Sintaxe de LC

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

Instituto de Matemática e Estatística, UFF
13 de março de 2015

Sumário

- Sentenças e conectivos
- Sintaxe da Lógica dos Conectivos, LC
- Recursão em fórmulas
- Exercícios

Parte 1

Sentenças e conectivos

Lógica dos Conectivos

Iniciamos nosso estudo pela apresentação da Lógica dos Conectivos, LC.

Sentenças e conectivos

Sentenças são frases que podem ser avaliadas como verdadeiras ou falsas e podem ser utilizadas para formar novas sentenças.

Em LC exploramos partículas gramaticais simples, como

não é o caso que . . . , **. . . e simultaneamente . . .**

(chamadas conectivos) e investigamos o papel delas na formação e na avaliação de sentenças.

Sentenças atômicas e moleculares

Quanto a sua formação, em LC, as sentenças são classificadas em duas categorias:

Sentenças atômicas não são analisadas.

Sentenças moleculares são analisadas e consideradas como formadas a partir de outras sentenças, pelo uso dos conectivos.

Descrição de um sistema lógico

A descrição de um sistema lógico é feita pela apresentação

da linguagem formal na qual as sentenças vão ser “traduzidas”

e

do mecanismo de inferência com o qual novas sentenças são produzidas, a partir de sentenças dadas.

Sintaxe e semântica

A descrição de uma linguagem formal é feita, em geral, em duas etapas:

1. Sintaxe: qual o alfabeto da linguagem e como as palavras, frases e textos da linguagem são formados.
2. Semântica: que significados podem ser atribuídos às letras do alfabeto, as palavras, frases e textos da linguagem.

Parte 2

Sintaxe da Lógica dos Conectivos

Alfabetos

Do ponto de vista formal, um alfabeto é um conjunto não vazio de *simbolos*.

O alfabeto de língua portuguesa.

O alfabeto de língua portuguesa acrescido de todos os símbolos usados em Matemática.

$A = \{ \ ' \ \}$

$B = \{p, \ '\}$

Sintaxe de LC

Definição O alfabeto de LC consiste dos seguintes símbolos:

- *Variáveis para sentenças:* p , q , r , (indexadas ou não).
- *Conectivos:* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- *Sinais de pontuação:* (,)

O conjunto das variáveis para sentenças é denotado por VS e pode ser finito ou infinito, dependendo da situação.

Assumimos que:

(i) os símbolos do alfabeto são distintos dois a dois;

(ii) e nenhum símbolo é uma sequência de outros símbolos.

Isto ajuda a garantir a legibilidade única das palavras da linguagem.

Significado intuitivo

Variáveis sentenciais — sentenças (atômicas) da Língua Portuguesa ou da Linguagem Matemática.

conectivo	*nome*	*significado*
$\neg$	símbolo de negação	não é o caso que
$\wedge$	símbolo de conjunção	e
$\vee$	símbolo de disjunção	ou (inclusivo)
$\rightarrow$	símbolo de implicação	se...então
$\leftrightarrow$	símbolo de biimplicação	se, e somente se

Alfabetos e palavras

Dado um alfabeto A, qualquer, uma palavra sobre A é uma sequência finita de símbolos de A.

A palavra cujos símbolos são $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$, nesta ordem, é denotada por $s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$.

Por exemplo, se $A = \{a, b\}$, as seguintes são palavras sobre A: a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, $\ldots$

Palavras de LC

Uma palavra de LC é uma sequência finita qualquer de símbolos do alfabeto de LC.

Algumas fazem sentido e outras não.

$$p_1 q_1 r_1 \neg \wedge ()(()) \quad , \quad (p_1(p_1 \rightarrow p_2)p_2)$$

$$\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1 \quad , \quad ((p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow p_2)$$

Primeiro objetivo sintático

Apresentar uma definição que seleciona, de uma maneira puramente sintática (isto é, sem fazer referências aos significados intuitivos dos símbolos), dentre todas as palavras possíveis de serem formadas com os símbolos do alfabeto da LC, aquelas que consideraremos como fazendo sentido.

