios 4 e 5); e simbolizar um enunciado obtido por aplicação de conectivos a enunciados atômicos e enunciados quantificados (Exercício 6).

1 Quantificadores: simbolização e sintaxe

Recordamos que o estudo da *formação* de enunciados consiste em, dado um enunciado, analisá-lo: (1) classificando-o como atômico ou molecular e, quando molecular, (2) explicitar a maneira como ele é formado. E que a principal ferramenta empregada no estudo da formação de enunciados é a *simbolização*.

Já temos símbolos para os conectivos, vamos agora atribuir símbolos aos quantificadores.

> As partículas
>
> para todo , existe ao menos um
>
> são chamadas de *quantificadores lógicos*, quando são usadas na formação de enunciados da maneira que será especificada.

A simbolização dos quantificadores é feita do seguinte modo:

> Simbolizamos os quantificadores de acordo com a tabela:
>
> | quantificador | símbolo |
> |---|---|
> | para todo | $\forall$ |
> | existe | $\exists$ |
>
> Estes são os únicos símbolos adotados para a simbolização dos quantificadores.

O processo de simbolização de enunciados que contém ocorrências de quantificadores é mais complexo do que o de simbolização de enunciados que contém apenas conectivos. Principalmente, quando os quantificadores ocorrem *aninhados* ou *negados*, em enunciados como:

Nem todos gostam de alguém que gosta de todos que não gostam de ninguém.

Mas, existem certas diretrizes que, quando respeitadas, nos ajudam na simbolização de enunciados com quantificadores. Vamos, agora, descrever as mais importantes delas, exemplificando-as apenas em enunciados que possuem uma única ocorrência de quantificador (no início) e só possuem ocorrências de propriedades (não possuem ocorrências de relações).

Sintaxe dos quantificadores

Quanto à sua aplicação na formação de enunciados, os quantificadores seguem as seguintes regras bem determinadas:

Regra de formação do <u>para todo</u>:

O quantificador

para todo

em conjunto com uma variável v, é aplicado a um enunciado $\varphi(v)$, que possui ao menos uma ocorrência livre da variável v (e que pode possuir ocorrências de outras variáveis) e forma o enunciado

$$\forall v \varphi(v),$$

chamado a *generalização* de $\varphi(v)$.

O para todo também pode ser escrito como todo , todos , cada etc.

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo $\forall v(\varphi(v))$ ou $\forall v[\varphi(v)]$, ou ainda $\forall v\{\varphi(v)\}$.

Regra de formação do existe:

O quantificador

existe ao menos um

em conjunto com uma variável v, é aplicado a um enunciado $\varphi(v)$, que possui ao menos uma ocorrência livre da variável v (e que pode possuir ocorrências de outras variáveis) e forma o enunciado

$$\exists v \varphi(v),$$

chamado a *existencialização* de $\varphi(v)$.

O existe ao menos um também pode ser escrito como existe , existem , há etc.

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo $\exists v(\varphi(v))$ ou $\exists v[\varphi(v)]$, ou ainda $\exists v\{\varphi(v)\}$.

Exemplo 1 Os enunciados

$\forall x$ (x está calado),
$\exists y$ (y está calado $\wedge$ y tem o que dizer),
$\forall z$ (z é derivável)
$\exists u$ [$\neg$ (u é derivável) $\wedge$ u tem infinitas descontinuidades)]

são uma generalização, uma existencialização, uma generalização e uma existencialização, respectivamente. $\square$

As regras de formação dos quantificadores deixam claro que cada aplicação de um quantificador deve estar associada a uma ocorrência livre de variável, no enunciado que está sendo quantificado.

2 Enunciados componentes

O primeiro passo para a simbolização é determinar os enunciados componentes.

Seja φ um enunciado que possui um única ocorrência de quantificador e somente ocorrências de propriedades.

Para determinar os enunciados componentes de φ, devemos explicitar todas as propriedades que ocorrem em φ e reescrevê-las usando variáveis, da maneira que será agora especificada.

Exemplo 2 (a) A generalização

todos são mortais (1)

possui uma única ocorrência da propriedade

ser mortal.

