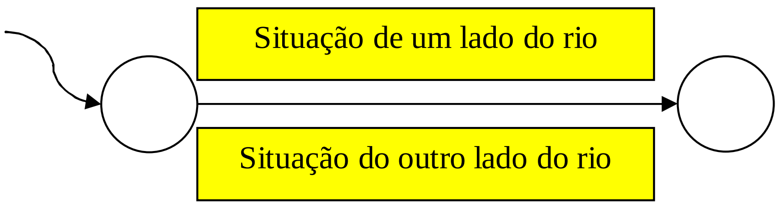
UFLA – Universidade Federal de Lavras
Departamento de Ciência da Computação
COM162 – Linguagens Formais e Autômatos
Prof. Rudini Sampaio
Monitor: Rodrigo Pereira dos Santos

Primeira Lista de Exercícios – **2004/2**

....

Exercício 1 Temos um Homem (H), um Lobo (L), uma Cabra (C) e um Repolho (R). Todos estão de um mesmo lado do rio. Há um barco capaz de atravessar o rio com o Homem e mais apenas L, ou C ou R de cada vez. É preciso atravessar todos para a outra margem de forma que L e C, ou C e R não fiquem sozinhos sem o Homem na mesma margem. Desenvolva um diagrama de transições para a solução do problema.

RESPOSTA = Subjetivo. É um exercício interessante para ser feito, uma vez que está associado à teoria de autômatos e diagrama de estados vistos na disciplina até o momento. Uma das formas de fazer seria colocar sobre as transições os elementos que estão de um lado do rio, e sob as mesmas, aqueles que estivessem do outro lado. A figura exibe isso:



Um exemplo pode ser visto a seguir, onde: h = homem; c = cabra; r = repolho; l = lobo.

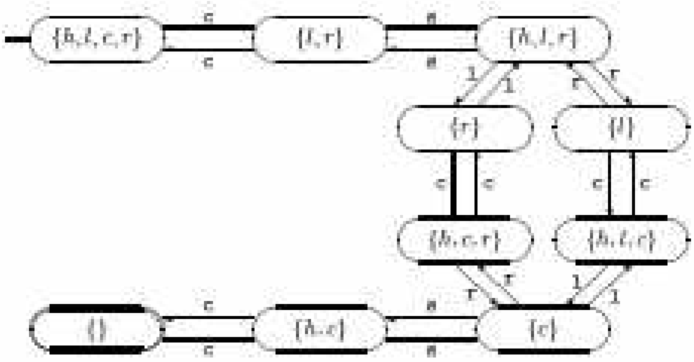


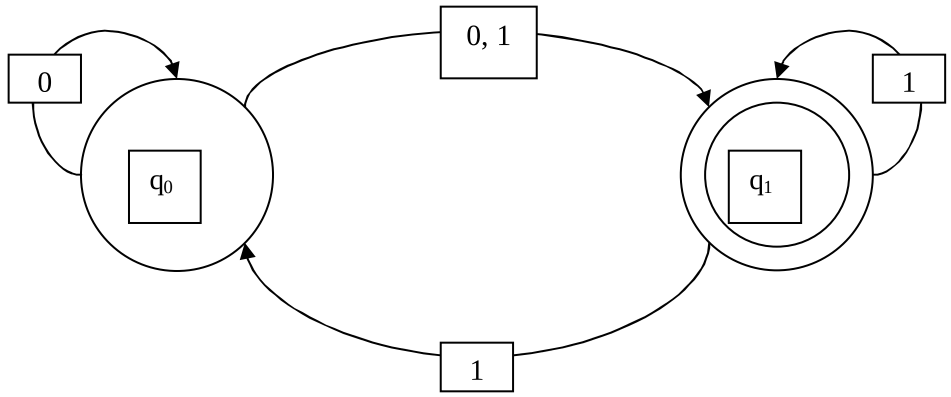
Figura 2.1: Diagrama de estados para Leão, Coelho e Repolho

....

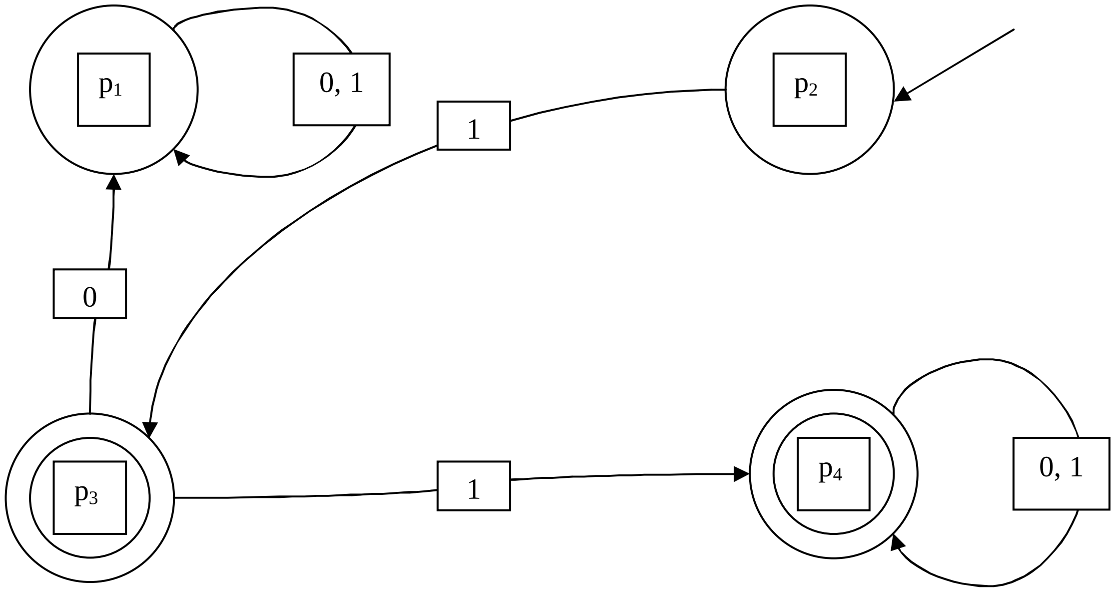
Exercício 2 Construa um DFA M que aceita L(N), a partir do NFA N = ($\{q_0,q_1\}$, $\{0,1\}$, δ, q_0,$\{q_1\}$) onde $\delta(q_0,0) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_0,1) = \{q_1\}$, $\delta(q_1,0) = \varnothing$, $\delta(q_1,1) = \{q_0,q_1\}$.

