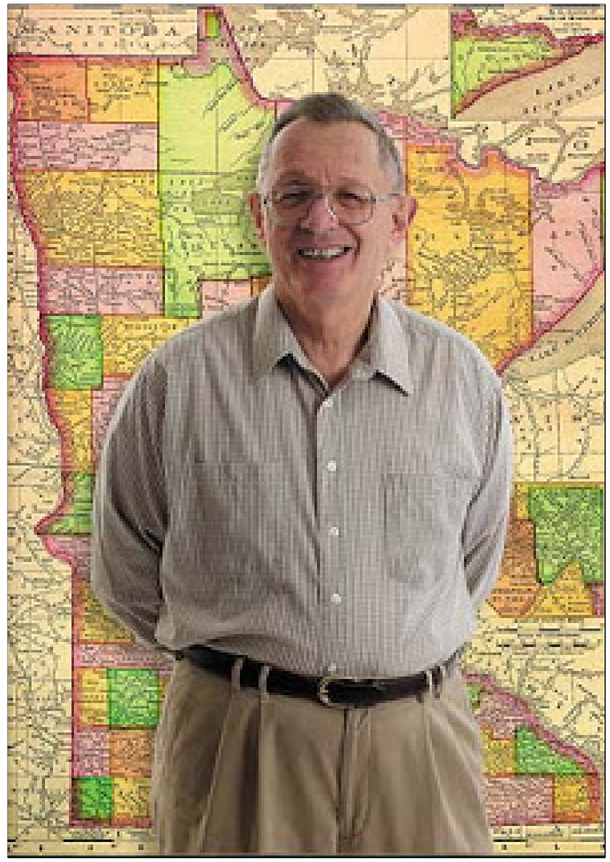
Bastam Quatro Cores

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

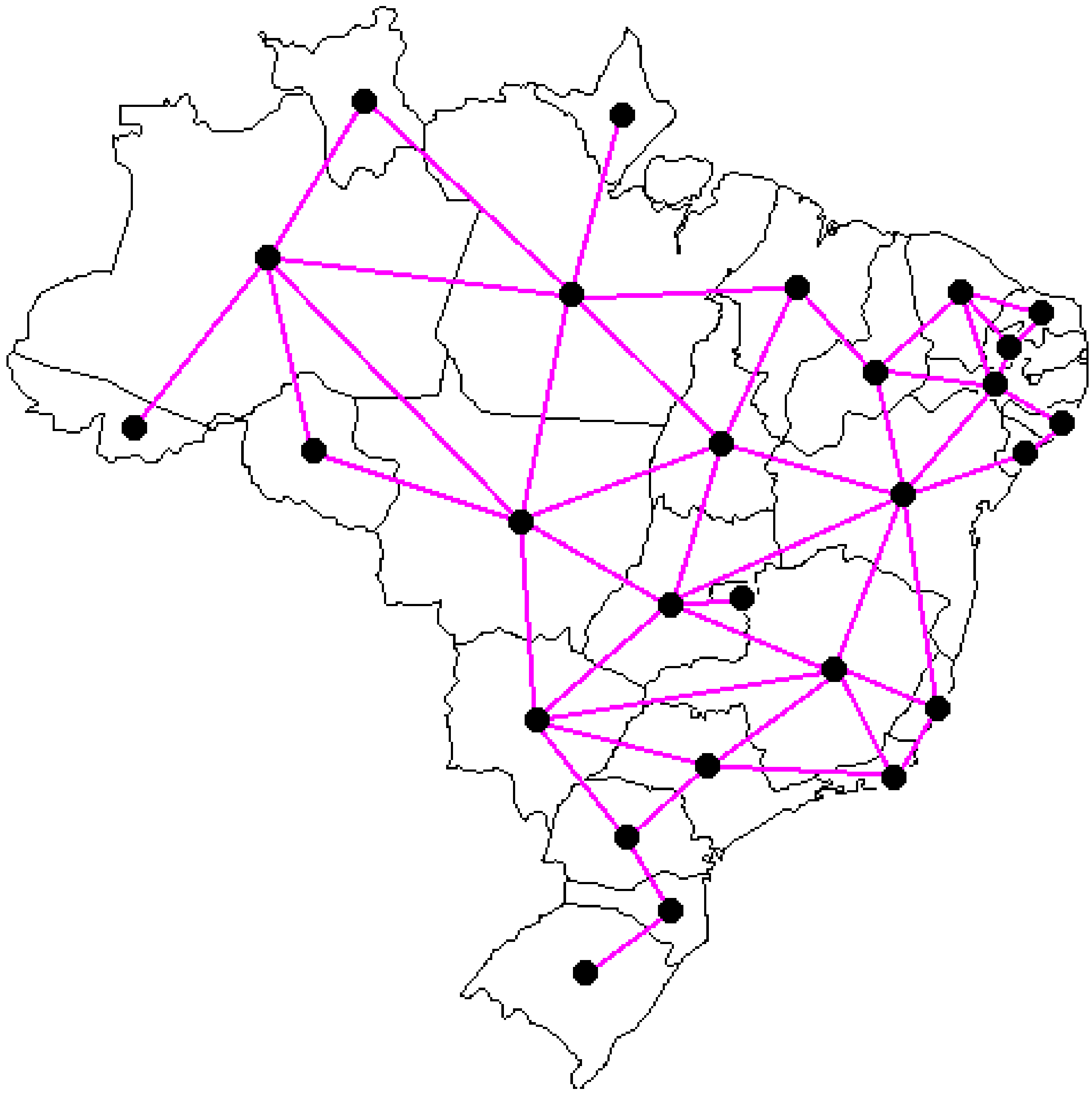
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