Fórmulas de LC

Definição As fórmulas de LC são obtidas por aplicação das seguintes regras:

1. Cada variável para sentença é uma fórmula.
2. Se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula.
3. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas.

Assumimos que nenhum objeto é uma fórmula a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

São exemplos de fórmulas

$p \quad , \quad q \quad , \quad r$

$(\neg p) \quad , \quad (\neg q)$

$(p \wedge (\neg p))$

$((\neg q) \rightarrow (p \wedge (\neg p)))$

$(((\neg q) \rightarrow (p \wedge (\neg p))) \rightarrow q)$

$(p \vee q) \quad , \quad (p \rightarrow r) \quad , \quad (q \rightarrow r)$

$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r))$

$(((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow r))$

$((((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r)$

Não são exemplos de fórmulas

$$\neg p \quad , \quad q\neg \quad , \quad pq$$

$$((\neg p)) \quad , \quad p \wedge (\neg p)$$

$$((\neg q) \rightarrow (p \wedge \neg p)) \rightarrow (q)$$

Observação

Algumas expressões listadas acima não são fórmulas "apenas" por possuírem ocorrências de parênteses em falta ou em excesso.

Classificação das fórmulas

Definição Sejam φ e ψ fórmulas de LC. Dizemos que:

1. φ é <u>atômica</u> se é uma variável para sentenças.
2. φ é <u>molecular</u> se não é uma variável para sentenças.
3. $(\neg\varphi)$ é a <u>negação</u> de φ.
   Dizemos também que φ é a <u>componente da negação</u>.
4. $(\varphi \wedge \psi)$ é a <u>conjunção</u> de φ com ψ.
   Dizemos também que φ é a <u>primeira componente</u> e ψ é a <u>segunda componente</u> da conjunção.

Classificação das fórmulas

5. $(\varphi \vee \psi)$ é a disjunção de φ com ψ.
   Dizemos também que φ é a primeira componente e ψ é a segunda componente da disjunção.

6. $(\varphi \to \psi)$ é a implicação de ψ por φ (observe a ordem em que as fórmulas estão sendo referidas).
   Dizemos também que φ é o antecedente e ψ é o consequente da implicação.

7. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é a biimplicação de φ com ψ.
   Dizemos também que φ é a primeira componente e ψ é o segunda componente da biimplicação.

Parte 3

Recursão em fórmulas

Recursão em fórmulas

Pela definição temos que:

1. Toda fórmula é gerada a partir das variáveis para sentenças por aplicação dos conectivos e as fórmulas são os únicos objetos obtidos por este processo.
2. Cada fórmula é gerada de um único modo a partir das variáveis para sentenças por aplicação iterada dos conectivos.

Graças a estas duas propriedades podemos:

1. Provar propriedades que são verdadeiras para todas as fórmulas pelo método de indução;
2. Definir conceitos que se aplicam a todas as fórmulas pelo método de recursão.

Método de definição por recursão em fórmulas.

Para definir um conceito $\mathcal{C}$ para todas as fórmulas, basta fazer o seguinte:

1. Definir o conceito $\mathcal{C}$ para todas as variáveis para sentenças.
2. Supor que o conceito $\mathcal{C}$ está definido para fórmulas arbitrárias φ e ψ.
3. Mostrar como o conceito $\mathcal{C}$ pode ser definido para as fórmulas $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, usando a hipótese de que $\mathcal{C}$ está definido para φ e ψ.

Exemplo

Considere o seguinte conceito sobre fórmulas φ.

$$\mathsf{VS}[\varphi] : \text{ conjunto das variáveis para sentenças de } \varphi.$$

Por exemplo:

$\mathsf{VS}[p] = \mathsf{VS}[(p \wedge (\neg p))] = \{p\}$

$\mathsf{VS}[(p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))] = \{p, q\}$

Vamos definir $\mathsf{VS}[\varphi]$ usando o Método de Definição por Recursão em Fórmulas.