RESPOSTA = Dado o NFA N = ($\{q_0, q_1\}$, $\{0, 1\}$, δ, q_0, $\{q_1\}$), onde:

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
$\delta(q_0, 1) = \{q_1\}$
$\delta(q_1, 0) = \varnothing$
$\delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$



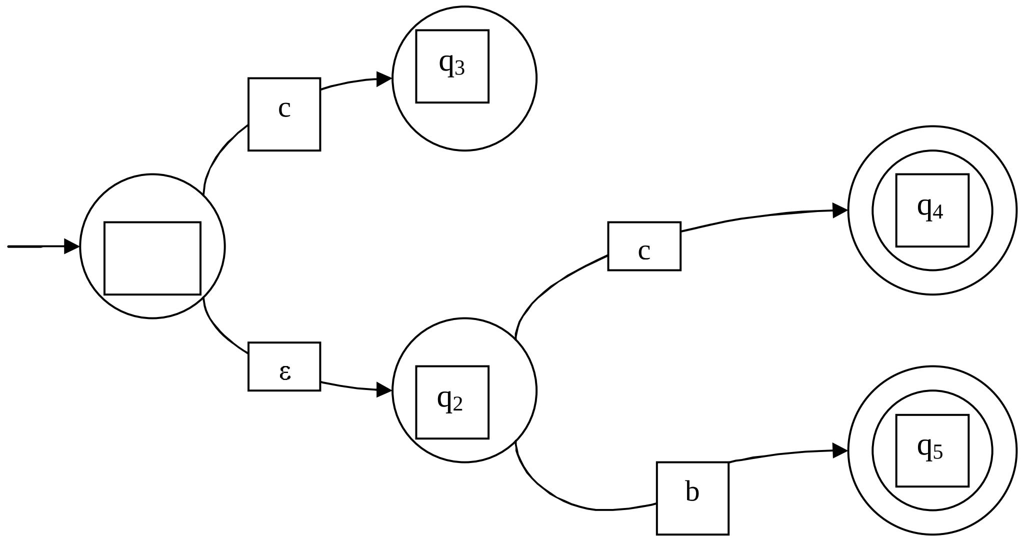
Podemos construir um DFA M equivalente, que reconhece a mesma linguagem de N, ou seja, L(M) = L(N). Vamos representar $p_1 = \emptyset$, $p_2 = \{q_0\}$, $p_3 = \{q_1\}$ e $p_4 = \{q_0, q_1\}$, onde o estado inicial é p_2 e os estados finais são p_3 e p_4.



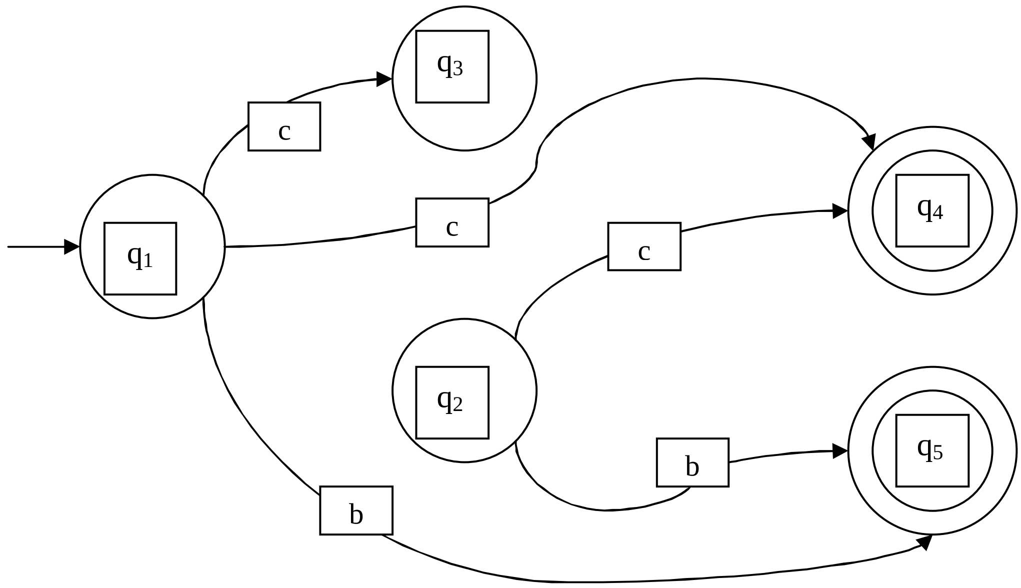
....