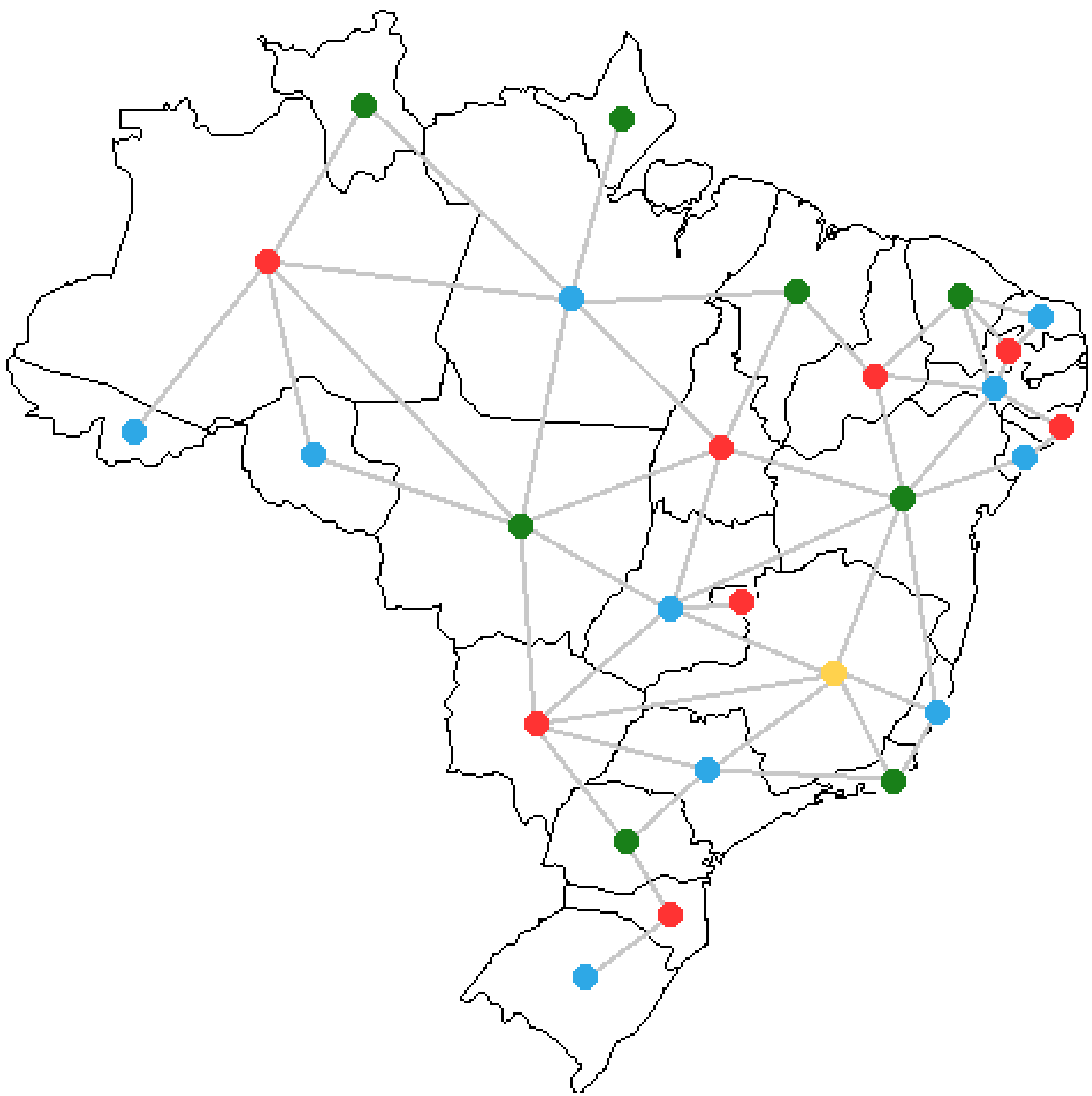
COPPE
UFRJ



Kenneth Appel

1932 – 2013

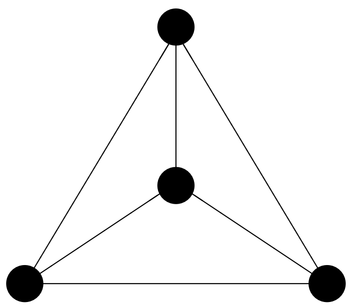




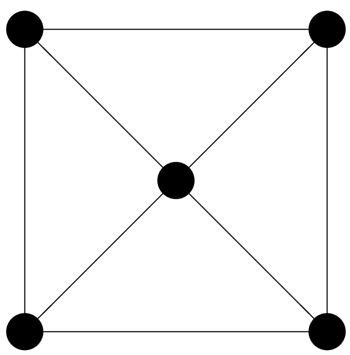
História: O Problema das Quatro Cores

Francis Guthrie (1852):

Todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores?



quatro cores são necessárias



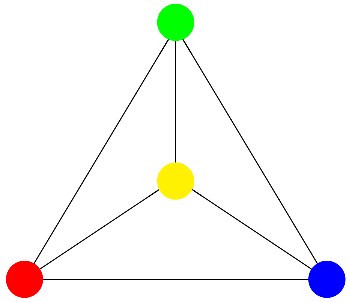
três cores são suficientes

Será que quatro cores são suficientes sempre?

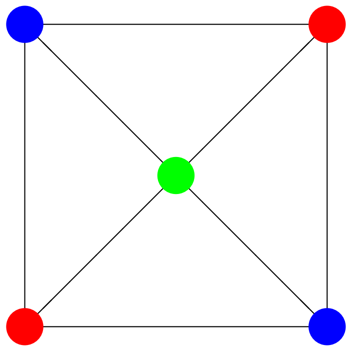
História: O Problema das Quatro Cores

Francis Guthrie (1852):

Todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores?



quatro cores são necessárias



três cores são suficientes

Será que quatro cores são suficientes sempre?