Assim, o único componente de (1) pode ser escrito como

x é mortal.

(b) A existencialização

existem alienígenas (2)

possui uma única ocorrência da propriedade

ser alienígena.

Assim, o único componente de (2) pode ser escrito como

y é alienígena.

(c) A generalização

cada uma é uma viúva-negra (3)

possui uma única ocorrência da propriedade

ser viúva-negra.

Assim, o único componente de (3) pode ser escrito como

z é viúva-negra.

(d) A existencialização

há falsos-profetas (4)

possui uma única ocorrência da propriedade

ser falso-profeta.

Assim, o único componente de (4) pode ser escrito como

u é falso-profeta.

(e) A generalização

todos os homens são mortais (5)

possui ocorrência das propriedades

ser homem
ser mortal.

Assim, os dois componentes de (5) podem ser escritos como

x é homem
x é mortal.

(f) A existencialização

existem pessoas que valem a pena (6)

possui ocorrência das propriedades

ser pessoa
valer a pena.

Assim, os dois componentes de (6) podem ser escritos como

y é pessoa
y vale a pena.

(g) A generalização

todos os atletas amadores têm contusões (7)

possui ocorrência das propriedades

ser atleta
ser amador
ter contusão.

Assim, os três componentes de (7) podem ser escritos como

z é atleta
z é amador
z tem contusão.

(h) A existencialização

existem pessoas de Minas que vão à praia (8)

possui ocorrência das propriedades

ser pessoa
ser de Minas
ir à praia.

Assim, os três componentes de (8) podem ser escritos como

u é pessoa
u é de Minas
u vai à praia.

2.1 Observação

Observação 1 Usualmente, quando estamos explicitando as variáveis que ocorrem nos componentes, as variáveis podem ser escolhidas arbitrariamente. Ou seja, quando escrevemos um enunciado componente, a princípio, qualquer variável pode ser utilizada.

Por exemplo, o componente do Exemplo 2(a) poderia ter sido escrito como

y é mortal

Mas, uma vez escolhidas as variáveis que vão ser usadas, não podemos mais mudá-las durante a análise lógica do enunciado.

Observação 2 Observações análogas as já feitas, quando estudamos enunciados componentes de enunciados formados apenas por aplicação dos conectivos, se aplicam no caso dos quantificadores:

(1) Como os componentes são enunciados atômicos, eles não possuem ocorrências nem de conectivos nem de quantificadores.

(2) Ocorrências distintas de um mesmo enunciado atômico, em um dado enunciado, não devem ser identificadas, isto é, devem ser consideradas como componentes distintas.

2.2 Exercícios

Exercício 1 Determinar os enunciados componentes de cada enunciado abaixo, segundo o que foi feito no Exemplo 2.

(i) todos gostam de sorvete
(ii) alguém gosta de Romeu
(iii) todos gostam de cinema e pipoca
(iv) existem pensadores radicais
(v) todos os sapos são verdes
(vi) existem pássaros nadando
(vii) todos os pagantes estão sentados e se divertindo
(viii) existem animais selvagens que estão em cativeiro

Exercício 2 Determinar os enunciados componentes de cada enunciado: *Os enunciados* (i) *a* (vi) *não possuem ocorrências de quantificadores.*

(i) ele passou
(ii) ela estudou
(iii) ele estudou e ela passou
(iv) ela estudou e não passou
(v) ele aprendeu e, por isso, passou
(vi) ela não aprendeu mas, mesmo assim, passou
(vii) entre as aranhas, somente as tarântulas e as viúvas-negras são venenosas
(viii) todos ou só alguns dos marsupiais têm bolsas e saltam
(ix) nenhum peixe tem asas a não ser que ele pertença à família dos *exocoetidae*
(x) alguns organismos são cordatos e outros são moluscos, mas nenhum deles é ambos cordato e molusco
(xi) animais se comportam normalmente quando não estão sendo vigiados
(xii) nenhum pardal constrói um ninho, a menos que esteja acasalando

