UFLA – Universidade Federal de Lavras
Departamento de Ciência da Computação
COM162 – Linguagens Formais e Autômatos
Prof. Rudini Sampaio
Monitor: Rodrigo Pereira dos Santos

Terceira Lista de Exercícios – **2004/2**

....

Exercício 1 Descreva gramáticas Livres de Contexto que geram as seguintes linguagens, todas sobre o alfabeto {0, 1}.

a. {ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 11011011}

RESPOSTA = G = ({S}, {0, 1}, R, S), onde:

- R: S → 0 | 1 | 00 | 01 | 10 | 11 | 11011011 | ε

b. {*w* | o número de 1s é o dobro do número de 0s}

RESPOSTA = G = ({S}, {0, 1}, R, S), onde:

- R: S → 1S1S0 | 1S0S1 | 0S1S1 |ε

c. {*w* | |*w*|>2 é par e o antepenúltimo símbolo é o 1}

RESPOSTA = G = ({S, A}, {0, 1}, R, S), onde:

- R: S → A100 | A111 | A101 | A110
  A → AAA | 0 | 1

d. $\{1^a0^b1^c0^d \mid a, b, c, d \geq 0, b > a \text{ e } a+c = b+d\}$

RESPOSTA = G = ({S, X, Y}, {0, 1}, R, S), onde:

- R: S → XYX | ε
  X → 1X0 | ε
  Y → 0Y1 | ε

Obs) $1^a0^b1^c0^d = 1^a0^a0^{b-a}1^c0^d = 1^a0^a0^{b-a}1^{b-a}1^{c-(b-a)}0^d = 1^a0^a0^{b-a}1^{b-a}1^d0^d$

e. {*w* | a diferença em módulo entre o número de 0s e 1s é menor que 3}

RESPOSTA = G = ({A, B, C, S}, {0, 1}, R, S), onde:

- R: S → A | B | C
  A → C0C | C1C
  B → C0C0C | C1C1C
  C → 0C1C | 1C0C | ε

....

Exercício 2 Use o lema da iteração das linguagens livre de contexto para mostrar que as seguintes linguagens não são livres de contexto.

a. $\{0^n 1^{2n} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$

RESPOSTA = Por contradição, suponha que A é livre de contexto. Logo, A satisfaz o lema da iteração para linguagens livres de contexto e existe um inteiro <u>p</u>. Tome $s = 0^p1^{2p}0^{3p}$ Є A. Pelo lema, s pode ser escrita como $s = uvxyz = 0^p1^{2p}0^{3p}$. Analisando a 1ª condição do lema (uv^ixy^iz Є A, para todo $i \geq 0$):

<u>Caso 1:</u> v e y contém apenas um tipo de símbolo. Neste caso, uv^2xy^2z não obedece à proporção 1:2:3 entre os três trechos dos quais a palavra é formada, já que dado este caso, um dos trechos (0's ou 1's ou 0's) não "cresce" em relação aos demais quando do incremento nas quantidades de v e y. Logo, uv^2xy^2z não pertence a A.
<u>Caso 2:</u> v ou y contém mais de um tipo de símbolo. Neste caso, uv^2xy^2z pode até seguir a proporção 1:2:3 entre os três trechos da palavra, mas não na ordem correta. Logo, uv^2xy^2z não pertence a A.

Contradição.

■

b. $\{1^m \mid m = n^2, n \geq 0\}$

RESPOSTA = Por contradição, suponha que B é livre de contexto. Logo, B satisfaz o lema da iteração para linguagens livres de contexto e existe um inteiro <u>p</u>. Tome $s = 1^{p.p}$ Є B. Como $|s| \geq p$, então s pode ser escrita como $s = uvxyz = 0^p1^{2p}0^{3p}$. Além disso, uv^ixy^iz Є B, para todo $i \geq 0$. Seja $m = |uxz|$ e $p \geq k = |vy| > 0$. Então, m, m + k, m + 2k, m + 3k, ..., devem ser quadrados perfeitos, já que o comprimento da palavra é p^2, que é um quadrado perfeito.

O comprimento de uvxyz é $p^2 = m + k$. Mas $p^2 < |uvvxyyz| = p^2 + k \leq p^2 + p < (p + 1)^2$. Logo, |uvvxyyz| não é quadrado perfeito.

Contradição.