A Fórmula de Euler (1758)

$$f - m + n = 2$$

Consequências:

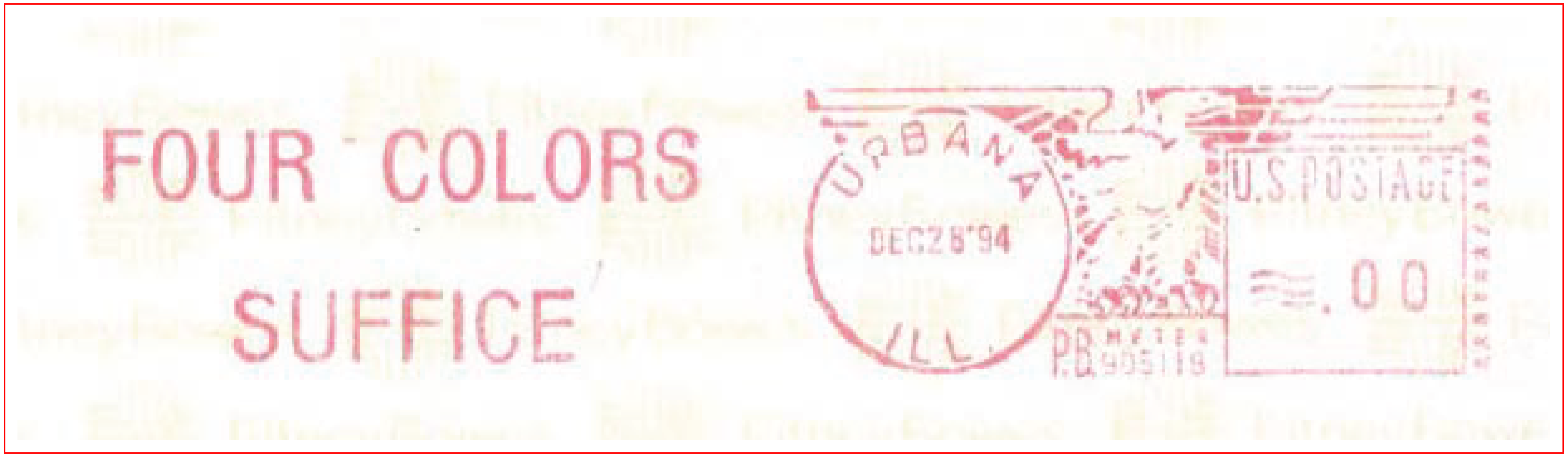
$m \leq 3n - 6$ nunca 5 mutuamente adjacentes

$\sum_i (6-i)n(i) \geq 12$ sempre vértice com grau no máximo 5

O Teorema das Quatro Cores

Appel e Haken (1977):

- Sim! (prova usando computador)
- conjunto inevitável de 1476 configurações redutíveis
- algoritmo colore grafo planar com quatro cores em tempo $O(n^4)$



O Teorema das Quatro Cores

Appel e Haken (1977):

Sim! (prova usando computador)

conjunto inevitável de 1476 configurações redutíveis

algoritmo colore grafo planar com quatro cores em tempo $O(n^4)$

Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1997):

Sim!! (prova também usando computador)

conjunto inevitável de 633 configurações redutíveis

algoritmo colore grafo planar com quatro cores em tempo $O(n^2)$

Problema das quatro cores: coloração dos vértices

`http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html`

Coloração de vértices e de arestas

Coloração de um grafo:
atribuição de cores aos vértices ou às arestas do grafo de tal forma que não haja conflitos

Foco:
coloração mínima de vértices e coloração mínima de arestas
em classes de grafos

Coloração dos vértices:
associamos cores aos vértices do grafo de tal forma que a vértices adjacentes sejam atribuídas cores distintas

Coloração das arestas:
associamos cores às arestas do grafo de tal forma que a arestas adjacentes sejam atribuídas cores distintas

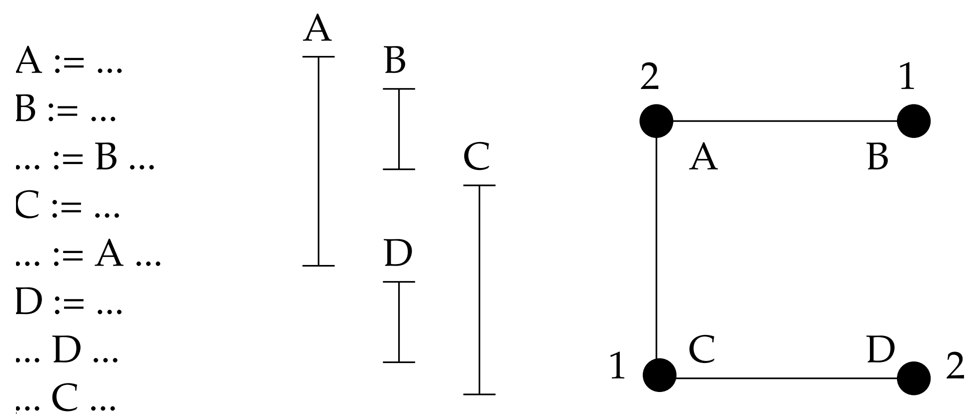
Exemplo: alocação de registradores

Variável em bloco de programa corresponde ao intervalo no qual ela é necessária

Objetivo: minimizar o número de registradores

Grafo de interseção desses intervalos é construído

Coloração dos vértices deste grafo dará um esquema de alocação das variáveis em registradores



Nesta aplicação, cores representam registradores

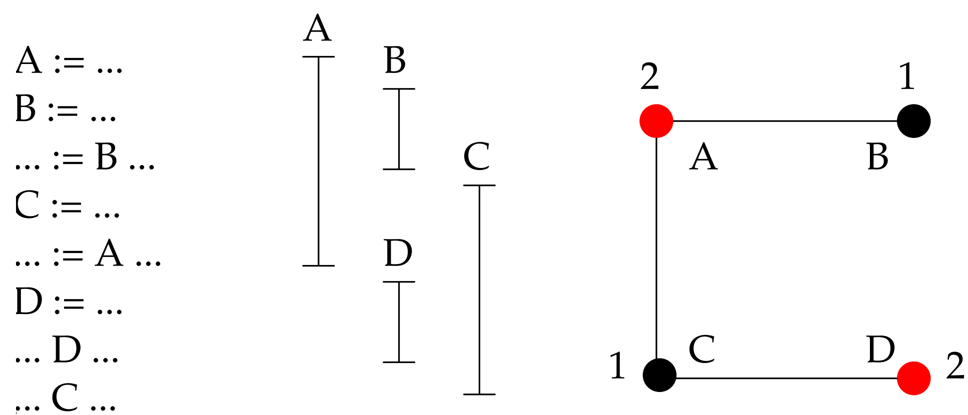
Exemplo: alocação de registradores

Variável em bloco de programa corresponde ao intervalo no qual ela é necessária

Objetivo: minimizar o número de registradores

Grafo de interseção desses intervalos é construído

Coloração dos vértices deste grafo dará um esquema de alocação das variáveis em registradores