Exercício 3 Prove que se uma linguagem L é aceita por um NFA com transições vazias, então L é também aceita por um NFA sem transições vazias. Transições vazias são as transições ε (*epsilon*).

RESPOSTA = Seja o NFA N = $(Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, $\{b,c\}$ € Σ:



Considere que ele possui uma transição ε: $\delta(q_1, \varepsilon) = \{q_2\}$ e L(N) = L.
Seja o NFA N' = (Q', Σ, δ', q_1', F'):



Considere que ele não possui transição ε e que L(N') = L'.
Queremos provar que se L(N) = L e L(N') = L', então L'= L.

<u>Construção de N':</u>

- Q' = Q
- $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$, se $q \neq q_1$, ou
  $= \delta(q, a) - \{q_2\}$, se $q = q_1$ e $a = \varepsilon$, ou
  $= \delta(q, a) \cup \bigcup\delta(q_i, a)$, se $q = q_1$ e $a \neq \varepsilon$, onde $q_i \in E(q)$ e $E(q) = \{p \in Q \mid$ p pode ser atingido de q usando zero ou mais transições $\varepsilon\}$
- $q_1' = q_1$
- F' $= F$, se q_2 não pertence a F
  $= F \cup \{q_1\}$, se $q_2 \in F$

Tomando $q_4 \in \delta(q_2, c)$ e $q_5 \in \delta(q_2, b)$, respectivamente, pela construção, $q_4 \in \delta'(q_1, c)$ e $q_5 \in \delta'(q_1, b)$. Logo, $L = L'$. ■

....

Exercício 4 Descreva com suas palavras os conjuntos que denotam as seguintes expressões regulares:

a. $(11 \cup 0)^*(00 \cup 1)^*$

RESPOSTA = São seqüências de zero ou mais 11's ou 0's, seguidas de seqüências de zero ou mais 00's ou 1's.

b. $(1 \cup 01 \cup 001)^*(\varepsilon \cup 0 \cup 00)$

RESPOSTA = São seqüências de zero ou mais 1's ou 01's ou 001's, seguidas de menos de três 0's.

c. $(00 \cup 11 \cup (01 \cup 10)(00 \cup 11)^*(01 \cup 10))^*$

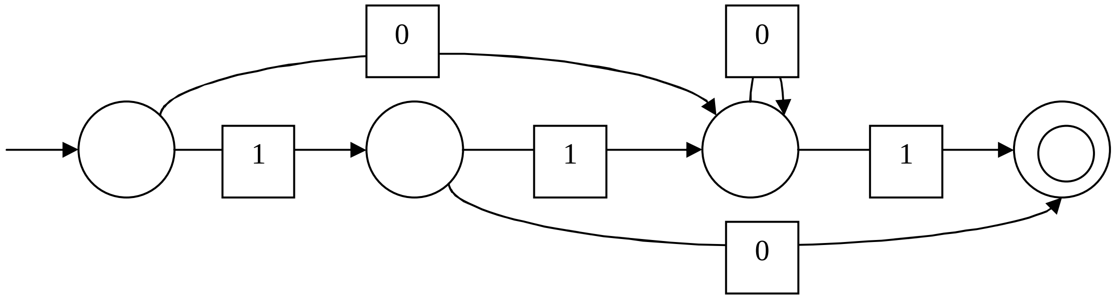
RESPOSTA = São seqüências de zero ou mais 00's ou 11's ou seqüências iniciando e terminando em 01 ou 10, contendo zero ou mais 00's ou 11's no meio.

....

Exercício 5 Construa um autômato finito equivalente para as seguintes expressões regulares:

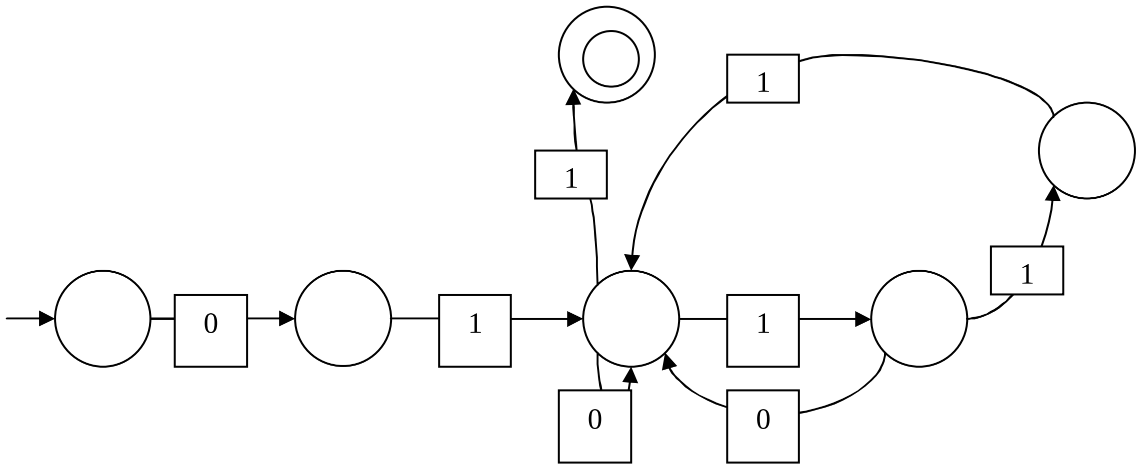
a. $10 \cup (0 \cup 11)0^*1$

RESPOSTA = NFA otimizado. Recomenda-se seguir os passos para a construção do autômato conforme teorema visto em aula.



