Notas de aula de *Lógica para Ciência da Computação*

Aula 4, 2014/2

Renata de Freitas e *Petrucio Viana*
Departamento de Análise, IME–UFF

9 de setembro de 2014

Sumário

1 Conteúdo e objetivos

Nesta aula vamos estudar um pouco mais detalhadamente duas das principais ferramentas que foram aplicadas em aulas anteriores: a reescrita e a simbolização de sentenças. A reescrita e a simbolização são essenciais na análise lógica de sentenças, pois é através delas que 'transformamos' as sentenças da linguagem natural/matemática em fórmulas da Lógica dos Conectivos.

Ao estudar esta aula, devemos ser capazes de (1) entender a necessidade de reescrevermos as sentenças da linguagem natural/matemática, para que possamos classificá-las adequadamente, segundo a formação; (2) conhecer as principais convenções que vamos adotar para a reescrita de sentenças; (3) aplicar as Regras de Reescrita como um passo intermediário na simbolização de uma sentença; (4) simbolizar sentenças de maneira sistemática.

2 Ambiguidade e reescrita

Classificamos as sentenças como moleculares ou atômicas, de acordo com o fato de elas possuirem ou não ocorrências de conectivos lógicos.

Exemplo 2.1 As sentenças

2 é par

e

Renata é baixa

são atômicas.

Já a sentença

se 2 é par, então Renata não é baixa

é molecular.

Além disso, as sentenças moleculares são classificadas de acordo com a maneira como são formadas a partir de outras sentenças, por aplicação dos conectivos lógicos.

Exemplo 2.2 A sentença

Renata não é baixa

é uma negação.

Já a sentença

se 2 é par, então Renata não é baixa

é uma implicação.

Em alguns casos, é conveniente reescrevemos as sentenças, para que possamos classificá-las como atômicas ou moleculares.

Exemplo 2.3 (a) A rigor, a sentença

Petrucio é meu inimigo

é atômica, pois não possui ocorrências (explícitas) de conectivos lógicos.

Mas, dado que compreendemos bem o seu significado, em certos contextos, ela pode ser reescrita como

Petrucio não é meu amigo

e, assim, ser classificada como uma negação.

(b) A sentença

Renata é alta, portanto ela fica desconfortável na bicicleta

não possui ocorrências (explícitas) de conectivos lógicos.

Mas, dado que compreendemos bem o seu significado, em certos contextos, ela pode ser reescrita como

se Renata é alta, então Renata fica desconfortável na bicicleta

e, assim, pode ser classificada como uma implicação.

Embora a reescrita de sentenças seja uma necessidade natural, na verdade, nem toda sentença pode ser trivialmente reescrita para que possamos classificá-la em uma das categorias definidas (atômica, ou molecular — negação, implicação, conjunção, disjunção, biimplicação).

Veremos agora que, como a formação de sentenças usualmente não obedece a regras precisas, em certos casos, classificar uma sentença como atômica ou molecular pode ser uma tarefa difícil.

Exemplo 2.4 (a) Considere a sentença

4 é diferente de 0.

Se não levarmos em conta que o significado da expressão 'ser diferente de' é o mesmo que o da expressão 'não ser igual a', concluímos que a sentença é atômica pois nela não ocorrem conectivos.

Por outro lado, se levarmos em conta a identidade destes significados, a sentença poderá ser reescrita como

4 não é igual a 0

e daí ser classificada como molecular pois nela ocorre o conectivo

não.

(b) Considere a sentença

Richard Dedekind e Giuseppe Peano são casados.

Levando em conta o significado da sentença, concluímos que esta deve ser reescrita como

Richard Dedekind é casado e Giuseppe Peano é casado

pois, obviamente, não estamos querendo dizer que ambos são casados um com o outro e sim que cada um deles é casado com sua respectiva esposa.

Portanto, esta sentença é uma conjunção e deve ser classificada como molecular.

(c) Por outro lado, considere a sentença

Kurt Gödel e Hao Wang são amigos.

Levando em conta o significado da sentença, concluímos que esta não pode ser reescrita como

Kurt Gödel é amigo e Hao Wang é amigo

como fizemos com a sentença anterior.

De fato, quando dizemos que duas pessoas são amigas, estamos querendo dizer que elas são amigas uma da outra e não atribuindo uma propriedade a cada uma delas isoladamente.

Assim, esta sentença deve ser classificada como atômica pois a expressão 'e' que nela ocorre não deve ser confundida com o conectivo

e.