Nesta aplicação, cores representam registradores

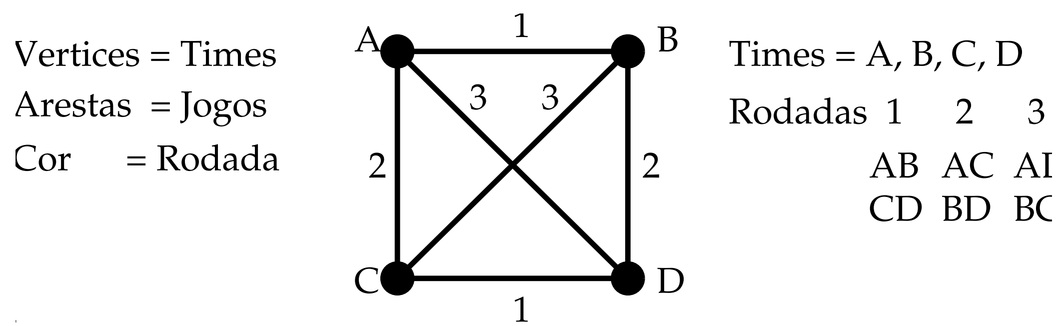
Exemplo: planejamento de torneios

Dada uma federação de times, fazer uma tabela que especifique quem joga com quem em cada rodada

Objetivo: minimizar o número de rodadas

Esquema para grafos completos: fazer a primeira rodada (um emparelhamento máximo qualquer) e depois permutar ciclicamente todos os times, menos o primeiro

Coloração das arestas deste grafo dará um torneio



Nesta aplicação, cores representam rodadas

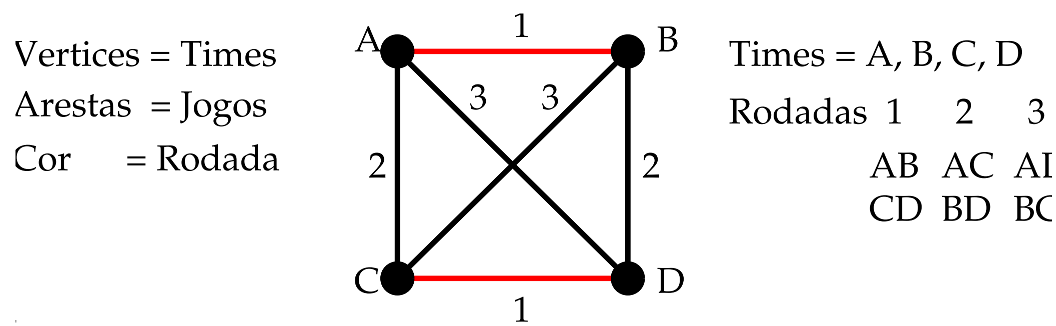
Exemplo: planejamento de torneios

Dada uma federação de times, fazer uma tabela que especifique quem joga com quem em cada rodada

Objetivo: minimizar o número de rodadas

Esquema para grafos completos: fazer a primeira rodada (um emparelhamento máximo qualquer) e depois permutar ciclicamente todos os times, menos o primeiro

Coloração das arestas deste grafo dará um torneio



Nesta aplicação, cores representam rodadas

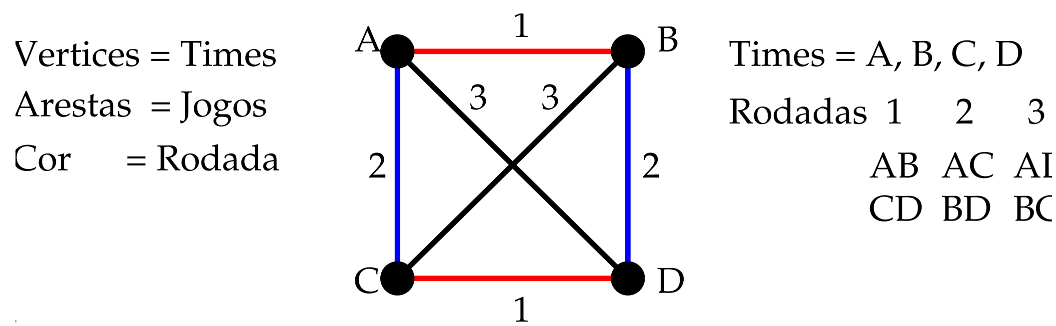
Exemplo: planejamento de torneios

Dada uma federação de times, fazer uma tabela que especifique quem joga com quem em cada rodada

Objetivo: minimizar o número de rodadas

Esquema para grafos completos: fazer a primeira rodada (um emparelhamento máximo qualquer) e depois permutar ciclicamente todos os times, menos o primeiro