Definição recursiva de VS[φ]

Definição Seja $\varphi \in$ FLC.

O conjunto das variáveis para sentenças de φ, denotado por VS[φ], é definido recursivamente pelas seguintes regras:

1. Se φ for uma variável para sentenças, então VS[φ] $= \{\varphi\}$.
2. Se φ for uma negação $(\neg\psi)$, então VS[φ] $=$ VS[ψ].
3. Se φ for uma conjunção $(\psi \wedge \theta)$, então VS[φ] $=$ VS[ψ] $\cup$ VS[θ].

4. Se φ for uma disjunção $(\psi \vee \theta)$, então $\mathsf{VS}[\varphi] = \mathsf{VS}[\psi] \cup \mathsf{VS}[\theta]$.

5. Se φ for uma implicação $(\psi \to \theta)$, então $\mathsf{VS}[\varphi] = \mathsf{VS}[\psi] \cup \mathsf{VS}[\theta]$.

6. Se φ for uma bi-implicação $(\psi \leftrightarrow \theta)$, então $\mathsf{VS}[\varphi] = \mathsf{VS}[\psi] \cup \mathsf{VS}[\theta]$.

Calculando VS[φ]

A definição fornece um procedimento para, dada uma fórmula φ, calcularmos VS[φ].

$$\mathsf{VS}[(p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee (\neg q))] =$$

$$\mathsf{VS}[(p \vee q)] \cup \mathsf{VS}[((\neg p) \vee (\neg q))] =$$

$$\mathsf{VS}[p] \cup \mathsf{VS}[q] \cup \mathsf{VS}[(\neg p)] \cup \mathsf{VS}[(\neg q)] =$$

$$\mathsf{VS}[p] \cup \mathsf{VS}[q] \cup \mathsf{VS}[p] \cup \mathsf{VS}[q] =$$

$$\{p\} \cup \{q\} \cup \{p\} \cup \{q\} =$$

$$\{p, q\}$$

Pode não ser eficiente mas é controlado e automatizável!

Definição recursiva de VS[φ], com casos análogos

Para poupar espaço e tempo, costumamos simplificar a redação:

Definição Seja $\varphi \in$ FLC.

O <u>conjunto das variáveis para sentenças de φ</u>, denotado por VS[φ], é definido pelas seguintes regras:

1. Se φ for uma variável para sentenças, então VS[φ] $= \{\varphi\}$.
2. Se φ for uma negação $(\neg\psi)$, então VS[φ] $=$ VS[ψ].
3. Se φ for uma conjunção $(\psi \wedge \theta)$, então VS[φ] $=$ VS[ψ] $\cup$ VS[θ].
4. Os casos $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são inteiramente análogos ao caso $\wedge$.

Parte 4

Exercícios!!! Uh-hu!!!

Exercício 1

Recordamos que, dado um alfabeto A, qualquer, uma palavra sobre A é uma sequência finita de símbolos de A.

E que a palavra cujos símbolos são s_1, s_2, s_3, $\ldots$, s_n, nesta ordem, é denotada por $s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$.

Dado o alfabeto $B = \{a, b, c\}$, defina o conjunto das palavras sobre B por indução.

Exercício 2

Defina os seguintes conceitos sobre fórmulas φ, usando o Método de Definição por Recursão em Fórmulas.

1. $\mathsf{SF}[\varphi]$: conjunto das subfórmulas de φ
2. $\mathsf{Con}[\varphi]$: conjunto dos conectivos de φ
3. $\mathsf{NCon}[\varphi]$: número de ocorrências de conectivos em φ
4. $\mathsf{Comp}[\varphi]$: comprimento de φ

Quando contamos ocorrências de símbolos, as repetições de símbolos são contabilizadas.

Mais exercícios!

1. Ler o texto da Aula 2.

2. Resolver os exercícios da Lista 2.