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 1*:** (i) Propriedade: gostar de sorvete. Componente: x gosta de sorvete. (ii) Propriedade: gostar de Romeu. Componente: y gosta de Romeu. (iii) Propriedades: gostar de cinema e gostar de pipoca. Componentes: z gostar de cinema e z gosta de pipoca. (iv) Propriedade: ser pensador e ser radical. Componente: u é pensador e u é radical. (v) Propriedades: ser sapo e ser verde. Componentes: x é sapo e x é verde. (vi) Propriedades: ser pássaro e estar nadando. Componentes: y é pássaro e y está nadando. (vii) Propriedades: ser pagante, estar sentado e estar se divertindo. Componentes: z é pagante, z está sentado e z está se divertindo. (viii) Propriedades:

ser animal, ser selvagem e estar em cativeiro. Componentes: u é animal, u é selvagem e u está em cativeiro. ***Resolução do Exercício 2*:** (i) Propriedade: passar. Componente: x passou. (ii) Propriedades: estudar. Componente: y estudou. (iii) Propriedades: estudar e passar. Componentes: z estudou e u passou. Não podemos usar a mesma variável, pois os itens são independentes. (iv) Propriedades: estudar e passar. Componentes: x estudou e x passou. Devemos usar a mesma variável, pois ambos os componentes se referem à mesma pessoa. (v) Propriedades: aprender e passar. Componentes: y aprendeu e y passou. (vi) O mesmo do item (v). (vii) Propriedades: ser aranha, ser tarântula, ser viúva-negra e ser venenosa. Componentes: x é aranha, x é tarântula, x é viúva-negra e x é venenosa. (viii) Propriedades: ser marsupial, ter bolsa e saltar. Componentes: y é marsupial, y tem bolsa, y salta. (ix) Propriedades: ser peixe, ter asas e pertencer a família dos *exocoetidae*. Componentes: z é peixe, z tem asas e z pertence à família dos *exocoetidae*. (x) Propriedades: ser organismo, ser cordato e ser molusco. Componentes: u é organismo, u é cordato e u é molusco. (xi) Propriedades: ser animal, se comportar normalmente e estar sendo vigiado. Componentes: v é animal, v se comporta normalmente e v está sendo vigiado. (xii) Propriedades: ser pardal, construir um ninho e estar acasalando. Componentes: w é pardal, w constroi um ninho e w está acasalando.

3 Legendas

O segundo passo para a simbolização é a definição de uma *legenda de simbolização*. Antes de definir esta noção, vamos analisá-la através de exemplos.

Exemplo 3 (a) De acordo com o Exemplo 2(a), uma legenda para o enunciado

todos são mortais

pode ser:

$m(x)$: x é mortal.

Para elaborar esta legenda, usamos uma *letra sugestiva* seguida da variável x entre parênteses, para simbolizar o componente

x é mortal.

(b) De acordo com o Exemplo 2(b), uma legenda para o enunciado

existem alienígenas

pode ser:

$a(y)$: y é alienígena.

Para elaborar esta legenda, usamos uma *letra sugestiva* seguida da variável y entre parênteses, para simbolizar o componente

y é alienígena.

(c) De acordo com o Exemplo 2(c), uma legenda para o enunciado

cada uma é uma viúva-negra

pode ser:

$n(z)$: z é viúva-negra.

(d) De acordo com o Exemplo 2(d), uma legenda para o enunciado

há falsos-profetas

pode ser:

$f(u)$: u é falso-profeta.

(e) De acordo com o Exemplo 2(e), uma legenda para o enunciado

todos os homens são mortais

pode ser:

$h(x)$: x é homem
$m(x)$: x é mortal.

(f) De acordo com o Exemplo 2(f), uma legenda para o enunciado

existem pessoas que valem a pena

pode ser:

$p(y)$: y é pessoa
$v(y)$: y vale a pena.

(g) De acordo com o Exemplo 2(g), uma legenda para o enunciado

todos os atletas amadores têm contusões

pode ser:

$a(z)$: z é atleta
$m(z)$: z é amador
$c(z)$: z tem contusão.