Coloração das arestas deste grafo dará um torneio



Nesta aplicação, cores representam rodadas

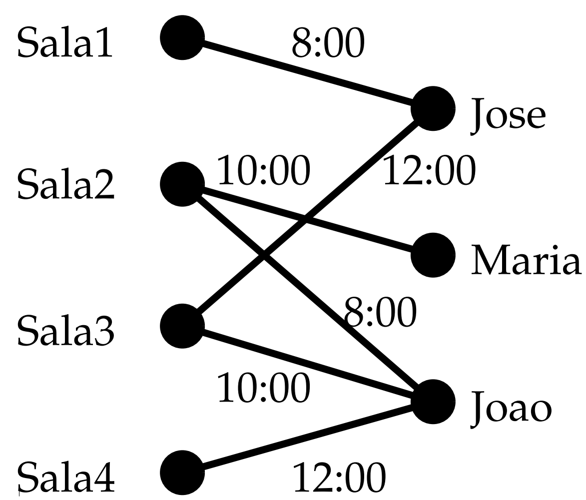
Exemplo: alocação de horários

Alocação de salas, horários e professores num colégio

Objetivo: minimizar o número de horas

Modelamos com um grafo bipartido em professores e salas.
Aresta entre professor e sala: professor tem que dar aula naquela sala

Coloração das arestas deste grafo bipartido
corresponde a uma alocação dos horários
de cada uma destas salas



Nesta aplicação, cores representam horas

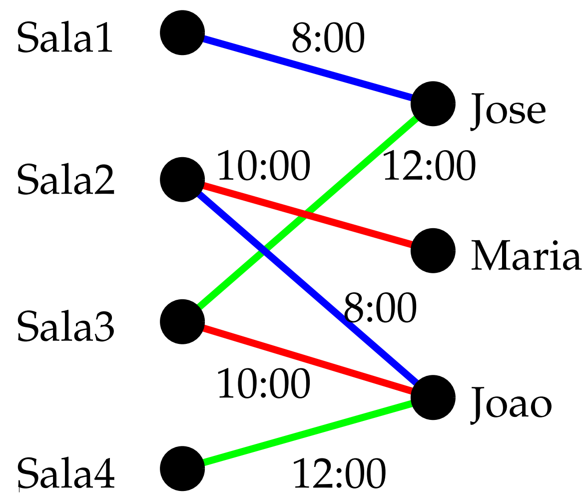
Exemplo: alocação de horários

Alocação de salas, horários e professores num colégio

Objetivo: minimizar o número de horas

Modelamos com um grafo bipartido em professores e salas.
Aresta entre professor e sala: professor tem que dar aula naquela sala

Coloração das arestas deste grafo bipartido corresponde a uma alocação dos horários de cada uma destas salas



Nesta aplicação, cores representam horas

Coloração em grafos

Celina M. Herrera de Figueiredo

Instituto de Matemática e COPPE, UFRJ

João Meidanis, Célia Picinin de Mello

Instituto de Computação, UNICAMP

XVI JAI, XVII Congresso da SBC, Brasília, agôsto 1997

`http://www.cos.ufrj.br/~celina/ftp/jai97.pdf`

Número cromático

k-coloração dos vértices de um grafo G:

associação de k cores aos vértices de G tal que vértices adjacentes tenham cores distintas

Queremos o menor número de cores possível para grafo G

$\chi(G) =$ número cromático de G

Índice cromático

k-coloração das arestas de um grafo G:

associação de k cores às arestas de G tal que
arestas adjacentes tenham cores distintas