(d) Considere a sentença

Maria e João são casados.

Aqui temos um caso ambíguo.

De fato, levando em conta somente o significado da sentença, não podemos concluir se ela deve ou não ser reescrita como

Maria é casada e João é casado.

Sem mais informações, quando dizemos que um homem e uma mulher são casados, podemos tanto estar querendo dizer que eles são casados um com o outro quanto que eles são casados, mas com pessoas diferentes. Tudo depende do contexto em que a sentença está inserida.

Assim, esta sentença tanto pode ser usada para afirmar uma relação entre duas pessoas quanto para atribuir uma propriedade a cada uma delas isoladamente. Ou seja, dependendo do contexto associado, esta sentença pode ser classificada tanto como atômica quanto molecular.

(e) Considere a sentença

levou a esposa ou foi sozinho e teve uma noite agradável.

Levando em conta a maneira como está escrita, esta sentença pode ser lida de dois modos diferentes.

De fato, considerando que a sentença é obtida a partir das sentenças

levou a esposa

e

foi sozinho e teve uma noite agradável

por aplicação do conectivo

ou,

a sentença pode ser lida como

levou a eposa, ou foi sozinho e teve uma noite agradável.

Por outro lado, considerando que a sentença é obtida a partir das sentenças

levou a esposa ou foi sozinho

e

teve uma noite agradável,

por aplicação do conectivo *e*, a sentença pode ser lida como

levou a esposa ou foi sozinho, e teve uma noite agradável.

No primeiro caso, a sentença é uma disjunção. No segundo, a sentença é uma conjunção. Examinando os significados de cada sentença reescrita, concluímos que cada uma delas possui um conteúdo bastante diferente do da outra.

O Exemplo 2.4 mostra algumas sentenças que podem ser consideradas ambíguas em relação à maneira como são formadas. Nestes casos, a ambiguidade decorre basicamente do seguinte:

- Presença implícita de conectivos (no sentido lógico). Tal é o caso do Exemplo 2.4(a).
- Presença explícita de expressões consideradas como conectivos (no sentido lógico) desempenhando um papel diferente daquele desempenhado pelos conectivos. Tal é o caso do Exemplo 2.4(c).
- Ausência de uma notação que indique precisamente de que maneira esta sentença foi formada a partir de senteças anteriores. Tal é o caso do Exemplo 2.4(d).

A presença de ambiguidades acarreta a possibilidade de leituras distintas para uma mesma sentença e isto pode acarretar análises lógicas incompatíveis. Somos levados, então, a introduzir a reescrita de sentenças, de modo que sua formação obedeça a regras precisas e ambiguidades sejam evitadas.

3 Regras de reescrita

Na tentativa de evitar ambiguidades, é usual reescrevermos as sentenças de modo que sua formação obedeça a regras precisas. Estas regras decorrem das seguintes considerações:

– Como estamos considerando apenas sentenças que são formadas a partir de outras sentenças pelo uso dos conectivos, as sentenças atômicas são consideradas como as unidades básicas a partir das quais todas as outras sentenças são formadas. Assim, um primeiro passo na formação de sentenças não ambíguas é explicitar as sentenças atômicas que estão sendo utilizadas.

– Para eliminar ambiguidades decorrentes dos vários usos dos conectivos em outras linguagens, na Linguagem da Lógica, o número, a forma e o uso dos conectivos na formação de sentenças moleculares são definidos precisamente.

– Para facilitar a reescrita e enfatizar que os conectivos estão sendo utilizados em um sentido restrito, em relação à maneira como são usados em outras linguagens, na Linguagem da Lógica, os conectivos são simbolizados conforme a seguinte tabela:

Conectivo	Símbolo
não	$\neg$
e	$\wedge$
ou	$\vee$
se...então	$\rightarrow$
se, e somente se	$\leftrightarrow$

Temos, então, as seguintes regras de reescrita:

Sentenças atômicas

REGRA 1 Uma sentença atômica deve ser reescrita encerrada entre parênteses.

Exemplo 3.1 Como não possuem a ocorrência de conectivos, as sentenças:

7 é primo
8 é maior que 0
é necessário que Maria pegue o trem
todo homem é mortal

são atômicas. Assim, devem ser reescritas encerradas entre parênteses:

(7 é primo)
(8 é maior que 0)
(é necessário que Maria pegue o trem)
(todo homem é mortal)

Negações

REGRA 2 Uma negação deve ser reescrita como $(\neg\varphi)$, onde φ é a sentença negada, previamente reescrita.