(h) De acordo com o Exemplo 2(h), uma legenda para o enunciado

existem pessoas de Minas que vão à praia

pode ser:

$p(u)$: u é pessoa
$q(u)$: u é de Minas
$r(u)$: u vai à praia.

Aqui, decidimos usar *letras padrão* como p, q, r, etc.

Podemos, agora, definir a noção de legenda para enunciados cujos componentes são da forma propriedade aplicada a variável:

(1) Sejam $\varphi_1(v_1)$, $\varphi_2(v_2)$, $\ldots$, $\varphi_n(v_n)$ enunciados atômicos, distintos dois a dois, onde v_1, v_2, $\ldots$, v_n são variáveis (não necessariamente distintas duas a duas).

Uma *legenda* para $\varphi_1(v_1)$, $\varphi_2(v_2)$, $\ldots$, $\varphi_n(v_n)$ é um esquema da forma:

$$\begin{array}{rcl} L_1(v_1) & : & \varphi_1(v_1) \\ L_2(v_2) & : & \varphi_2(v_2) \\ & \vdots & \\ L_n(v_n) & : & \varphi_n(v_n) \end{array}$$

onde $L_1, L_2, \ldots, L_n$ são n letras distintas, escolhidas dentre as letras a, b, c, $\ldots$, p, q, r, $\ldots$, de acordo com a necessidade.

(2) Seja φ um enunciado.

Uma *legenda* para φ é uma legenda para os componentes de φ.

3.1 Observação

Observação 3 Na elaboração de uma legenda, devemos ter cuidado para que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(1) Para todo índice i, cada L_i deve ser da forma $X(v)$, onde X é uma das letras $a, b, c, \ldots, p, q, r, \ldots$ e v é uma variável.

(2) Na determinação das letras $L_1, L_2, \ldots, L_n$, devemos usar letras "novas" de acordo com a necessidade do uso de símbolos diferentes.

3.2 Exercício

Exercício 3 Para cada enunciado abaixo, faça o que se pede: (a) Determine seu(s) componente(s). *Observe que alguns quantificadores foram escritos de uma forma estilizada. Por isto, quando for necessário, reescreva o enunciado, de modo a tornar a sua estrutura mais aparente.* (b) Baseado na solução do item (a), defina uma legenda para o enunciado.

(i) ela não vai viajar
(ii) ele e ela são professores
(iii) todo aluno estuda
(iv) alguns alunos não comparecem
(v) nem todo professor é bem pago
(vi) alguns alunos gostam de MB e não gostam de MD
(vii) todo professor que vai ao Pólo faz palestra
(viii) há alunos que vão à tutoria mas não prestam atenção
(ix) nem todo professor vai viajar e visitar o Pólo
(x) há professores que não se preparam e nem explicam a matéria

Antes de ler a resolução, tente resolver o exercício usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 3*:** (i) Componente: x vai viajar. Legenda: $\begin{array}{lcl} v(x) & : & x \text{ vai viajar.} \end{array}$ (ii) Componentes: x é professor e y é professora. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é professor} \\ q(y) & : & y \text{ é professora.} \end{array}$ (iii) Componentes: z é aluno e z estuda. Uma legenda é: $\begin{array}{lcl} a(z) & : & z \text{ é aluno} \\ e(z) & : & z \text{ estuda.} \end{array}$ (iv) Componentes: u é aluno e u comparece. Legenda: $\begin{array}{lcl} a(u) & : & u \text{ é aluno} \\ c(u) & : & u \text{ comparece.} \end{array}$ (v) Componentes: x é professor e x é bem pago. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é professor} \\ b(x) & : & x \text{ é bem pago.} \end{array}$ (vi) Componentes: y é aluno, y gosta de MB e y gosta de MD. Legenda: $\begin{array}{lcl} a(y) & : & y \text{ é aluno} \\ b(y) & : & y \text{ gosta de MB} \\ d(y) & : & y \text{ gosta de MD.} \end{array}$ (vii) Componentes: z é professor, z vai ao Pólo e z faz palestra. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(z) & : & z \text{ é professor} \\ q(z) & : & z \text{ vai ao Pólo} \\ r(z) & : & z \text{ faz palestra.} \end{array}$ (viii) Componentes: u é aluno, u vai à tutoria e u presta atenção. Legenda: $\begin{array}{lcl} a(u) & : & u \text{ é aluno} \\ t(u) & : & u \text{ vai à tutoria} \\ p(u) & : & u \text{ presta atenção.} \end{array}$ (ix) Componentes: x é professor, x vai viajar e x vai visitar o Pólo. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é professor} \\ q(x) & : & x \text{ vai viajar} \\ r(x) & : & x \text{ vai visitar o Pólo.} \end{array}$ (x) Componentes: y é professor, y se prepara e y explica a matéria. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(y) & : & y \text{ é professor} \\ q(y) & : & y \text{ se prepara} \\ r(y) & : & y \text{ explica a matéria.} \end{array}$

