Definições por indução e por recursão

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

12 de março de 2015

Sumário

- Lógica formal e principais sistemas lógicos
- Definições indutivas
- Definições recursivas
- Exercícios

Parte 1

Lógica formal e principais sistemas lógicos

A lógica formal

Um dos objetivos da lógica formal é a mecanização do raciocínio,

isto é,

> *a "obtenção de nova informação a partir de informações prévias" por meio de recursos que podem ser controlados e automatizados.*

Exemplo 1

(a) Se temos as informações:

Sócrates está disposto a visitar Platão, se Platão está disposto a visitá-lo.
Porém, Platão não está disposto a visitar Sócrates, se Sócrates está disposto a visitá-lo.
Mas, Platão está disposto a visitar Sócrates, se Sócrates não está disposto a visitá-lo.

Podemos concluir que Sócrates está disposto a visitar Platão?

Exemplo 1

(b) Se temos a explicação confusa:

Se eu não bebo cerveja no jantar, eu sempre como peixe.
Quando eu bebo cerveja e como peixe no jantar, eu não tomo sorvete.
Além disso, se eu tomo sorvete ou não bebo cerveja, eu nunca como peixe.

Podemos simplificá-la para entender o que está dito?

Aspectos do raciocínio

Qualquer forma de raciocínio tem, pelo menos, dois aspectos:

1. a representação da informação "prévia" em uma linguagem adequada;
2. a aplicação de mecanismos de processamento à informação representada, para a obtenção da informação "nova".

Estrutura geral dos sistemas lógicos

Todo sistema lógico — aparato formal para a representação e obtenção da informação — tem, pelo menos, duas partes:

1. uma linguagem, por meio da qual enunciados (proposições, sentenças) de outras linguagens podem ser expressas;
2. um mecanismo de inferência, por meio do qual argumentações (deduções, justificativas, provas) efetuadas em outras linguagens podem ser checadas e argumentações podem ser efetuadas no próprio sistema.

Principais sistemas lógicos 1

Os sistemas lógicos mais básicos (mais fundamentais) que têm sido empregados na análise lógica do raciocínio matemático são:

Lógica dos Conectivos
(ou Sentencial, ou Proposicional),

Lógica Equacional,

Lógica dos Quantificadores
(ou de Predicados, ou de Primeira Ordem),

Lógica Monádica de Segunda Ordem,

Lógica de Segunda Ordem.

Principais sistemas lógicos 2

Além destes, os que têm se mostrado mais adequados para a análise lógica de questões levantadas pela computação são:

- Lógica Modal,
- Lógica Temporal,
- Lógica Multivalorada,
- Lógica Difusa (*Fuzzy*).

O que vamos estudar

Vamos estudar apenas os dois sistemas mais básicos e que são considerados como introdutórios a qualquer domínio da lógica formal:

- a Lógica dos Conectivos (LC),
- a Lógica dos Quantificadores (LQ).

Como vamos estudar

A partir do final do século XVIII, G. Boole (1815 – 1864), G. Frege (1848 – 1925), e muitos outros, passaram a desenvolver estudos lógicos utilizando ferramentas matemáticas.

Os conceitos lógicos são definidos rigorosamente.

As propriedades dos sistemas lógicos são justificadas rigorosamente.

Parte 2

Definições indutivas

Definições de conjuntos

Usualmente, conjuntos são definidos de duas maneiras:

1. pela listagem (ou uma *indicação da listagem*) dos seus elementos;

2. através de uma propriedade aplicada a um outro conjunto.

Exemplo 2

(a) Conjunto dos números naturais não nulos, $\mathbb{N}^*$, por listagem:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

(b) Conjunto dos números pares não nulos, $\mathbb{P}^*$, por listagem:

$$\mathbb{P}^* = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$$

(c) Dado $\mathbb{N}^*$, podemos definir $\mathbb{P}^*$ por propriedade:

$$\mathbb{P}^* = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ é par}\}$$

Definições por listagem $\times$ definições por propriedades

Definições por listagem só são adequadas para conjuntos finitos e, na prática, apenas para conjuntos finitos “pequenos”.

Definições por propriedades (aplicadas a conjuntos previamente dados) podem ser usadas para definir qualquer conjunto.

Dependendo da complexidade da propriedade empregada, definições por propriedade podem ser difíceis de utilizar.

Definições indutivas

Definições indutivas tentam aproveitar o melhor dos dois mundos:

- listagens ou propriedades simples;
- propriedades expressas por procedimentos que levem a controle e automação dos elementos que estão no conjunto.

Conjuntos definidos por indução

Dado um conjunto U, dizemos que $C \subseteq U$ é definido por indução quando são dados:

1. Um subconjunto $B \subseteq C$, chamado base, cujos elementos são considerados como elementos *básicos* de C.

2. Um procedimento que pode ser aplicado iteradamente para construir todos os elementos de C a partir dos elementos básicos.