Queremos o menor número de cores possível para grafo G

$\chi'(G) =$ índice cromático de G

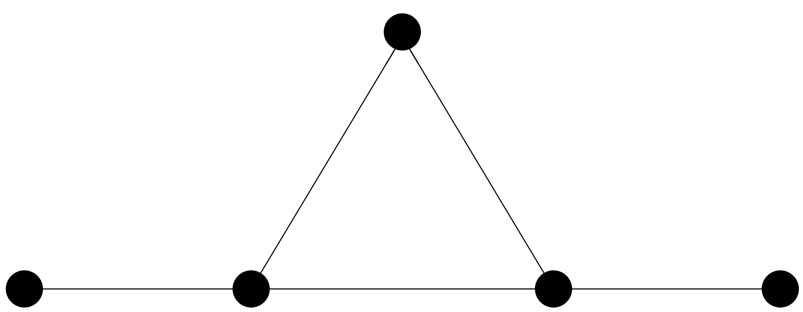
Limite inferior: coloração de vértices

Clique é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo

$\omega(G) =$ tamanho de uma maior clique em G

Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$



grafo com $\omega(G) = \chi(G)$

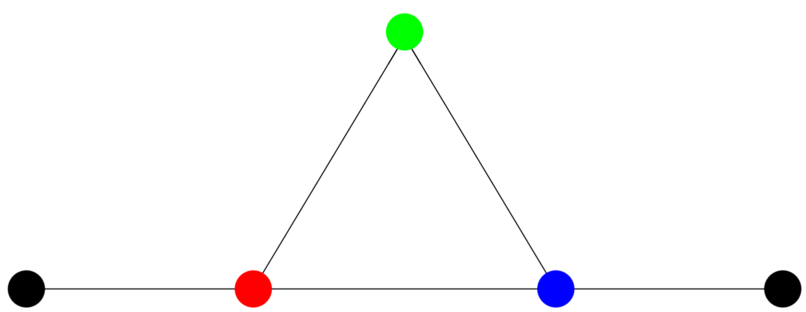
Limite inferior: coloração de vértices

Clique é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo

$\omega(G)$ = tamanho de uma maior clique em G

Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$



grafo com $\omega(G) = \chi(G)$

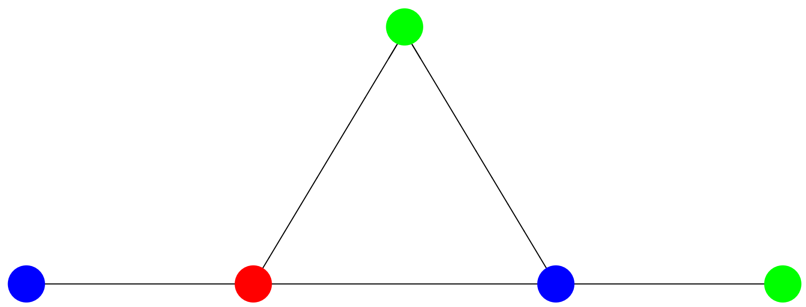
Limite inferior: coloração de vértices

Clique é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo

$\omega(G) =$ tamanho de uma maior clique em G

Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$



grafo com $\omega(G) = \chi(G)$

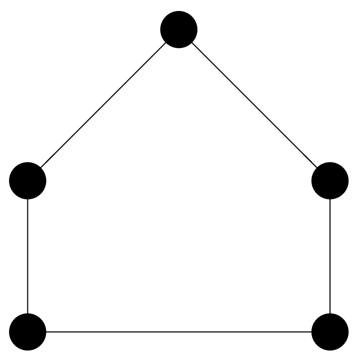
Limite inferior: coloração de vértices

Clique é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo

$\omega(G) =$ tamanho de uma maior clique em G

Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$



grafo com $\omega(G) < \chi(G)$

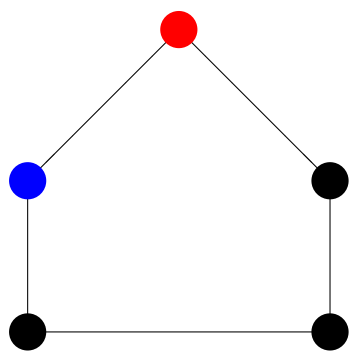
Limite inferior: coloração de vértices

Clique é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo

$\omega(G) =$ tamanho de uma maior clique em G

Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$



grafo com $\omega(G) < \chi(G)$

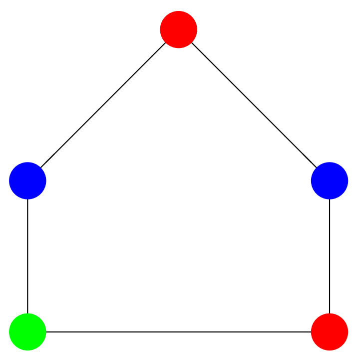
Limite inferior: coloração de vértices

Clique é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo

$\omega(G) =$ tamanho de uma maior clique em G

Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$



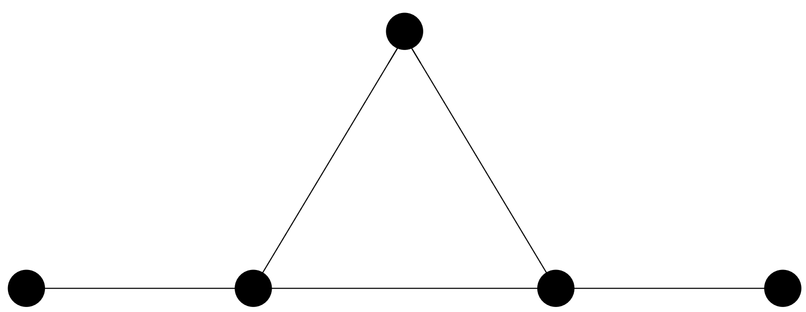
grafo com $\omega(G) < \chi(G)$

Limite inferior: coloração de arestas

$\Delta(G) =$ grau máximo em G

Limite inferior para coloração de arestas:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$



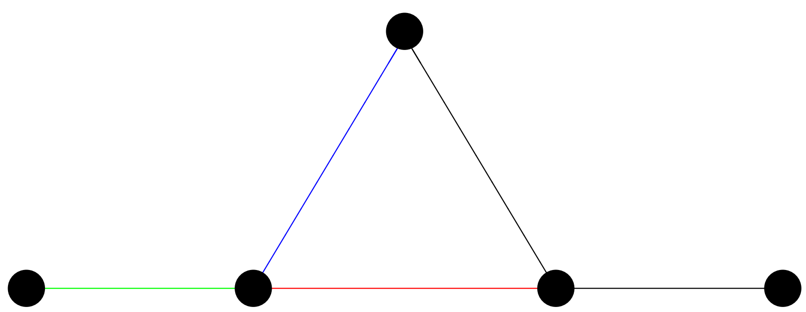
grafo com $\chi'(G) = \Delta(G)$

Limite inferior: coloração de arestas

$\Delta(G) =$ grau máximo em G

Limite inferior para coloração de arestas:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$



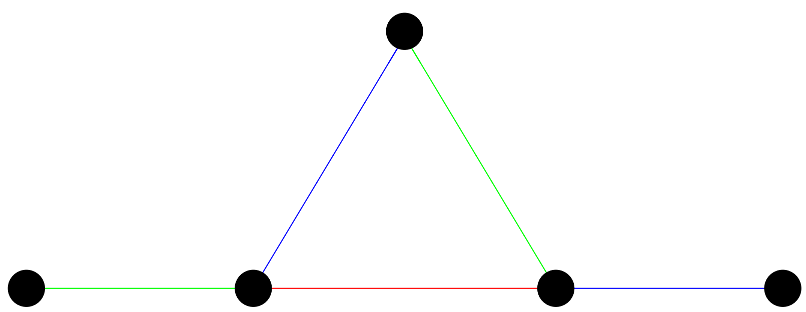
grafo com $\Delta(G) = \chi'(G)$

Limite inferior: coloração de arestas

$\Delta(G) =$ grau máximo em G

Limite inferior para coloração de arestas:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$



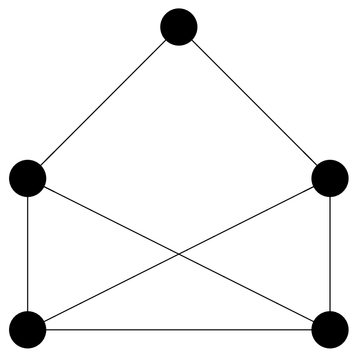
grafo com $\Delta(G) = \chi'(G)$

Limite inferior: coloração de arestas

$\Delta(G) =$ grau máximo em G

Limite inferior para coloração de arestas:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$