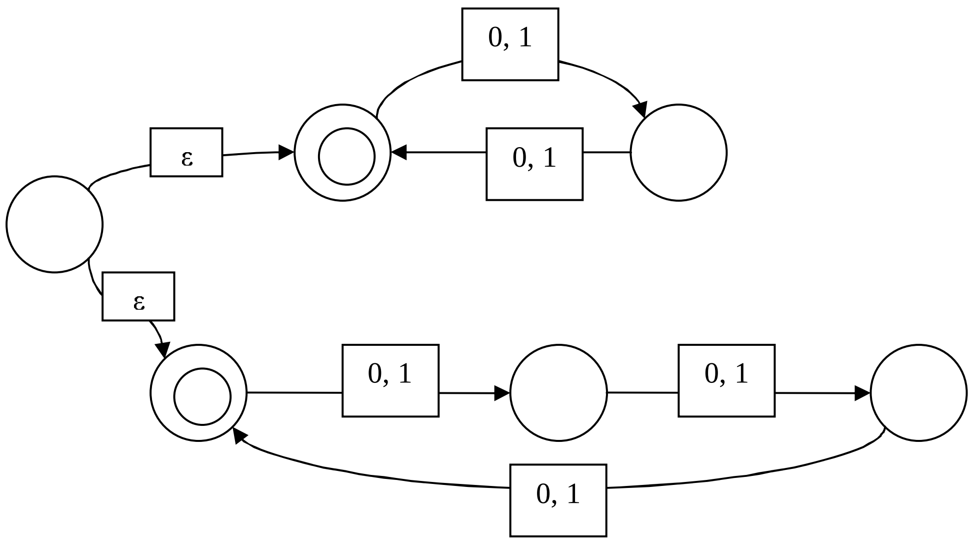
b. $01(((10)^* \cup 111)^* \cup 0)^*1$

RESPOSTA = NFA otimizado. Recomenda-se seguir os passos para a construção do autômato conforme teorema visto em aula.



c. $((0 \cup 1)(0 \cup 1))^* \cup ((0 \cup 1)(0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

RESPOSTA = NFA otimizado. Recomenda-se seguir os passos para a construção do autômato conforme teorema visto em aula.



....

Exercício 6 Prove ou disprove para as seguintes expressões regulares R, S e T:

a. $(RS \cup R)^*R = R(SR \cup R)^*$

RESPOSTA = Provaremos por indução que $(RS \cup R)^nR = R(SR \cup R)^n$

<u>Base da indução:</u> n = 0 => R = R (verdadeiro)

<u>Hipótese de indução:</u> vamos supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $(RS \cup R)^kR = R(SR \cup R)^k$

<u>Passo da indução:</u> vamos provar que $(RS \cup R)^{k+1}R = R(SR \cup R)^{k+1}$

$(RS \cup R)^{k+1}R = (RS \cup R)(RS \cup R)^kR = (RS \cup R)R(SR \cup R)^k = R(S \cup \varepsilon)R(SR \cup R)^k =$

$= R(SR \cup R)(SR \cup R)^k = R(SR \cup R)^{k+1}$

Logo, para todo n € IN, $(RS \cup R)^n R = R(SR \cup R)^n$, por indução. ■

b. $R(RS \cup S)^*S = RR^*S(RR^*S)^*$

RESPOSTA = Provaremos que essa igualdade não é válida usando prova direta com um contra-exemplo.

Sejam R e S expressões regulares. Sejam R = 0 e S = 1, vamos verificar os resultados:

1º) $R(RS \cup S)^*S = 0(01 \cup 1)^*1$
2º) $RR^*S(RR^*S)^* = 00^*1(00^*1)^*$

Seja o contra-exemplo w = 00101.

1º) $0(01 \cup 1)^*1$ não gera 00101
2º) $00^*1(00^*1)^*$ gera 00101

Logo, por prova direta, usando o contra-exemplo w = 00101, $R(RS \cup S)^*S \neq RR^*S(RR^*S)^*$ ■

c. $(R \cup S)^* = R^* \cup S^*$

RESPOSTA = Provaremos que essa igualdade não é válida usando prova direta com um contra-exemplo.

Sejam R e S expressões regulares. Sejam R = 0 e S = 1, vamos verificar os resultados:

1º) $(R \cup S)^* = (0 \cup 1)^*$
2º) $R^* \cup S^* = 0^* \cup 1^*$

Seja o contra-exemplo w = 01.