■

c. $\{w \mid$ o número de 1s em w é o quadrado do número de 0s$\}$

RESPOSTA = Por contradição, suponha que C é livre de contexto. Logo, C satisfaz o lema da iteração para linguagens livres de contexto e existe um inteiro <u>p</u>. Tome $s = 0^p1^{p.p}$ Є C, $|s| \geq p$, onde p vem do lema. Analisando a 1ª condição do lema (uv^ixy^iz Є C, para todo $i \geq 0$):

<u>Caso 1:</u> v e y contém apenas um tipo de símbolo. Neste caso, uv^2xy^2z não obedece à proporção de o número de 1's ser o quadrado do número de 0's. Logo, uv^2xy^2z não pertence a C.
<u>Caso 2:</u> v ou y contém mais de um tipo de símbolo. Neste caso, uv^2xy^2z pode até seguir a proporção entre as quantidades de 0's e 1's, sem manter a ordem entre os elementos.

Como no 2º caso não tivemos uma contradição, vamos analisar a construção da palavra s:

- Seja |uxz| = m, contendo <u>a</u> 0's e <u>b</u> 1's.
- Seja |vy| = k, contendo <u>c</u> 0's e <u>d</u> 1's.

Obs) <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u> e <u>d</u> representam as quantidades de símbolos em cada subpalavra de s.

Vamos verificar algumas possibilidades:

(1) uxz → a 0's e b 1's.
(2) uvxyz → (a + c) 0's e (b + d) 1's.
(3) uv^2xy^2z → (a + 2c) 0's e (b + 2d) 1's.
(4) uv^3xy^3z → (a + 3c) 0's e (b + 3d) 1's.
(5) uv^4xy^4z → (a + 4c) 0's e (b + 4d) 1's.
...

Como, em (1), $b = a^2$ (quantidade de 1's é o quadrado da quantidade de 0's), segue nos demais casos:

(2) – $(b + d) = (a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$
$(b + d) = (a + c)^2 = b + c.(2a + c)$
$b + d = b + c.(2a + c)$
$d = c.(2a + c)$

(3) – $(b + 2d) = (a + 2c)^2 = a^2 + 4ac + 4c^2$
$(b + 2d) = (a + 2c)^2 = b + 4c.(a + c)$
$b + 2c.(2a + c) = b + 4c.(a + c)$
$2a + c = 2a + 2c$
$c = 2c$
$2c - c = 0$
$c = 0$

Se c = 0, logo: $d = c.(2a + c) \rightarrow d = 0.(2a + 0) \rightarrow d = 0$.
Mas, c = 0 e d = 0 acontecem em (1), onde s = uxz. No entanto, considerando a 2ª condição do lema da iteração (|vy| > 0), ocorre uma falha.

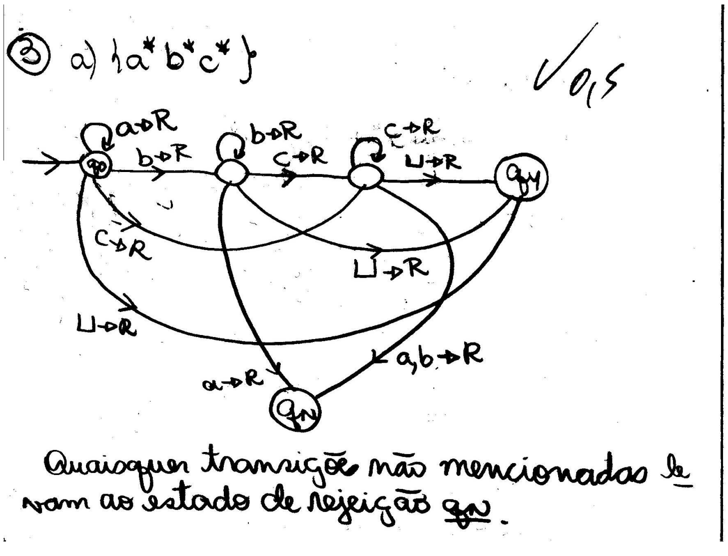
Contradição.

■

....

