Lógica dos quantificadores: demonstrações com *para todo*

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

18 de junho de 2015

Sumário

Parte 1

Eliminação do $\wedge$

Exemplo 1

Considere o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow s \\ p \wedge q \\ (s \wedge r) \rightarrow t \\ q \rightarrow r \\ \hline t \end{array}$$

Este argumento é válido?

Exemplo 1

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$p \to s$
P	2.	$p \wedge q$
P	3.	$(s \wedge r) \to t$
P	4.	$q \to r$
2	5.	p
1, 5	6.	s
2	7.	q
4, 7	8.	r
6, 8	9.	$s \wedge r$
3, 9	10.	t ■

Eliminação do $\wedge$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Com certeza, usamos:

$$\wedge\text{-Ea} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \text{e} \qquad \wedge\text{-Eb} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Eliminação do $\wedge$

Estas regras são chamadas de Regras de Eliminação do $\wedge$.

“De eliminação”, pois, por intermédio delas, podemos obter:
(1) componentes de conjunções;
(2) fórmulas que possuem uma ocorrência a menos do $\wedge$.

Parte 2

Eliminação do $\forall$

Eliminação do $\forall$

Como vimos, o $\forall$ pode ser interpretado como um $\wedge$ generalizado.

É de se esperar, então, que nas demonstrações que envolvem o $\forall$ possamos utilizar uma regra análoga à Regra de Eliminação do $\wedge$.

Mas, como seria esta regra de eliminação do $\forall$?

Exemplo 2

Considere o seguinte argumento:

Todos os sapos têm asas.
Caco não tem asas.
Logo, *Caco não é um sapo.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$$
\begin{array}{lll}
S(\_\_) & : & \_\_ \text{ é sapo} \\
A(\_\_) & : & \_\_ \text{ tem asas} \\
c & : & \textit{Caco}
\end{array}
$$

Exemplo 2

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{l} \forall x(S(x) \rightarrow A(x)) \\ \neg A(c) \\ \hline \neg S(c) \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Exemplo 2

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\forall x(S(x) \to A(x))$
P	2.	$\neg A(c)$
1	3.	$S(c) \to A(c)$
2, 3	4.	$\neg S(c)$ ■

Eliminação do $\forall$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Um deles pode ser formulado do seguinte modo:

> *A partir de uma generalização, podemos obter a fórmula generalizada para qualquer constante.*

Ou seja, sendo $v \in \mathrm{VI}$, $c \in \mathrm{CI}$ e $\varphi \in \mathrm{FLQ}$, temos:

$$\forall\text{-E} \quad \frac{\forall v \varphi}{\varphi_v^c}$$

Eliminação do $\forall$

Esta regra é chamada Regra de Eliminação do $\forall$ (para constantes).

Por intermédio dela, obtemos
(1) cada "componente" de uma "conjunção generalizada";
(2) fórmulas que possuem uma ocorrência a menos do $\forall$.

Exemplo 3

Considere o seguinte argumento:

> *Qualquer aluno não gosta de todos os professores.*
> *Cada aluno gosta de todos os alunos.*
> Assim, *Petrúcio não é aluno, se é professor.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$A(\_\_)$	:	__ *é aluno*
$G(\_\_\,,\,\_\_)$	:	__ *gosta de* __
$P(\_\_)$	:	__ *é professor*
p	:	*Petrúcio*

Exemplo 3

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{l} \forall x(A(x) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow \neg G(x,y))) \\ \forall x(A(x) \rightarrow \forall y(A(y) \rightarrow G(x,y))) \\ \hline P(p) \rightarrow \neg A(p) \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Antes de prosseguir, tente realmente determinar se o argumento é válido ou não.

Exemplo 3

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\forall x(A(x) \to \forall y(P(y) \to \neg G(x,y)))$
P	2.	$\forall x(A(x) \to \forall y(A(y) \to G(x,y)))$
P	3.	$P(p)$
P	4.	$A(p)$
1	5.	$A(p) \to \forall y(P(y) \to \neg G(p,y))$
2	6.	$A(p) \to \forall y(A(y) \to G(p,y))$
4, 5	7.	$\forall y(P(y) \to \neg G(p,y))$
4, 6	8.	$\forall y(A(y) \to G(p,y))$
7	9.	$P(p) \to \neg G(p,p)$
8	10.	$A(p) \to G(p,p)$
3, 9	11.	$\neg G(p,p)$
4, 9	12.	$G(p,p)$
11, 12	13.	$G(p,p) \wedge \neg G(p,p)$ ■

Parte 3

Introdução do $\wedge$

Exemplo 4

Considere o seguinte argumento:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \wedge t) \\ p \wedge u \\ t \rightarrow \neg r \\ r \vee s \\ v \vee \neg u \\ \hline s \wedge v \end{array}$$

Este argumento é válido?

Exemplo 4

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$p \rightarrow (q \wedge t)$
P	2.	$p \wedge u$
P	3.	$t \rightarrow \neg r$
P	4.	$r \vee s$
P	5.	$v \vee \neg u$
2	6.	p
1, 2	7.	$q \wedge t$
7	8.	t
3, 8	9.	$\neg r$
4, 9	10.	s
2	11.	u
5, 11	12.	v
10, 12	13.	$s \wedge v$ ■

Introdução do $\wedge$

Quais os passos lógicos/regras de inferência que foram usados na demonstração acima?

Com certeza, usamos o seguinte:

$$\wedge\text{-I} \quad \frac{\begin{array}{l}\varphi\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$

Introdução do $\wedge$

Esta regra é chamada de Regra de Introdução do $\wedge$.