1º) $(0 \cup 1)^*$ gera 01
2º) $0^* \cup 1^*$ não gera 01

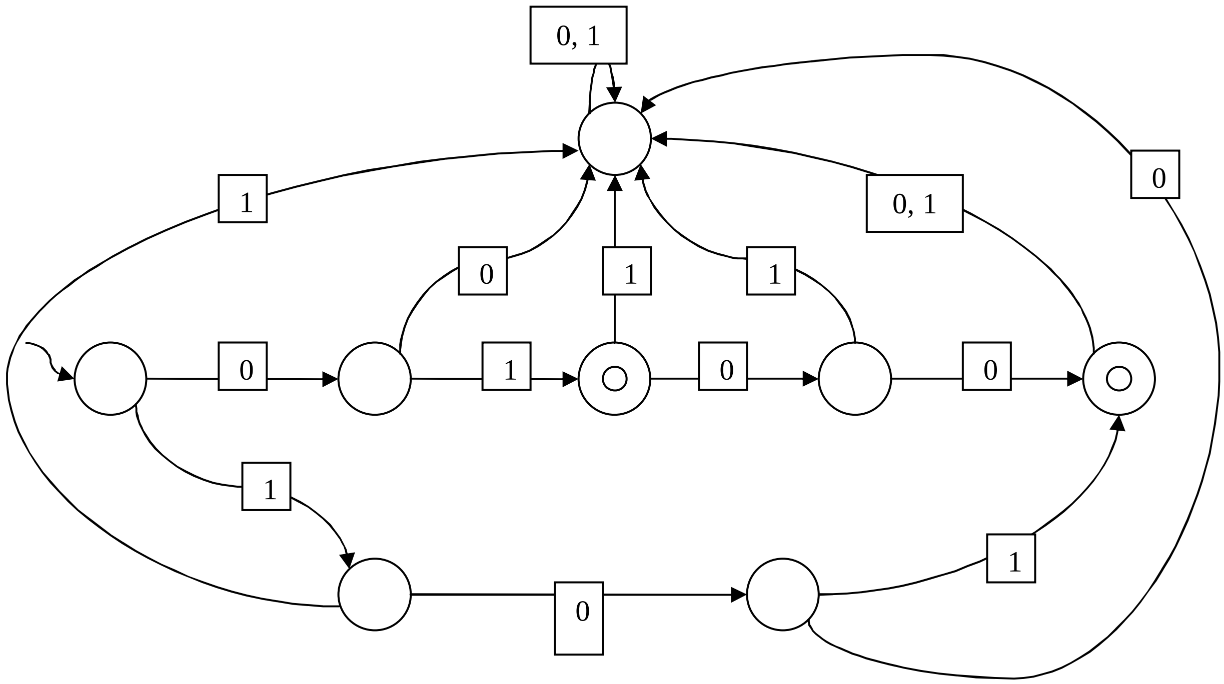
Logo, por prova direta, usando o contra-exemplo w = 01, $(R \cup S)^* \neq R^* \cup S^*$. ■

....

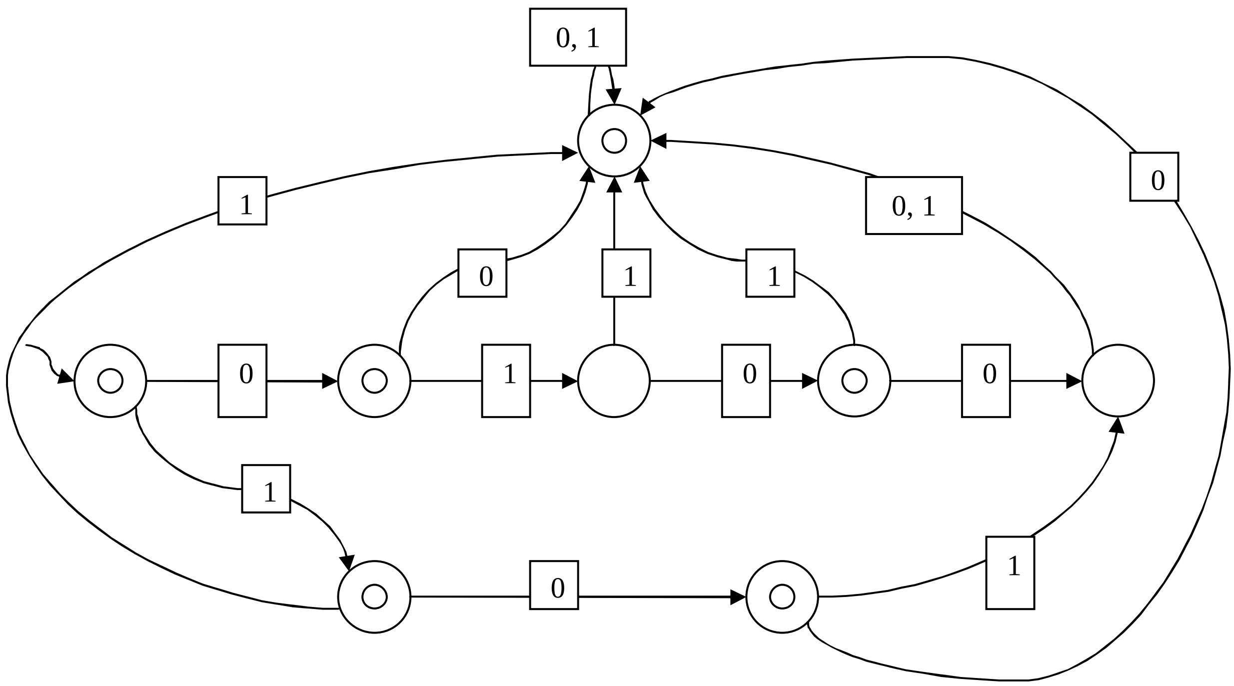
Exercício 7 Desenhe o diagrama de estados de um autômato finito determinístico para cada uma das linguagens abaixo. Obtenha ainda a expressão regular correspondente.