3. A condição de que nenhum objeto está em C a não ser que possa ser obtido a partir dos elementos básicos por um número finito de aplicações do procedimento de construção descrito.

Exemplo $\mathbb{N}^*$

O conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ dos números naturais não nulos pode ser definido por indução do seguinte modo:

1. Tome o conjunto $\{1\}$, contendo o elemento básico 1, como base.
2. Construa todos os outros elementos de $\mathbb{N}^*$ a partir do 1 por aplicação iterada da operação $n \mapsto n + 1$, de somar uma unidade.

Exemplo $\mathbb{P}^*$

O conjunto $\mathbb{P}^* = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ dos números pares não nulos pode ser definido por indução do seguinte modo:

1. Tome o conjunto $\{2\}$, contendo o elemento básico 2, como base.
2. Construa todos os outros elementos de $\mathbb{P}^*$ a partir do 2 por aplicação iterada da operação $n \mapsto n + 2$, de somar duas unidades.

Exemplo $\mathbb{N}^*$ com base Π

Um mesmo conjunto pode ser definido por indução de vários modos, considerando-se:

- bases diferentes

  e/ou

- procedimentos diferentes.

Exemplo $\mathbb{N}^*$ com base Π

O conjunto $\mathbb{N}^*$ também pode ser definido por indução do seguinte modo, onde Π é o conjunto dos números primos.

1. Tome o conjunto $\Pi \cup \{1\}$, contendo os números primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ e a unidade 1, como base.
2. Construa todos os outros elementos de $\mathbb{N}^*$ a partir dos números primos por aplicação iterada da operação $(m, n) \mapsto mn$, de multiplicação.

Neste exemplo, o conjunto base é infinito e foi definido por uma indicação da listagem dos seus elementos.

Redação de definições indutivas

Uma definição indutiva é um texto escrito estritamente de acordo com as seguintes diretrizes:

- Inicialmente, escrevemos

  Definição *Os [nome genérico dos elementos que queremos definir] são os [nome do genérico dos elementos do conjunto universo considerado] obtidos por aplicação das seguintes regras:*

Redação de definições indutivas

- No primeiro item, apresentamos a base, indicando quais são seus elementos. Podemos escrever frases como:

  Os elementos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são [nome genérico dos elementos que queremos definir].

  quando a base é finita e "pequena", ou

  Os [nome genérico dos elementos da base] são [nome genérico dos elementos que queremos definir]

  quando a base é "muito grande" ou infinita.

Redação de definições indutivas

- No(s) item(ns) seguinte(s), descrevemos o procedimento para a construção de novos elementos a partir dos elementos da base. Usualmente, este procedimento é definido a partir de operações. Para cada operação

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \mapsto \mathrm{op}(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

podemos escrever frases como:

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são [nome genérico dos elementos que queremos definir] , então $\mathrm{op}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um [nome genérico dos elementos que queremos definir].

Redação de definições indutivas

- Finalmente, para encerrar a definição, escrevemos uma frase como:

> *Assumimos que nenhum objeto é um [nome genérico dos elementos que queremos definir] a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.*

Exemplo $\mathbb{N}^*$

Definição *Os números naturais não nulos são os números reais obtidos por aplicações das seguintes regras:*

1. *O número* 1 *é um número natural não nulo.*

2. *Se* n *é um número natural não nulo, então* $n + 1$ *é um número natural não nulo.*

Assumimos que nenhum objeto é um número natural não nulo a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Exemplo $\mathbb{P}^*$

Definição *Os números pares não nulos são os números obtidos por aplicações das seguintes regras:*

1. *O número* 2 *é um número par não nulo.*

2. *Se n é um número par não nulo, então $n+2$ é um número par não nulo.*

Assumimos que nenhum objeto é um número par não nulo a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Exemplo $\mathbb{N}^*$ com base Π

Definição *Os números naturais não nulos são os números obtidos por aplicações das seguintes regras:*

1. *Os números primos e o número* 1 *são números naturais não nulos.*

2. *Se n e m são números naturais não nulos, então nm é um número natural não nulo.*

Assumimos que nenhum objeto é um número natural não nulo a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Parte 3

Definições Recursivas

Legibilidade única

Seja C um conjunto definido indutivamente a partir de uma base por aplicação de um procedimento.

Dizemos, grosseiramente, que esta definição de C tem legibilidade única se cada elemento de C é gerado de uma única maneira a partir dos elementos básicos pelo procedimento de geração de elementos.

Conceitos definidos por recursão

- Definições por indução levam a um *método de prova* de proposições que valem para todos os elementos do conjunto definido: o *Método de Prova por Indução*.