"De introdução", pois, por intermédio dela, podemos obter
(1) conjunções a partir das componentes;
(2) uma fórmula que possui uma ocorrência a mais do $\wedge$.

Parte 4

Introdução do $\forall$

Como vimos, o $\forall$ pode ser interpretado como um $\wedge$ generalizado.

É de se esperar, então, que nas demonstrações que envolvem o $\forall$ possamos utilizar uma regra análoga à Regra de Introdução do $\wedge$.

Mas, como seria estas regra de introdução do $\forall$?

Exemplo 5

Considere o seguinte argumento:

Todos os homens são santos.
Nenhum santo é malvado.
Daí, *nenhum homem é malvado.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$$\begin{array}{lcl} H(\_\_) & : & \_\_ \textit{ é homem} \\ S(\_\_) & : & \_\_ \textit{ é santo} \\ M(\_\_) & : & \_\_ \textit{ é malvado} \end{array}$$

Exemplo 5

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{c} \forall x(H(x) \to S(x)) \\ \forall x(S(x) \to \neg M(x)) \\ \hline \forall x(H(x) \to \neg M(x)) \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Exemplo 5

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\forall x(H(x) \to S(x))$
P	2.	$\forall x(S(x) \to \neg M(x))$
1	3.	$H(a) \to S(a)$
2	4.	$S(a) \to \neg M(a)$
3, 4	5.	$H(a) \to \neg M(a)$
5	6.	$\forall x(H(x) \to \neg M(x))$ ■

Observe que as premissas não afirmam nenhuma particularidade sobre a, ou seja, a é genérica.

Introdução do $\forall$

Quais passos lógicos/regras de inferência foram usados na demonstração acima?

Dentre elas, uma pode ser formulada do seguinte modo:

> *A partir de uma fórmula que se refere a um elemento sobre o qual não fazemos nenhuma suposição particular, podemos obter a fórmula generalizada para qualquer variável.*

Introdução do $\forall$

Ou seja, sendo $v \in \mathrm{VI}$, $c \in \mathrm{CI}$ e $\varphi(v) \in \mathrm{FLQ}$, temos:

$$\text{R3} \quad \frac{\varphi}{\forall v \varphi_c^v}, \quad \text{onde } c \text{ não ocorre nas premissas.}$$

Esta regra é chamada Regra de Introdução do $\forall$ (para constantes).

Por intermédio dela, obtemos
(1) uma "conjunção generalizada" a partir de uma "componente" genérica;
(2) uma fórmula que possui uma ocorrência a mais do $\forall$.

Exemplo 6

Considere o seguinte argumento:

> *Nenhum aluno curte nenhuma matéria.*
> *Todos os alunos curtem todas as chopadas.*
> Daí, *se Márcia é aluna, nenhuma chopada é uma matéria.*

Antes de prosseguir, simbolize o argumento, de acordo com a seguinte legenda:

$$\begin{array}{lcl} A(\_\_) & : & \_\_\ \textit{é aluno} \\ C(\_\_\ ,\ \_\_) & : & \_\_\ \textit{curte}\ \_\_ \\ M(\_\_) & : & \_\_\ \textit{é matéria} \\ S(\_\_) & : & \_\_\ \textit{é chopada} \\ m & : & \textit{Márcia} \end{array}$$

Exemplo 6

Uma simbolização para este argumento é a seguinte:

$$\begin{array}{l} \forall x(A(x) \to \forall y(M(y) \to \neg C(x,y))) \\ \forall x(A(x) \to \forall y(S(y) \to C(x,y))) \\ \hline A(m) \to \forall x(S(x) \to \neg M(x)) \end{array}$$

Se você não chegou a esta simbolização, deve ter chegado a uma constituída de fórmulas equivalentes.

Este argumento é válido?

Antes de prosseguir, tente realmente determinar se o argumento é válido ou não.

Exemplo 6

A resposta é SIM.

Uma demonstração da validade deste argumento é a seguinte:

Demonstração:

P	1.	$\forall x(A(x) \to \forall y(M(y) \to \neg C(x,y)))$
P	2.	$\forall x(A(x) \to \forall y(S(y) \to C(x,y)))$
P	3.	$A(m)$
P	4.	$S(a)$
P	5.	$M(a)$
1	6.	$A(m) \to \forall y(M(y) \to \neg C(m,y))$
2	7.	$A(m) \to \forall y(S(y) \to C(m,y))$
3, 6	8.	$\forall y(M(y) \to \neg C(m,y))$
3, 7	9.	$\forall y(S(y) \to C(m,y))$
8	10.	$M(a) \to \neg C(m,a)$
9	11.	$S(a) \to C(m,a)$
5, 10	12.	$\neg C(m,a)$
4, 11	13.	$C(m,a)$
12, 13	14.	$C(m,a) \wedge \neg C(m,a)$
5–14	15.	$\neg M(a)$
4–15	16.	$S(a) \to \neg M(a)$
16	17.	$\forall x(S(x) \to \neg M(x))$

Parte 5

Exercícios

Exercício 1

(a) Explique por que o seguinte argumento não é válido:

Nenhum aluno curte nenhuma matéria.
Todos os alunos curtem todas as chopadas.
Daí, *nenhuma chopada é uma matéria.*

(b) Demonstre a validade do seguinte argumento:

Todos os que estudam Lógica gostam de Petrúcio.
Petrúcio não gosta de ninguém que gosta dele.
Consequentemente, *todos de quem Petrúcio gosta não estudam Lógica.*

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 20.

2. Resolver os exercícios da Lista 20.