Exemplo 3.2 (a) A negação

7 não é primo

deve ser reescrita como

$(\neg$(7 é primo)$)$

De fato, a sentença é obtida pela aplicação do conectivo $\mathsf{não}$ à sentença $7\ \mathsf{é\ primo}$. Esta última deve ser reescrita como $(7\ \mathsf{é\ primo})$. Assim, aplicando a Regra 2 a esta sentença atômica reescrita, temos a reescrita da negação.

(b) A negação

$$\mathsf{não\ é\ o\ caso\ que}\ 7\ \mathsf{não\ seja\ primo}$$

deve ser reescrita como

$$(\neg(\neg(7\ \mathsf{é\ primo}))).$$

De fato, a sentença é obtida pela aplicação do $\mathsf{não}$ à sentença $7\ \mathsf{não\ é\ primo}$ que deve ser reescrita como $(\neg(7\ \mathsf{é\ primo}))$. Assim, aplicando a Regra 2 a esta negação reescrita, temos a reescrita da negação original.

Conjunções

REGRA 3 Uma conjunção deve ser reescrita como $(\varphi \wedge \psi)$, onde φ e ψ são suas componentes, previamente reescritas.

Exemplo 3.3 (a) A conjunção

$$3\ \mathsf{não\ é\ primo\ nem\ é\ maior\ que}\ 0,$$

ou seja,

$$3\ \mathsf{não\ é\ primo\ e}\ 3\ \mathsf{não\ é\ maior\ que}\ 0,$$

deve ser reescrita como

$$((\neg(3\ \mathsf{é\ primo}))\wedge(\neg(3\ \mathsf{é\ maior\ que}\ 0))).$$

De fato, a conjunção é obtida por aplicação do conectivo e às sentenças $3\ \mathsf{não\ é\ primo}$ e $3\ \mathsf{não\ é\ maior\ que}\ 0$ que, segundo as regras anteriores, devem ser reescritas, respectivamente, como $(\neg(3\ \mathsf{é\ primo}))$ e $(\neg(8\ \mathsf{é\ maior\ que}\ 0))$. Aplicando agora a Regra 3 às duas sentenças reescritas, temos a reescrita da conjunção.

(b) Como já discutimos anteriormente, a conjunção

$$\mathsf{João\ e\ Maria\ foram\ à\ feira}$$

é ambígua pois não sabemos se devemos interpretá-la como João foi à feira e Maria foi à feira ou como João e Maria foram à feira, juntos. Esta ambiguidade de significado acarreta ambiguidade de formação, pois não sabemos decidir se ela deve ser classificada como atômica ou molecular.

Para reescrever as sentenças onde ocorrem este tipo de ambiguidade, faremos a convenção de considerá-las sempre como sentenças moleculares, mesmo que haja risco de mudarmos o conteúdo da sentença.

Assim, a sentença deve ser reescrita como

$$((\textsf{João foi à feira}) \wedge (\textsf{Maria foi à feira})).$$

Disjunções

REGRA 4 Uma disjunção deve der reescrita como $(\varphi \vee \psi)$, onde φ e ψ são suas componentes, previamente reescritas.

Exemplo 3.4 (a) A disjunção

$$\textsf{2 não é maior que 0, ou 3 é primo e 2 é maior que 0}$$

deve ser reescrita como

$$((\neg(\textsf{2 é maior que 0})) \vee ((\textsf{3 é primo}) \wedge (\textsf{2 é maior que 0})))$$

(b) A conjunção

$$\textsf{2 não é maior que 0 ou 3 é primo, e 2 é maior que 0}$$

deve ser reescrita como

$$(((\neg(\textsf{2 é maior que 0})) \vee (\textsf{3 é primo})) \wedge (\textsf{2 é maior que 0}))$$

Observe que, neste caso, a primeira componente é uma disjunção que foi reescrita de acordo com a Regra 4.

Implicações

REGRA 5 Uma implicação deve ser reescrita como $(\varphi \to \psi)$, onde φ é o antecedente e ψ o consequente, previamente reescritos.

Exemplo 3.5 (a) Considerando o significado da sentença

João vai à praia sempre que faz sol

concluímos que ela deve ser reescrita como

se faz sol, então João vai à praia.

Assim, a sentença original é uma implicação que deve ser reescrita como

$$((\textsf{faz sol}) \rightarrow (\textsf{João vai à praia})).$$

Neste exemplo, salientamos o uso da expressão 'sempre que' como se...então.