a. $\{w \mid w$ é qualquer palavra, exceto 01, 101, 0100$\}$

RESPOSTA = Para construir o diagrama de estados de um DFA para reconhecer esta linguagem, construiremos um autômato que aceita 01, 101 e 0100, e depois ajustaremos os estados finais de modo a rejeitar aquelas palavras (complemento):



Assim, o DFA pedido é o complemento deste acima:

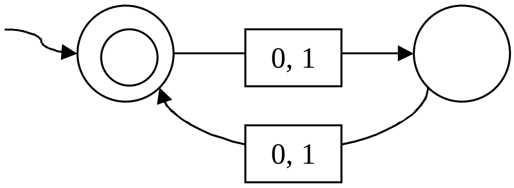


<u>Expressão Regular:</u> $\varepsilon \cup \Sigma \cup 1\Sigma \cup 00 \cup 0\Sigma\Sigma \cup 11\Sigma \cup 100 \cup 1\Sigma\Sigma\Sigma \cup 00\Sigma\Sigma \cup 011\Sigma \cup 0101 \cup \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma^*$

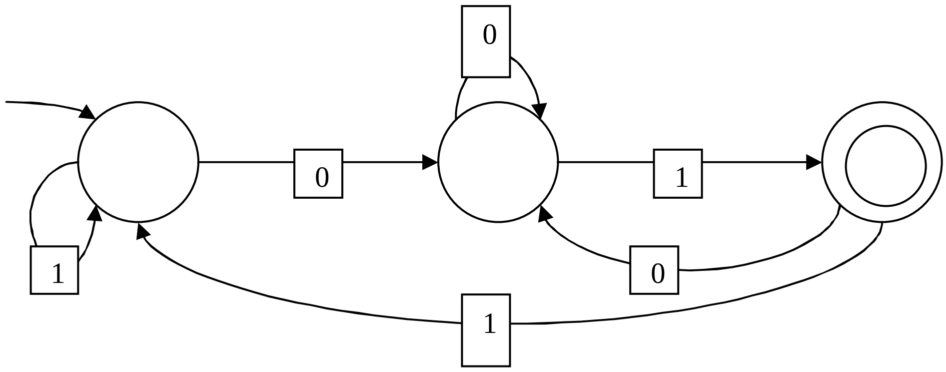
b. $\{w \mid w$ tem comprimento par ou termina em $01\}$

RESPOSTA = Para construir o diagrama de estados de um DFA para reconhecer esta linguagem, construiremos um autômato para reconhecer palavras sob cada condição e faremos a união dos dois (já que a classe de linguagens regulares é fechada sob união, por teorema).

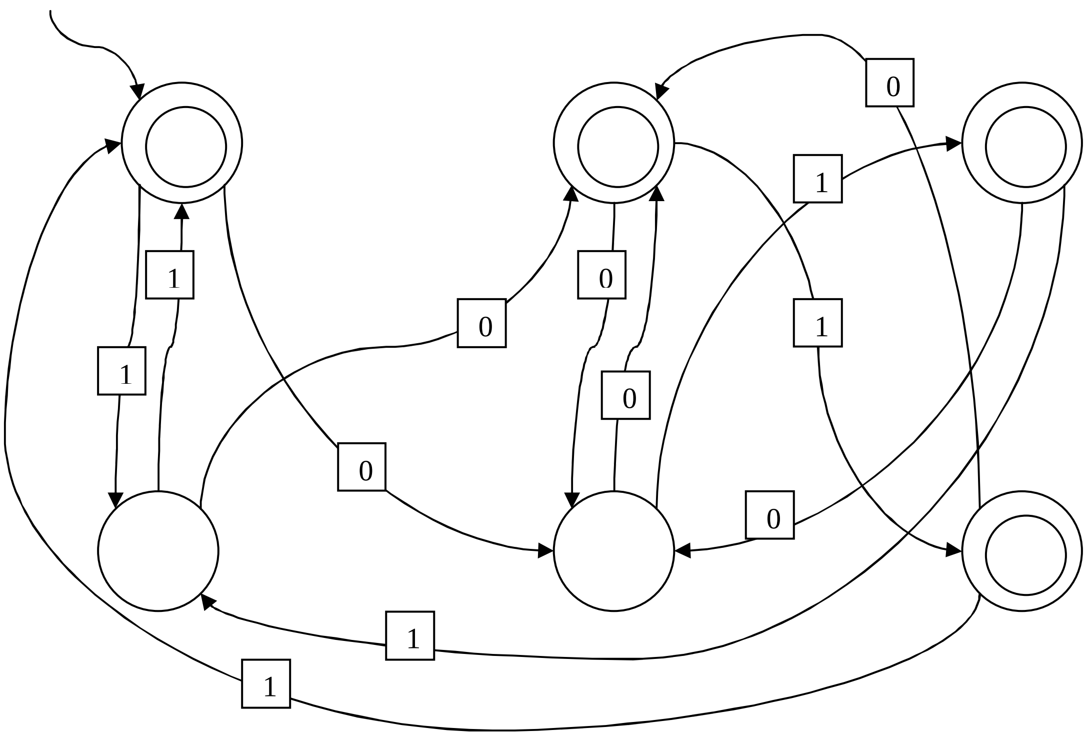
DFA que reconhece palavras de comprimento par:



DFA que reconhece palavras terminadas em 01:



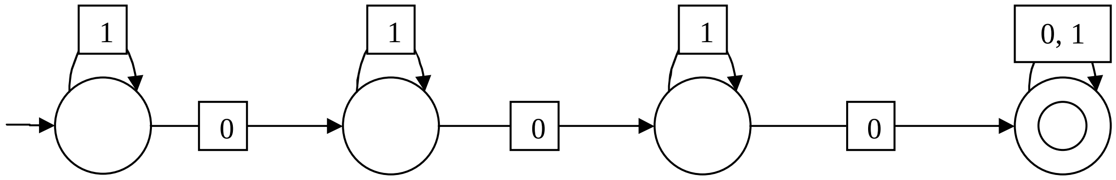
Utilizando a idéia da prova do teorema que afirma que a classe de linguagens regulares é fechada sob união (ver caderno), obtemos:



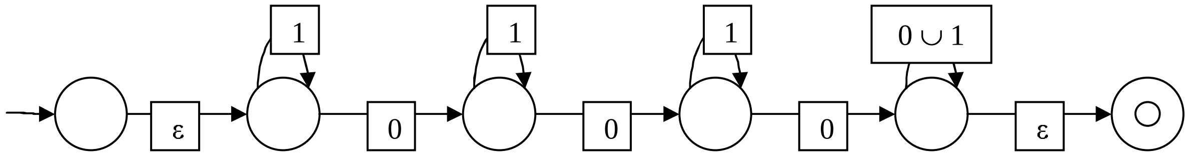
<u>Expressão Regular:</u> $(\Sigma\Sigma)^* \cup \Sigma^*01$

c. {*w* | *w* contém pelo menos três 0s}

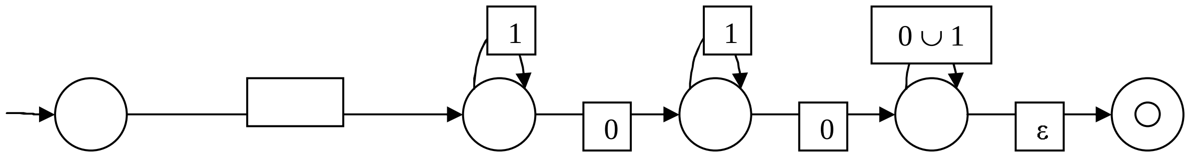
RESPOSTA = DFA que reconhece esta linguagem:



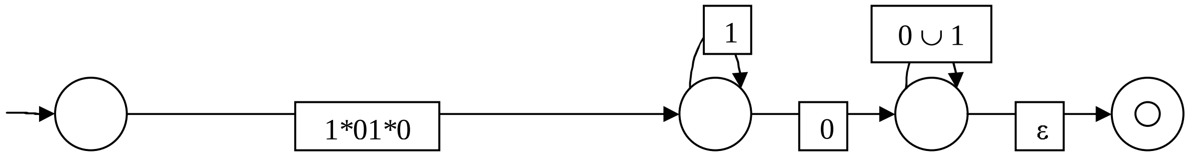
Vamos encontrar a expressão regular "removendo" os estados um a um, a partir de um GNFA:



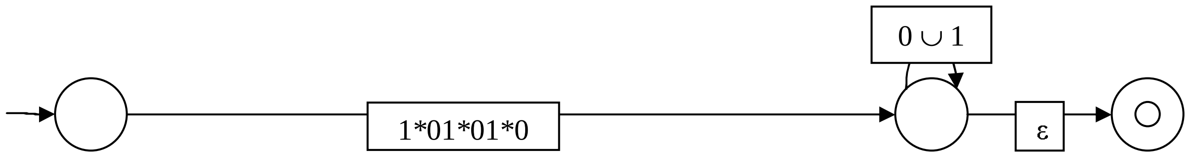
- removendo o 2º estado:



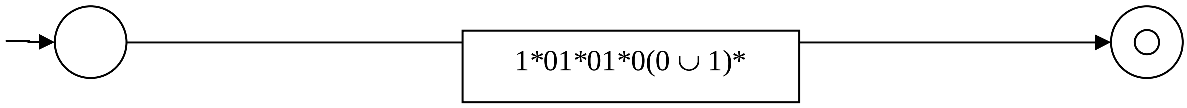
- removendo o 3º estado:



- removendo o 4º estado:



- removendo o 5º estado:



<u>Expressão Regular:</u> 1*01*01*0(0 ∪ 1)*

....