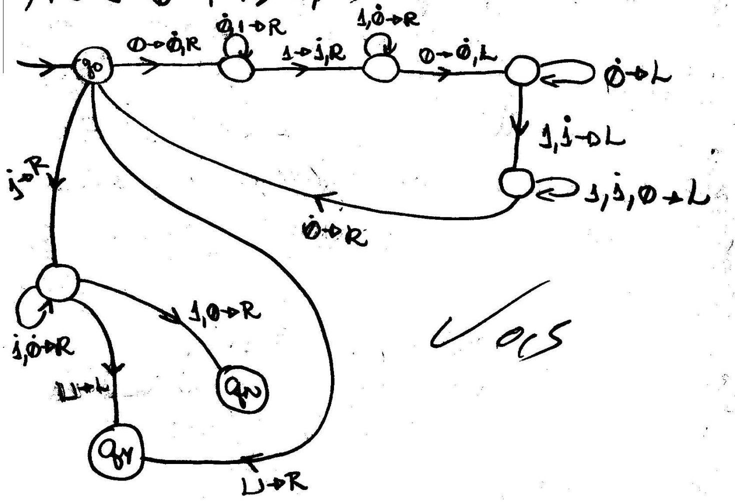
Exercício 3 Desenhe diagramas de estados para M.T. que decidem as linguagem:

a. $\{a^*b^*c^*\}$



b. $\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$

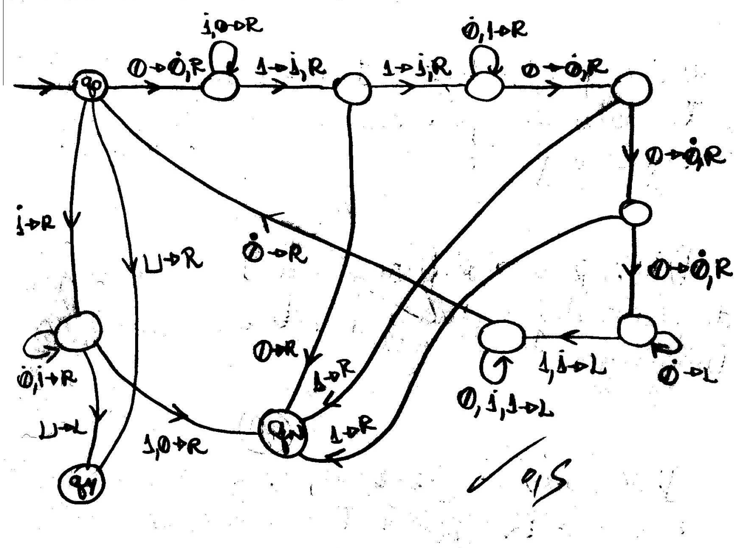
b) $\{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$



Quaisquer transições não mencionadas levam ao estado de rejeição q_r.

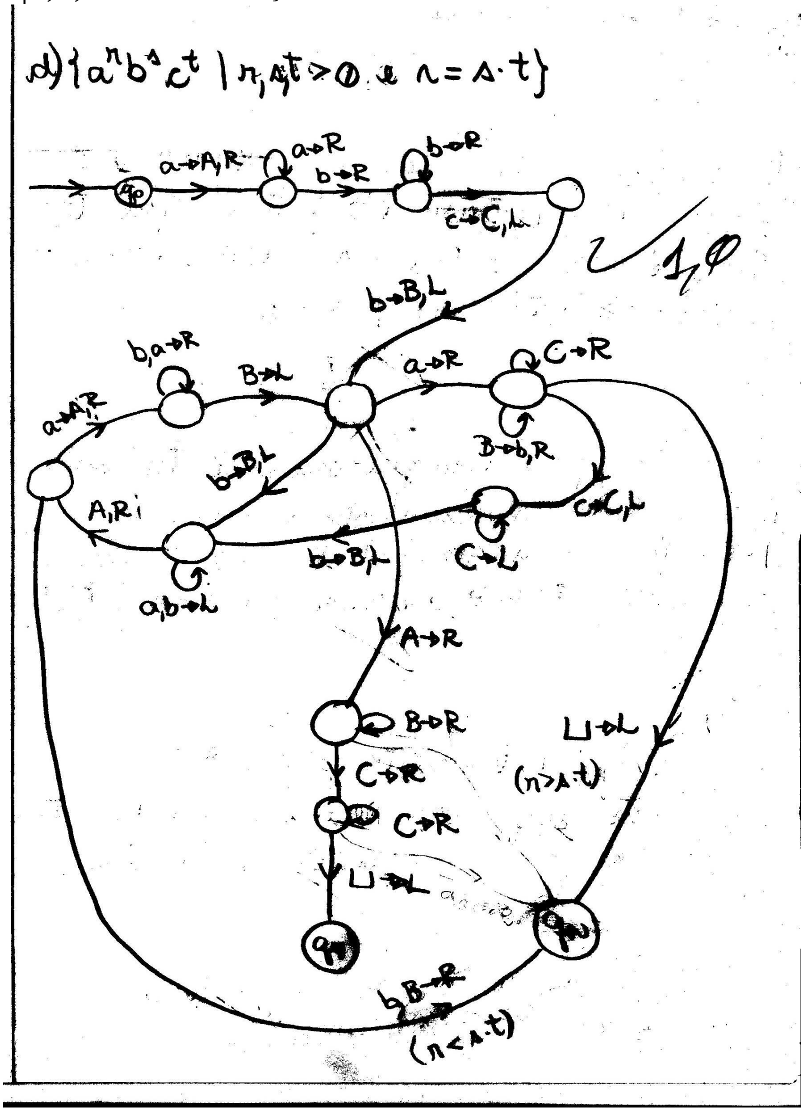
c. $\{0^n 1^{2n} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$