(b) Considerando o significado da sentença

caso chova, João não vai à piscina

concluímos que ela deve ser reescrita como

se chover, então João não vai à piscina.

Assim, a sentença original é uma implicação que deve ser reescrita como

$$((\textsf{chove}) \rightarrow (\neg\ (\textsf{João vai à piscina}))).$$

Neste exemplo, salientamos o uso da expressão 'caso' como se...então.

Biimplicações

REGRA 6 Uma biimplicação deve ser reescrita como $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, onde φ e ψ são suas componentes, previamente reescritas.

Exemplo 3.6 A biimplicação

Paulo emagrecerá se, e somente se, não beber muito refrigerante e não comer macarrão

deve ser reescrita como

$$((\textsf{Paulo emagrece}) \leftrightarrow ((\neg(\textsf{Paulo bebe muito refrigerante})) \wedge (\neg(\textsf{Paulo come macarrão})))).$$

Neste exemplo salientamos que na análise lógica das sentenças, não estamos levando em conta o tempo verbal. Assim, sempre que possível, as sentenças devem ser reescritas com o verbo no presente do indicativo.

4 Simbolização

Nas seções anteriores nos ocupamos com a reescrita das sentenças, ou seja, com a passagem de sentenças da Linguagem Natural/Matemática para uma forma onde as suas estruturas estão explicitadas. Para muitos propósitos, exibir a forma das sentenças seria suficiente, mas, para que possamos aplicar as ferramentas de LC na análise lógica destas formas, precisamos ainda de um último passo que transforme as sentenças reescritas em fórmulas de LC.

Vamos, então, introduzir a simbolização de sentenças, como o passo final que nos permite "esconder" os seus conteúdos e "mostrar" apenas as suas formas.

Descrever um processo que possa ser aplicado na simbolização de sentenças não é uma tarefa muito fácil. Muitas vezes, dada uma sentença, é difícil decidir que caminho tomar para obter uma simbolização adequada. Neste texto, sempre que possível, o processo de simbolização será efetuado segundo os seguintes passos:

Procedimento para a simbolização de sentenças em LC:

Passo 1) Classificar a sentença como atômica ou molecular.

Passo 2) Caso a sentença seja molecular, classificar todos os conectivos que ocorrem na sentença.

Passo 3) Caso a sentença seja molecular, determinar se a sentença é negação, conjunção, disjunção, implicação ou biimplicação.

Passo 4) Reescrever a sentença de acordo com as regras de reescrita.

Passo 5) Definir uma *legenda* para as componentes atômicas da sentença dada. Uma *legenda* para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é uma tabela da forma:

$$\begin{array}{ccc} s_1 & : & \alpha_1 \\ s_2 & : & \alpha_2 \\ & \vdots & \\ s_n & : & \alpha_n \end{array}$$

onde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ são n variáveis para sentenças distintas.

Passo 6) Simbolizar a sentença reescrita, substituindo as sentenças atômicas pelas variáveis definidas na legenda.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de simbolização, efetuados segundo os estes passos.

Exemplo 4.1 Apresentamos a seguir alguns exemplos de simbolização, efetuados segundo os passos descritos anteriormente.

(a) Rafael é feliz.

Efetuando o processo de simbolização, temos:

PASSO 1) Atômica.

PASSO 2) Não pode ser aplicado.

PASSO 3) Não pode ser aplicado.

PASSO 4) (Rafael é feliz)

PASSO 5) Legenda:

$$p : \text{(Rafael é feliz)}$$

PASSO 6) A sentença pode ser simbolizada como:

$$p$$

(b) Rafael é feliz e Júlia gosta dele.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Rafael é feliz e Júlia gosta de Rafael.

Efetuando o processo de simbolização, temos:

PASSO 1) Molecular.

PASSO 2) Possui ocorrência do conectivo *e*.

PASSO 3) Conjunção.

PASSO 4) ((Rafael é feliz) $\wedge$ (Júlia gosta de Rafael))

PASSO 5) Legenda:

$$p : \text{(Rafael é feliz)}$$
$$q : \text{(Júlia gosta de Rafael)}$$

PASSO 6) A sentença pode ser simbolizada como:

$$(p \wedge q)$$

Observe que esta sentença não pode ser simbolizada como $(p \wedge p)$, pois as sentenças atômicas que a compõem são distintas.

(c) Rafael será feliz caso Júlia goste de Rafael.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como se Júlia gostar de Rafael, então Rafael será feliz. Efetuando o processo de simbolização, temos:

PASSO 1) Molecular.