4 Simbolização de enunciados com um quantificador no início

Após definir uma legenda, o último passo para a simbolização se desdobra nos seguintes:

Se o enunciado possui uma única ocorrência de uma única propriedade, aplicamos o quantificador correspondente à propriedade reescrita, de acordo com a variável usada na legenda.

Exemplo 4 (a) O enunciado

todos são mortais

afirma que cada objeto em questão tem a propriedade

ser mortal.

Assim, de acordo com a legenda

$$m(x) : x \text{ é mortal},$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\forall x[m(x)]$$

(b) O enunciado

existem alienígenas

afirma que ao menos um objeto em questão tem a propriedade

ser alienígena.

Assim, de acordo com a legenda

$$a(y) : y \text{ é alienígena},$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\exists y[a(y)]$$

(c) O enunciado

cada uma é uma viúva negra

afirma que cada objeto em questão tem a propriedade

ser viúva negra.

Assim, de acordo com a legenda

$$n(z) : z \text{ é viúva-negra},$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\forall z[n(z)].$$

(d) O enunciado

há falsos-profetas

afirma que cada objeto em questão tem a propriedade

ser falso-profeta.

Assim, de acordo com a legenda

$$f(u) : u \text{ é falso-profeta},$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\exists u[f(u)].$$

> Se o enunciado possui mais de uma ocorrência de alguma propriedade (lembre-se, estamos tratando apenas de enunciados que possuem uma única ocorrência de quantificador no início e somente ocorrências de propriedades), devemos:
>
> (1) determinar a maneira como os enunciados componentes estão estruturados, por aplicações sucessivas dos conectivos,
>
> (2) simbolizar o enunciado formado a partir dos componentes por aplicação dos conectivos, de acordo com a legenda,
>
> (3) aplicar o quantificador correspondente ao enunciado simbolizado, de acordo com a variável usada na legenda.

Exemplo 5 (e) O enunciado

todos os homens são mortais

afirma que cada objeto em questão que tem a propriedade

ser homem

também tem a propriedade

ser mortal.

Ou seja, que para cada valor que x assume entre os objetos em questão, a implicação

x é homem $\to$ x é mortal

é verdadeira.

Assim, de acordo com a legenda

$h(z)$: z é homem
$m(z)$: z é mortal,

ele pode ser simbolizado por:

$$\forall x[h(x) \to m(x)].$$

(d) O enunciado

existe ao menos uma pessoa que vale a pena

afirma que algum objeto e, questão tem as propriedades

ser pessoa

e

valer a pena,

simultaneamente.

Ou seja, que para algum valor que y assume entre os objetos em questão, a conjunção

$$y \text{ é pessoa} \wedge y \text{ vale a pena}$$

é verdadeira.

Assim, de acordo com a legenda

$$p(y) : y \text{ é pessoa}$$
$$v(y) : y \text{ vale a pena},$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\exists y[p(y) \wedge v(y)].$$

(e) O enunciado

todos os atletas amadores têm contusões

afirma que cada objeto em questão que tem simultaneamente as propriedades

ser atleta

e

ser amador

também tem a propriedade

ter contusão.