c) $\{0^n 1^{2n} 0^{3n} \mid n \geq 0\}$



As transições não mencionadas levam ao estado de rejeição q_r.

d. $\{a^r b^s c^t \mid r, s, t > 0 \text{ e } r = s \bullet t\}$



....

Exercício 4 Indique se as expressões abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique:

a. Toda linguagem regular é livre de contexto.

RESPOSTA = VERDADEIRO, pois existe um corolário que afirma isso a partir do fato de que todo autômato finito é uma autômato com pilha (que não usa a pilha).

b. Uma palavra é aceita por DFA se a computação consegue alcançar um estado final

RESPOSTA = FALSO, pois uma palavra é aceita por um DFA se seus símbolos pertencem ao alfabeto da linguagem por ele reconhecida e se a computação termina em um estado final.

c. NFA e autômatos com Pilha são máquinas não-determinísticas.

RESPOSTA = VERDADEIRO, por definição, já que NFA's e autômatos com pilha se utilizam do não-determinismo em suas computações.

d. DFA, M.T. e Gramática livre de contexto são máquinas determinísticas.

RESPOSTA = FALSO, pois uma gramática livre de contexto não é um autômato e, portanto, não é uma máquina não-determinística.

e. Autômatos com Pilha reconhecem linguagens regulares.

RESPOSTA = VERDADEIRO, já que todo autômato finito é um autômato com pilha, este reconhece linguagens regulares.

f. Toda linguagem que está na forma normal de Chomsky é livre de contexto.

RESPOSTA = FALSO, pois a definição de forma normal de Chomsky é para gramática e não para linguagem.

g. A linguagem de um autômato com Pilha pode ser gerada por uma gramática livre de contexto.

RESPOSTA = VERDADEIRO, pois, por teorema, existe uma equivalência entre autômatos com pilha e gramáticas livres de contexto.

h. A linguagem de uma M.T. qualquer é recursivamente enumerável.

RESPOSTA = VERDADEIRO, pois, por definição, se uma linguagem é reconhecida por alguma máquina de Turing, ele é recursivamente enumerável.

i. Toda linguagem que não entra em *loop* é recursiva.

RESPOSTA = FALSO, pois linguagens não entram em *loop*, e sim máquinas de Turing.

j. Toda linguagem recursiva possui uma M.T. que a reconhece sem entrar em *loop*.

RESPOSTA = VERDADEIRO, por definição, uma vez que linguagem recursiva é aquela reconhecida por uma máquina de Turing sem que esta entre em *loop*.

k. Uma palavra é aceita em uma M.T. se sua computação chega no estado de aceitação e a palavra de entrada é totalmente lida.

RESPOSTA = FALSO, pois, por definição, uma máquina de Turing aceita uma palavra se sua computação termina em um estado de aceitação, sem que a palavra precise ser necessariamente lida por completo.

l. Toda linguagem recursiva é recursivamente enumerável.

RESPOSTA = VERDADEIRO, por definição, uma linguagem recursiva é uma linguagem recursivamente enumerável, na qual sua máquina de Turing correspondente não entra em *loop*.

m. Lemas da iteração conseguem provar se uma linguagem é regular ou livre de contexto.

RESPOSTA = FALSO, pois são da forma se...então, e conseguem provar se uma linguagem não é regular ou não é livre de contexto, quando pelo menos uma de suas condições falhar.
....