PASSO 2) Possui ocorrência do conectivo se...então.

PASSO 3) Implicação.

PASSO 4) ((Júlia gosta de Rafael) $\rightarrow$ (Rafael é feliz))

PASSO 5) Legenda:

$$p : \text{(Júlia gosta de Rafael)}$$
$$q : \text{(Rafael é feliz)}$$

PASSO 6) A sentença pode ser simbolizada como:

$$(p \rightarrow q)$$

Neste exemplo ilustramos o uso da expressão 'caso' como se...então.

(d) Rafael é feliz pois Júlia gosta dele.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Júlia gosta de Rafael, e se Júlia gostar de Rafael, então Rafael será feliz. Efetuando o processo de simbolização, temos:

PASSO 1) Molecular.

PASSO 2) Possui ocorrência dos conectivos *e* e *se...então*.

PASSO 3) Conjunção cuja segunda componente é uma implicação.

PASSO 4) ((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ ((Júlia gosta de Rafael) $\rightarrow$ (Rafael é feliz)))

PASSO 5) Legenda:

p : (Júlia gosta de Rafael)
q : (Rafael é feliz)

PASSO 6) A sentença pode ser simbolizada como:

$$(p \wedge (p \rightarrow q))$$

Neste exemplo ilustramos o uso da expressão 'pois' como uma combinação dos conectivos e e se...então.

(e) Rafael é feliz, dado que Júlia gosta de Rafael e ela é feliz.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Júlia gosta de Rafael e Júlia é feliz, e se Júlia gostar de Rafael e Júlia for feliz, então Rafael será feliz. Efetuando o processo de simbolização, temos:

PASSO 1) Molecular.

PASSO 2) Possui ocorrência dos conectivos e e se...então.

PASSO 3) Conjunção cuja primeira componente é uma conjunção (de sentenças atômicas) e cuja segunda componente é uma implicação (cujo antecedente é uma conjunção de sentenças atômicas e cujo consequente é uma sentença atômica).

PASSO 4) (((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ (Júlia é feliz)) $\wedge$ (((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ (Júlia é feliz)) $\rightarrow$ (Rafael é feliz))).

PASSO 5) Legenda:

p : (Júlia gosta de Rafael)
q : (Júlia é feliz)
r : (Rafael é feliz)

PASSO 6) A sentença pode ser simbolizada como:

$$((p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r))$$

Nos exemplos a seguir, não explicitamos os passos do processo de simbolização.

Exemplo 4.2 (a) $2 + 2 \neq 4$

Legenda:

$p : 2 + 2 = 4$

Simbolização:

$(\neg p)$

(b) 0 e 2 são pares.

Legenda:
p : (0 é par)
q : (2 é par)
Simbolização:

$(p \wedge q)$

(c) Kurt Gödel e Hao Wang são amigos.

Legenda:

p : (Kurt Gödel e Hao Wang são amigos)

Simbolização:

p

(d) 1 está entre 0 e 2.

Legenda:

p : (1 está entre 0 e 2)

Simbolização:

p

(e) 1 é maior que 0 e 2 também.

Legenda:
p : (1 é maior que 0)
q : (2 é maior que 0)
Simbolização:

$(p \wedge q)$

(f) Todos os números naturais são reais.

Legenda:

p : (todos os números naturais são reais)

Simbolização:

p

(g) Os números $2, 3$ e 5 são primos.

Legenda:
p : (o número 2 é primo)
q : (o número 3 é primo)
r : (o número 5 é primo)
Simbolização:

$((p \wedge q) \wedge r)$

(h) Ao menos um dos números $1, 2$ e 3 é primo.

Legenda:
p : (o número 1 é primo)
q : (o número 2 é primo)
r : (o número 3 é primo)
Simbolização:

$((p \vee q) \vee r)$

(i) Exatamente um dos números 1, 2 e 4 é primo.

Legenda:
p : (1 é primo)
q : (2 é primo)
r : (4 é primo)
Simbolização:

$(((((p \vee q) \vee r) \wedge (p \rightarrow ((\neg q) \wedge (\neg r)))) \wedge (q \rightarrow ((\neg p) \wedge (\neg r)))) \wedge (r \rightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))))$

A sentença acima também pode ser simbolizada como a disjunção:

$(((p \wedge ((\neg q) \wedge (\neg r))) \vee (q \wedge ((\neg p) \wedge (\neg r)))) \vee (r \wedge ((\neg p) \wedge (\neg q))))$