Ou seja, que para cada valor que z assume entre os objetos em questão, a implicação

$$(z \text{ é atleta} \wedge z \text{ é amador}) \to z \text{ tem contusão}$$

é verdadeira.

Assim, de acordo com a legenda

$$a(z) : z \text{ é atleta}$$
$$m(z) : z \text{ é amador}$$
$$c(z) : z \text{ tem contusão},$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\forall z[(a(z) \wedge m(z)) \to c(z)]$$

(f) O enunciado

existem pessoas de Minas que vão à praia

afirma que algum objeto em questão tem as propriedades

ser pessoa,
ser de Minas

e

ir à praia

simultaneamente.

Ou seja, que para algum valor que u assume no domínio de quantificação, a conjunção

u é pessoa $\wedge$ u é de Minas $\wedge$ u vai à praia

é verdadeira. Assim, de acordo com a legenda

$p(u)$: u é pessoa
$q(u)$: u é de Minas
$r(u)$: u vai à praia,

ele pode ser simbolizado por:

$$\exists u[p(u) \wedge q(u) \wedge r(u)]$$

4.1 Observações

Observação 4 Um dilema que pode acontecer na simbolização de enunciados que só possuem ocorrências de propriedades se dá quando temos uma conjunção de propriedades formando um enunciado a ser simbolizado. Por exemplo, nos enunciados:

ele é brasileiro e tem orgulho,
y é número natural,
F é figura plana convexa
ela é mulher que tem filhos e trabalha.

Neste caso, consideramos cada propriedade isoladamente e reescrevemos a conjunção de modo a produzir uma legenda adequada.

Em particular, os enunciados acima podem ser reescritos como:

x é brasileiro $\wedge$ x tem orgulho,
y é número $\wedge$ y é natural,
z é figura $\wedge$ z é plana $\wedge$ z é convexa
u é mulher $\wedge$ u tem filhos $\wedge$ u trabalha,

respectivamente.

Observação 5 Enunciados da forma

todos os P são Q

onde P e Q correspondem a propriedades arbitrárias (podendo ser expressas por enuciados atômicos ou moleculares) são muito comuns na Linguagem Matemática.

Por exemplo, as seguintes são frases típicas da Matemática:

todos os triângulos são figuras
todos os quadrados são polígonos regulares
todo número primo maior do que 2 é ímpar
todos os números reais positivos têm raiz quadrada
todo polinômio de grau ímpar tem raízes reais.

A frequência com que enunciados deste tipo aparecem nos textos matemáticos leva os mais precipitados a considerarem que enunciados que possuem uma única ocorrência de para todo no início, devem sempre ser simbolizados na forma

$$\forall v(\varphi(v) \to \psi(v))$$

onde $\varphi(v)$ e $\psi(v)$ são simbolizações adequadas dos enunciados componentes envolvidos.

Embora isto seja verdade na grande maioria dos casos de interesse, isto não é verdade sempre, como ilustram os seguintes enunciados típicos:

todos são jovens e inocentes
tudo é quadrado ou redondo
um número é par se, e somente se, é divisível por 2,

que possuem as seguintes formas:

$$\forall x((\varphi(x) \wedge \psi(x))$$
$$\forall x((\varphi(x) \vee \psi(x))$$
$$\forall x((\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)),$$

respectivamente.

Observação 6 Analogamente, enunciados da forma

existem P que são Q

onde P e Q correspondem a propriedades arbitrárias (podendo ser expressas por enuciados atômicos ou moleculares) são muito comuns na Linguagem Matemática.

Por exemplo, as seguintes são frases típicas da Matemática:

existem triângulos retângulos
existem losangos que são quadrados
existe um número primo par
existem números reais negativos que têm raiz quadrada
existem polinômios que não possuem raízes inteiras.

Novamente, dada a grande frequência de enunciados deste tipo, alguns podem ser levados a considerar que enunciados que possuem uma única ocorrência de existe no início devem sempre ser simbolizados na forma

$$\exists v(\varphi(v) \wedge \psi(v))$$

onde $\varphi(v)$ e $\psi(v)$ são simbolizações adequadas dos enunciados componentes envolvidos.

