Lógica dos Conectivos: consequência semântica finitária

Renata de Freitas *e* Petrucio Viana

IME, UFF

18 de junho de 2015

Sumário

- Noção informal de validade
- Consequência semântica
- Método das Tabelas
- Exercícios

Parte 1

Noção informal de validade

Noção informal de validade

Um argumento é uma sequência finita de sentenças:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta$$

com *premissas* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e *conclusão* β.

Um argumento é válido se em todos os contextos em que as premissas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são simultaneamente V, a conclusão β também é V.

Um argumento é inválido se não é válido,
isto é,
se existe ao menos um contexto em que as premissas
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são simultaneamente V e a conclusão β é F.

Validade $\times$ invalidade

João tem doutorado em Filosofia.
João tem doutorado em Sociologia.
João escreve uma coluna na revista Piauí.
Logo, João é inteligente.

João tem cabeça grande.
Quem tem cabeça grande pensa muito.
Quem pensa muito é inteligente.
Logo, João é um inteligente.

Parte 2

Consequência semântica em LC

Interpretação para um conjunto finito

As noções informais de argumento válido e argumento inválido têm uma contraparte formal em LC, dadas pelas noções de interpretação e consequência semântica.

Seja $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi\} \subseteq FLC$ um conjunto finito.

Uma interpretação para $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi\}$ é uma interpretação para $VS[\varphi_1] \cup VS[\varphi_2] \cup \ldots \cup VS[\varphi_n] \cup VS[\varphi]$.

Consequência semântica finitária

Seja $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi\} \subseteq FLC$ um conjunto finito.

Dizemos que φ é uma consequência semântica finitária de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ em LC, denotado por

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$$

se a seguinte condição é satisfeita:

> *Para toda interpretação I para* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi\}$,
> *se* $I^*[\varphi_1] = I^*[\varphi_2] = \ldots I^*[\varphi_n] = V$,
> *então* $I^*[\varphi] = V$.

Isto é, se toda interpretação que torna as fórmulas de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ simultaneamente verdadeiras também torna φ verdadeira.

Consequência semântica

Quando $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$, também dizemos que:

- φ é uma consequência semântica de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ em LC,
  ou seja,
  deixamos a palavra "finitária" subentendida;

- φ é consequência semântica de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ em LC,
  ou seja,
  nos abstemos de usar a notação da Teoria dos Conjuntos.

Quando não é o caso que $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$, escrevemos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \not\models \varphi$.

Parte 3

Método das Tabelas para consequência em LC

Consequência semântica finitária e tabelas de avaliação

As tabelas de avaliação podem ser aplicadas na resolução do problema da consequência semântica finitária em LC.

Dados um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subseteq FLC$ e $\varphi \in FLC$, decidir se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \varphi$, ou não.

Exemplo 1

$p \wedge q \models p$?

Temos que verificar se, em toda interpretação na qual $p \wedge q$ é V, também temos que p é V.

Exemplo 1

$p \wedge q \models p$?

Temos que verificar se, em toda interpretação na qual $p \wedge q$ é V, também temos que p é V.

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemplo 1

$p \wedge q \models p$?

Temos que verificar se, em toda interpretação na qual $p \wedge q$ é V, também temos que p é V.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo 1

$p \wedge q \models p$?

Vamos verificar se, em toda interpretação em que $p \wedge q$ é V, temos que p também é V.

p	q	$p \wedge q$	
V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

Exemplo 1

$p \wedge q \models p$?

Vamos verificar se, em toda interpretação em que $p \wedge q$ é V, temos que p também é V.

p	q	$p \wedge q$	
V	V	V	$\Leftarrow$
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

$p \wedge q \models p$, pois na interpretação na qual a premissa é V a conclusão é V.

Exemplo 2

$p \vee q \models p$?

Exemplo 2

$p \vee q \models p$?

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 2

$p \lor q \models p$?

p	q	$p \lor q$	
V	V	V	
V	F	V	
F	V	V	$\Leftarrow$
F	F	F	

Exemplo 2

$p \vee q \models p$?

p	q	$p \vee q$	
V	V	V	
V	F	V	
F	V	V	$\Leftarrow$
F	F	F	

$p \vee q \not\models p$, pois existe uma interpretação na qual a premissa é V e a conclusão é F.

Exemplo 3

$p \vee q, \neg p \models q?$

Exemplo 3

$p \vee q, \neg p \models q?$

p	q	$p \vee q$	$\neg p$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

Exemplo 3

$p \vee q, \neg p \models q$?

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	
V	V	V	F	
V	F	V	F	
F	V	V	V	$\Leftarrow$
F	F	F	V	

$p \vee q, \neg p \models q$, pois na interpretação na qual as premissas são V a conclusão é V.

Exemplo 4

$$p \wedge q, \neg p \models q?$$

Exemplo 4

$p \wedge q, \neg p \models q$?

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Exemplo 4

$p \land q, \neg p \models q$?

p	q	$p \land q$	$\neg p$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

$p \land q, \neg p \models q$, pois

para toda interpretação I,
se
$\underbrace{\text{as premissas são simultaneamente } V \text{ em } I}_{F}$,
então
a conclusão é V em I.

Exemplo 5

$p \models q \vee (\neg q)$?

p	q	$q \vee (\neg q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

$p \models q \vee (\neg q)$, pois

para toda interpretação I,
se
as premissas são simultaneamente V em I,
então
$\underbrace{\text{a conclusão é } V \text{ em } I}_{V}$.

Método das Tabelas para consequência semântica finitária

Para verificar se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \models \varphi$, ou não, basta fazer o seguinte:

1. Construir uma tabela, T, conjunta para φ_1, φ_2, ..., φ_m e φ.
2. Determinar as interpretações em T nas quais φ_1, φ_2, ..., φ_m são simultaneamente V.
3. Verificar se nas interpretações determinadas em 2, φ também é V.
4. Caso a resposta em 3 seja positiva, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \models \varphi$; caso seja negativa, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \not\models \varphi$.

Parte 4

Exercícios:

O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.

Exercício 1

Utilizando o Método das Tabelas de Avaliação para consequência semântica, mostre que:

(i) $p \wedge q \models p \rightarrow q$

(ii) $p \vee q \not\models p \rightarrow q$

(iii) $p \rightarrow q, q \rightarrow (\neg r) \models (\neg p) \vee (\neg r)$

(iv) $p \rightarrow q, q \rightarrow (\neg r) \not\models p \wedge (\neg r)$

Exercício 2

Verificar a validade dos seguintes argumentos:

(i) Se o cão está latindo, o cão não está na casa.
Se o cão está na casa, há alguém em frente à porta se o cão está latindo.
O cão está latindo, pois o cão está na casa.
Logo, não acontece que o cão esteja na casa ou esteja latindo.

Exercício 3

(ii) Se o cão está latindo, o cão está na casa.
Se o cão está na casa, então o cão não está latindo ou há alguém em frente à porta.
Na realidade, o cão está latindo.
Logo, não é o caso que há alguém em frente à porta.

Exercício 4

Se temos as informações:

> Sócrates está disposto a visitar Platão, se Platão está disposto a visitá-lo.
> Porém, Platão não está disposto a visitar Sócrates, se Sócrates está disposto a visitá-lo.
> Mas, Platão está disposto a visitar Sócrates, se Sócrates não está disposto a visitá-lo.

Podemos concluir que Sócrates está disposto a visitar Platão?

Mais exercícios

1. Ler o texto da Aula 7.

2. Resolver os exercícios da Lista 7.