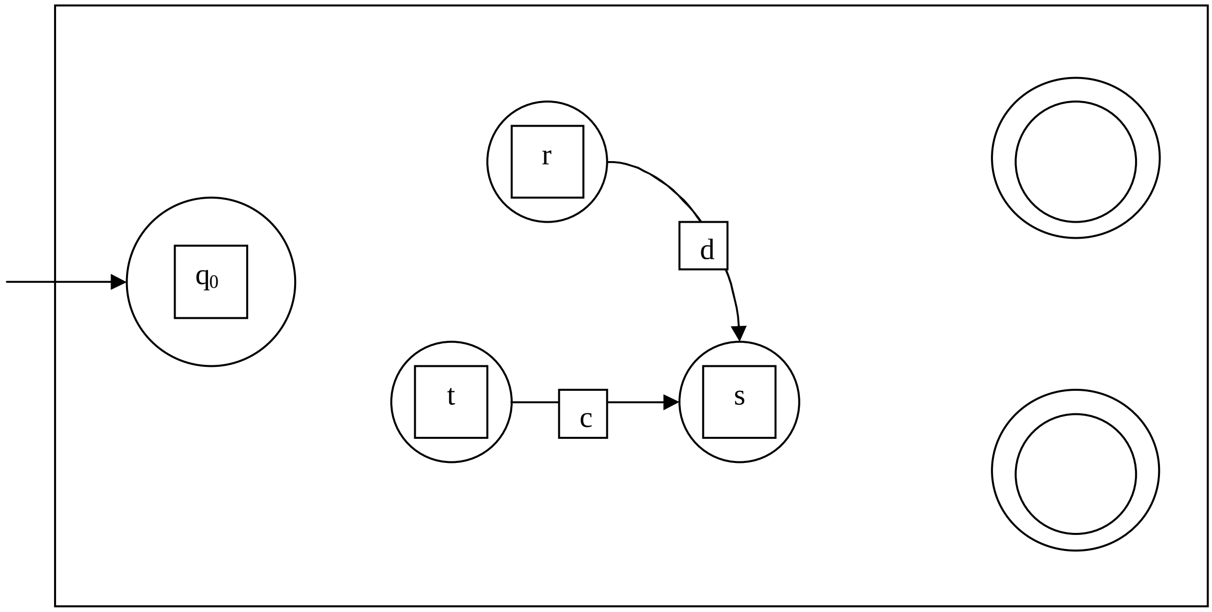
Exercício 8 Para qualquer palavra $w = w_1w_2...w_n$, o **reverso** de w, denotado por w^R, é a palavra $w^R = w_n...w_2w_1$. Para qualquer linguagem A, seja $A^R = \{w^R \mid w \in A\}$. Mostre que se A é regular, então A^R também é regular.

RESPOSTA = <u>Dados do Problema:</u>

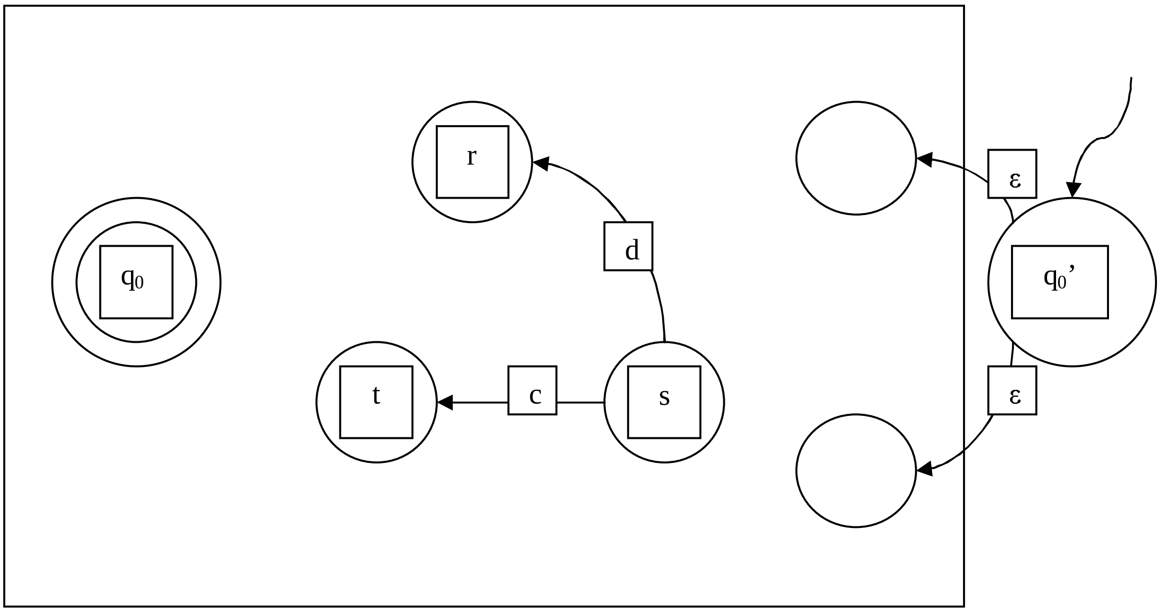
- para qualquer palavra $w = w_1w_2...w_n$, $w^R = w_n...w_2w_1$
- para qualquer linguagem A, $A^R = \{w^R \mid w \in A\}$

Temos que mostrar que se A é regular, A^R também é regular. ($\{c,d\} \in \Sigma$)

Seja um NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ com linguagem $L(N) = A$.



Seja um NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ com linguagem $L(N') = A^R$.



<u>Construção de N':</u>

- $Q' = Q \cup \{q_0'\}$
- $\delta'(q, a) = \{t \in Q \mid s \in \delta(t, a)\}$, se $q \neq q_0'$, ou
  $= F$, se $q = q_0'$ e $a = \varepsilon$, ou
  $= \varnothing$, se $q = q_0'$ e $a \neq \varepsilon$
- $q_0' = q_0'$ (novo estado)
- $F' = \{ q_0\}$

Logo, pela construção, $L(N') = A^R$, e como N' é uma NFA, por definição, A^R é regular. ■

....