Embora isto seja verdade na grande maioria dos casos de interesse, isto não é verdade sempre, como ilustram os seguintes enunciados típicos:

existem pulgas ou carrapatos
alguns quando coagidos reagem
tem gente que ajuda o próximo se, e somente se, é paga para isto,

que possuem as seguintes formas:

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$$
$$\exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$$
$$\exists x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)),$$

respectivamente.

4.2 Exercícios resolvidos

Exercício 4 Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) todos são covardes
(ii) alguns são corajosos
(iii) todas as mulheres são meigas
(iv) alguns homens são brutos
(v) todos os quadrados são losangos e retângulos
(vi) alguns triângulos são isósceles e escalenos
(vii) todas as figuras planas têm duas dimensões
(viii) algumas figuras tridimensionais só têm duas dimensões
(ix) cada número que eu escolhi é primo
(x) certos números não são primos e nem compostos

Exercício 5 Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) todos são jovens e inocentes
(ii) tudo é quadrado ou redondo
(iii) um número é par se, e somente se, é divisível por 2
(iv) existem pulgas ou carrapatos
(v) alguns quando coagidos reagem
(vi) tem quem ajuda o próximo se, e somente se, é pago para isto

Exercício 6 Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) nem todos são honestos
(ii) não existe aquecimento global
(iii) todos sorriem, mas alguns são tristes
(iv) alguns sobrevivem ou todos os esforços são em vão
(v) se todos praticam esportes, alguns são campeões

Antes de ler as resoluções, tente resolver os exercícios usando os conceitos estudados.