- Definições por indução que têm legibilidade única levam a um *método de definição* de conceitos que podem ser aplicados a todos os elementos do conjunto definido.

Seja C um conjunto apresentado por uma definição indutiva que tem legibilidade única.

Para definir um conceito para todos os elementos de C, basta fazer o seguinte:

1. Definir o conceito para todos os elementos da base.

2. Mostrar como o conceito é definido para o elemento genérico $\mathrm{op}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, supondo que está definido para os elementos genéricos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e usando estas definições.

Exemplo 3

O fatorial de um número natural n é o número

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ \cdots \ \cdot n$$

Por exemplo:

$$1! = 1,$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \text{ etc.}$$

De acordo com a definição apresentada no Exemplo $\mathbb{N}^*$, este conceito pode ser definido como segue.

Definição recursiva de fatorial

Seja $n \in \mathbb{N}^*$.

Devemos explicar:

— como calcular o fatorial de n, quando $n = 1$

— como calcular o fatorial de $n = m + 1$, dado que já sabemos calcular o fatorial de m.

1. Se $n = 1$, então $n! = 1$.

2. Se $n = m + 1$, então $n! = (m + 1)m!$.

Exemplo 4

Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que um número é *primo com n* se ele e n não têm fatores primos em comum.

Por exemplo, para $n = 2$:

1 é primo com 2,

2 não é primo com 2,

3 é primo com 2,

4 não é primo com 2,

5 é primo com 2, etc.

De acordo com a definição apresentada no Exemplo $\mathbb{N}^*$ com base Π, este conceito pode ser definido como segue.

Definição recursiva de primalidade relativa

Seja $n \in \mathbb{N}^*$.

Dado $m \in \mathbb{N}^*$, devemos explicar:

- Como o conceito se comporta quando $m = 1$.
- Como o conceito se comporta quando m é primo.
- Como o conceito se comporta para $m = m_1 m_2$, dado que já sabemos como o conceito se comporta para m_1 e m_2.

1. Se $m = 1$, então $m \perp n$.
2. Se $m \in \Pi$, então $m \perp n$ se, e somente se, $m \neq n$.
3. Se $m = m_1 m_2$, então: $m \perp n$ se, e somente se, $m_1 \perp n$ e $m_2 \perp n$.

Redação de definições recursivas

Uma definição recursiva é um texto escrito estritamente de acordo com as seguintes diretrizes:

- Inicialmente, escrevemos

> **Definição.** *Seja x um elemento de C. O [nome do conceito que está sendo definido], denotado por [notação introduzida para referência ao conceito que está sendo definido], é definido recursivamente pelas seguintes regras:*

Redação de definições recursivas

- Em seguida, definimos o conceito para os elementos da base:

Se x está em B, então [descrição do conceito que queremos definir aplicado a x, usando a notação introduzida acima].

Redação de definições recursivas

- No(s) item(ns) seguinte(s), apresentamos a descrição do conceito quando aplicado a um elemento $\mathrm{op}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, considerando que o conceito já está definido para os elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

  Se $x = \mathrm{op}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, então [descrição do conceito que queremos definir aplicado a* x*, usando a notação introduzida anteriormente, baseada na definição do conceito para* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*].*

Teremos um item como esse para cada operação construtora op.

Definição recursiva de fatorial

Definição Seja $n \in \mathbb{N}^*$. O *fatorial de n*, denotado por $n!$, é definido recursivamente pelas seguintes regras:

1. Se $n = 1$, então $n! = 1$.
2. Se $n = m + 1$, então $n! = (m + 1)m!$.

Definição recursiva de primalidade relativa

Definição Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Dado $m \in \mathbb{N}^*$, o conceito *m é primo com n*, denotado $m \perp n$, é definido recursivamente pelas seguintes regras:

1. Se $m = 1$, então $m \perp n$.
2. Se $m \in \Pi$, então $m \perp n$ se, e somente se, $m \neq n$.
3. Se $m = m_1 m_2$, então: $m \perp n$ se, e somente se, $m_1 \perp n$ e $m_2 \perp n$.

Parte 4

Ueba!!! Exercícios!!!

Exercícios!

Baseado na definição apresentada no Exemplo $\mathbb{N}^*$ e nas diretrizes de redação de definições recursivas, defina os seguintes conceitos por recursão:

(i) O dobro de um número natural n, denotado $\mathrm{D}(n)$.

(ii) A paridade de um número natural n, denotada $\mathrm{P}(n)$.

Informamos que a paridade de um número natural n é definida (não por recursão é claro), do seguinte modo:

$$\mathrm{P}(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mais exercícios!!

1. Ler o texto da Aula 1.

2. Resolver a lista de exercícios da Aula 1.