***Resolução do Exercício 4*:** (i) Legenda: $c(x)$: x é covarde. Simbolização: $\forall x(c(x))$. (ii) Legenda: $q(y)$: y é corajoso. Simbolização: $\exists y(q(y))$. (iii) Legenda: $\begin{array}{rcl} r(z) & : & z \text{ é mulher} \\ s(z) & : & z \text{ é meiga.} \end{array}$ Simbolização: $\forall z(r(z) \to s(z))$. (iv) Legenda: $\begin{array}{rcl} h(u) & : & u \text{ é homem} \\ b(u) & : & u \text{ é bruto.} \end{array}$ Simbolização: $\exists u(h(u) \wedge b(u))$. (v) Neste caso, uma legenda é: $\begin{array}{rcl} q(x) & : & x \text{ é quadrado} \\ l(x) & : & x \text{ é losango} \\ r(x) & : & x \text{ é retângulo.} \end{array}$ Simbolização: $\forall x[q(x) \to (l(x) \wedge r(x))]$. (vi) Legenda: $\begin{array}{rcl} t(y) & : & y \text{ é triângulo} \\ i(y) & : & y \text{ é isósceles} \\ e(y) & : & y \text{ é escaleno.} \end{array}$ Simbolização: $\exists y[t(y) \wedge i(y) \wedge e(i)]$. (vii) Legenda: $\begin{array}{rcl} f(z) & : & z \text{ é figura} \\ p(z) & : & z \text{ é plana} \\ d(z) & : & z \text{ tem duas dimensões.} \end{array}$ Simbolização: $\forall z[(f(z) \wedge p(z)) \to d(z)]$. (viii) Legenda: $\begin{array}{rcl} f(u) & : & u \text{ é figura} \\ t(u) & : & u \text{ é tridimensional} \\ d(u) & : & u \text{ só tem duas dimensões.} \end{array}$ Simbolização: $\exists u[f(u) \wedge t(u) \wedge d(u)]$. (ix) Pode ser reescrito como todo número que eu escolhi é primo. Legenda: $\begin{array}{rcl} n(x) & : & x \text{ é número} \\ e(x) & : & x \text{ é escolhido por mim} \\ p(x) & : & x \text{ é primo.} \end{array}$ Simbolização: $\forall x[(n(x) \wedge e(x)) \to p(x)]$. (x) Pode ser reescrito como existem números que não são primos e não são compostos. Legenda: $\begin{array}{rcl} n(y) & : & y \text{ é número} \\ p(y) & : & y \text{ é primo} \\ c(y) & : & y \text{ é composto.} \end{array}$ Simbolização: $\exists y(n(y) \wedge (\neg p(y)) \wedge (\neg c(y)))$. ***Resolução do Exercício 5*:** (i) Legenda: $\begin{array}{rcl} j(x) & : & x \text{ é jovem} \\ i(x) & : & x \text{ é inocente.} \end{array}$ Afirma que cada objeto em questão é jovem e é inocente. Simbolização: $\forall x(j(x) \wedge i(x))$. (ii) Legenda: $\begin{array}{rcl} q(y) & : & y \text{ é quadrado} \\ r(y) & : & y \text{ é redondo.} \end{array}$ Afirma que cada objeto em questão é quadrado ou é redondo. Simbolização: $\forall y(q(y) \vee r(y))$. (iii) Legenda: $\begin{array}{rcl} n(z) & : & z \text{ é número} \\ p(z) & : & z \text{ é par} \\ d(z) & : & z \text{ é divisível por dois.} \end{array}$ Afirma que para cada objeto em questão, ser número par é o mesmo que ser divisível por dois. Simbolização: $\forall z[(n(z) \wedge p(z)) \leftrightarrow d(z)]$. (iv) Legenda: $\begin{array}{rcl} p(x) & : & x \text{ é pulga} \\ c(x) & : & x \text{ é carrapato.} \end{array}$ Afirma que algum objeto em questão é uma pulga ou é um carrapato. Simbolização: $\exists x(p(x) \vee c(x))$. (v) Legenda: $\begin{array}{rcl} c(y) & : & y \text{ é coagido} \\ r(y) & : & y \text{ reage.} \end{array}$ Afirma que algum objeto em questão, quando é coagido, reage. Simbolização: $\exists y(c(y) \to r(y))$. (vi) $\begin{array}{rcl} a(z) & : & z \text{ ajuda o próximo} \\ p(z) & : & z \text{ é pago para ajudar ao próximo.} \end{array}$ Afirma que para algum objeto em questão, ajudar o próximo é o mesmo que ser pago para fornecer esta ajuda. Simbolização: $\exists z(a(z) \leftrightarrow p(z))$. ***Resolução do Exercício 6*:** (i) Reescrita: não é o caso que: todos são honestos. Legenda: $h(x)$: x é honesto. Simbolização: $\neg[\forall x(h(x))]$, ou: $\neg\forall x(h(x))$. (ii) Reescrita: não é o caso que: existe aquecimento global. Legenda: $a(y)$: y é aquecimento global. Simbolização: $\neg[\exists y(a(y))]$, ou: $\neg\exists y(a(y))$. (iii) Reescrita: (para todo z: z sorri) e (existe u: u é triste). Temos que usar variáveis diferentes. Legenda: $\begin{array}{rcl} r(z) & : & z \text{ sorri} \\ s(u) & : & u \text{ é triste.} \end{array}$ Simbolizado como: $[\forall z(r(z))] \wedge [\exists u(s(u))]$, ou: $\forall z(r(z)) \wedge \exists u(s(u))$. (iv) Reescrita: (existe x: x sobrevive) ou (para todo y: se y é esforço, então y é em vão). Temos que usar variáveis diferentes. Legenda: $\begin{array}{rcl} s(x) & : & x \text{ sobrevive} \\ e(y) & : & y \text{ é esforço} \\ v(y) & : & y \text{ é em vão.} \end{array}$ Simbolização: $(\exists x(s(x))) \vee (\forall y(e(y) \to v(y)))$. (v) Reescrita: se (para todo z: z pratica esporte), então (existe u: u é campeão). Temos que usar variáveis diferentes. Legenda:

$p(z)$	:	z pratica esporte	Simbolização: $\forall z(p(z)) \rightarrow \exists u(c(u))$, ou: $\forall z(p(z)) \rightarrow \exists u(c(u))$.
$c(u)$	:	u é campeão.	

© 2015 Márcia Cerioli e Petrucio Viana