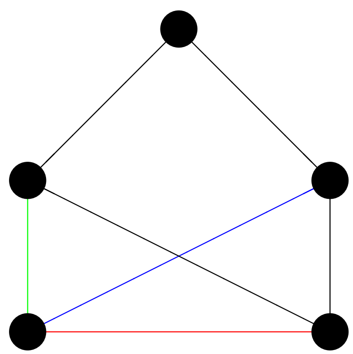
grafo com $\Delta(G) < \chi'(G)$

Limite inferior: coloração de arestas

$\Delta(G) =$ grau máximo em G

Limite inferior para coloração de arestas:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$



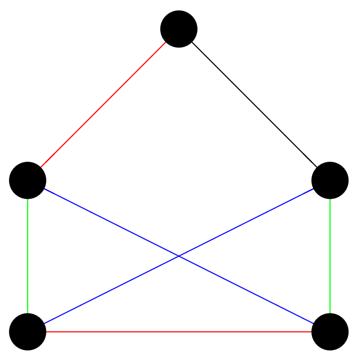
grafo com $\Delta(G) < \chi'(G)$

Limite inferior: coloração de arestas

$\Delta(G) =$ grau máximo em G

Limite inferior para coloração de arestas:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G)$$



grafo com $\Delta(G) < \chi'(G)$

Grafos bipartidos: coloração dos vértices

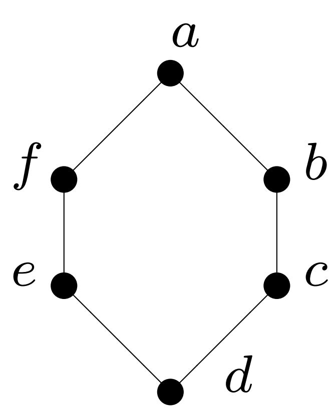
Sempre temos $\omega(G) \leq \chi(G)$

Para os grafos bipartidos, temos igualdade:

- o grafo é trivial e tem ambos parâmetros iguais a 1

ou

- o grafo tem pelo menos uma aresta e tem ambos parâmetros iguais a 2



bipartido

Grafos bipartidos: coloração dos vértices

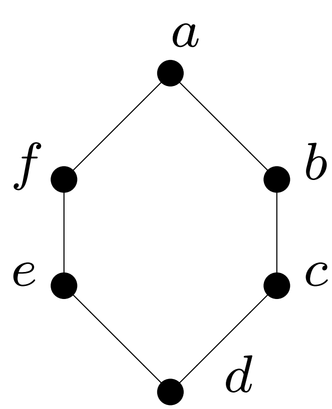
Sempre temos $\omega(G) \leq \chi(G)$

Para os grafos bipartidos, temos igualdade:

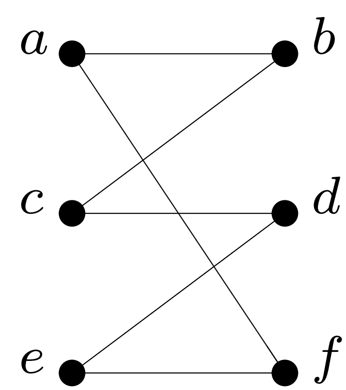
- o grafo é trivial e tem ambos parâmetros iguais a 1

ou

- o grafo tem pelo menos uma aresta e tem ambos parâmetros iguais a 2



bipartido



2-partição

Grafos bipartidos: coloração dos vértices

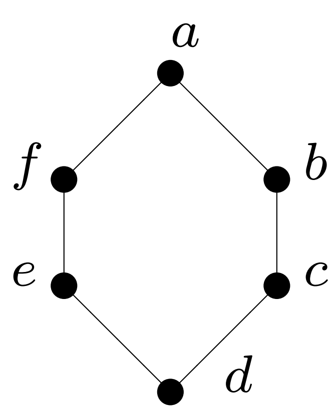
Sempre temos $\omega(G) \leq \chi(G)$

Para os grafos bipartidos, temos igualdade:

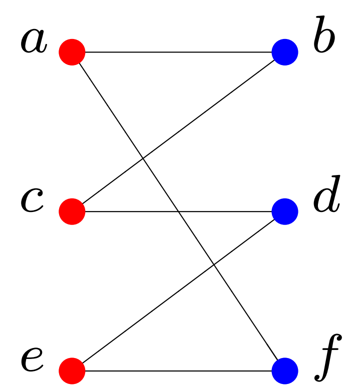
- o grafo é trivial e tem ambos parâmetros iguais a 1

ou

- o grafo tem pelo menos uma aresta e tem ambos parâmetros iguais a 2



bipartido



2-coloração

Grafos bipartidos: coloração dos vértices

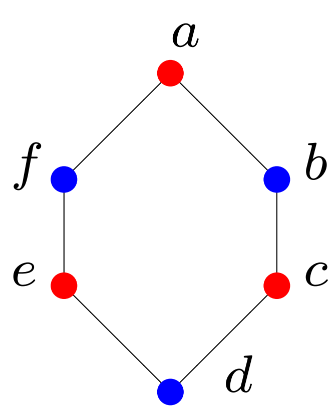
Sempre temos $\omega(G) \leq \chi(G)$

Para os grafos bipartidos, temos igualdade:

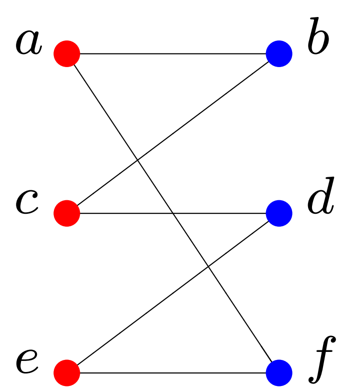
- o grafo é trivial e tem ambos parâmetros iguais a 1

ou

- o grafo tem pelo menos uma aresta e tem ambos parâmetros iguais a 2



2-coloração



2-coloração

Cadeias de Kempe

Dada uma coloração dos vértices ou das arestas de um grafo, o método das cadeias de Kempe:

- considera subgrafo $H(\alpha, \beta)$ definido por duas cores α e β
- tenta trocar as cores α e β neste subgrafo

Esta troca poderá originar uma nova coloração para o grafo original

Aplicações:

- coloração de vértices: todo grafo planar é 5-colorível
- coloração de arestas: todo grafo bipartido é Δ-colorível

Limite superior: coloração de arestas

Vimos $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G

Vizing (1964) redirecionou a Teoria de Coloração de Arestas, provando que $\quad \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Problema da Classificação:

Decidir se $\chi'(G) \; = \; \Delta(G)$ ou $\chi'(G) \; = \; \Delta(G) + 1$

- Se $\chi'(G) \; = \; \Delta(G)$, dizemos que G está na Classe 1
- Se $\chi'(G) \; = \; \Delta(G) + 1$, dizemos que G está na Classe 2

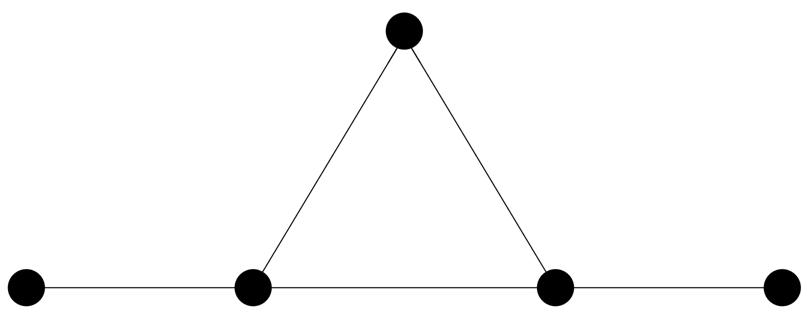
Prova do Teorema de Vizing: algoritmo polinomial que pinta as arestas de um grafo G com $\Delta(G) + 1$ cores

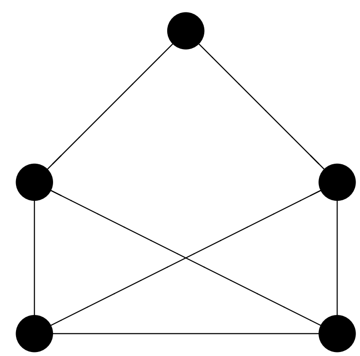
Limite superior: coloração de arestas

Consequência do Teorema de Vizing:

- Para mostrar que um grafo G pertence à Classe 1:
  exibir uma $\Delta(G)$-coloração para as arestas de G

- Para mostrar que um grafo G pertence à Classe 2:
  exibir argumentos que provem que G não pertence à Classe 1





Complexidade do problema de classificação

Apesar de existirem apenas duas possíveis classes para se colocar um grafo, o problema da classificação é difícil:

Holyer (1981):
O problema da classificação é NP-difícil
Mesmo restrito a grafos cúbicos, o problema é NP-difícil

Tait (1878):
Um grafo cúbico planar sem pontes é Classe 1 sse é 4-face colorível

Tutte (1946):
Primeiro grafo cúbico planar sem pontes não hamiltoniano (46 vértices)

Limite superior: coloração de vértices

$\chi(G) =$ número cromático de G

$\omega(G) =$ tamanho de uma maior clique em G

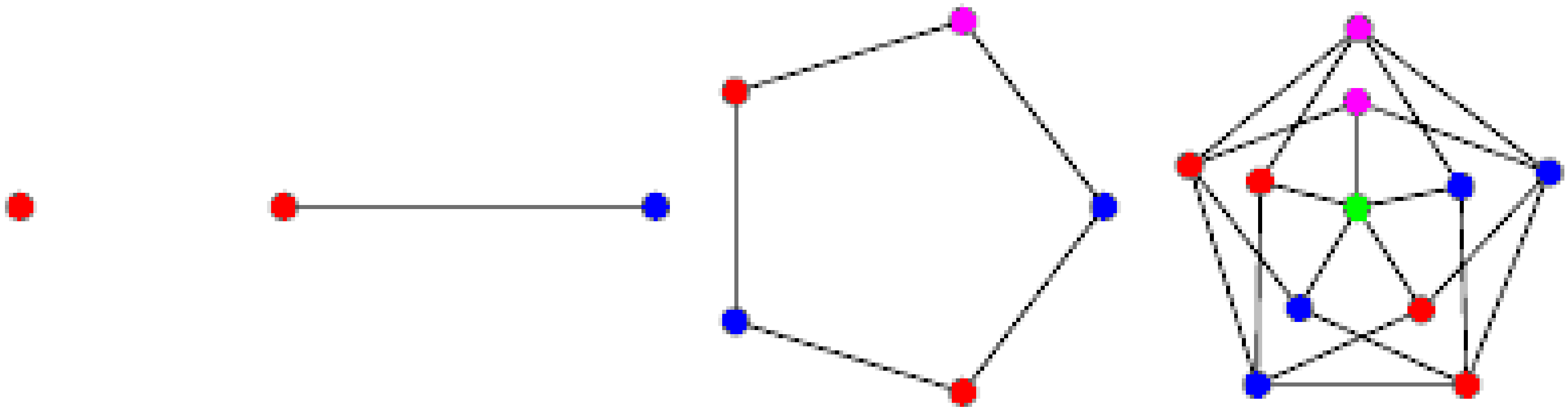
Limite inferior para coloração de vértices:

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Para G possuir número cromático alto, é necessário que G contenha uma clique com muitos vértices?

Limite superior: coloração de vértices

Existe família M_k de grafos sem triângulos com número cromático k



grafos de Mycielski (1955)

Não temos ainda limite superior como função de $\omega(G)$

Limite superior: coloração de vértices

$\Delta(G)$ = grau máximo em G

Algoritmo guloso dá um limite superior para $\chi(G)$ em termos de $\Delta(G)$:

- ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nos vértices de G
- $Adj(v)$ = vértices adjacentes a v em G
- função c tal que $c(v_1) = 1$ e, para $2 \leq i \leq n$, $c(v_i)$ menor inteiro não usado em $Adj(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$

Algoritmo guloso sempre produz coloração válida

Como $|Adj(v_i)| \leq \Delta(G)$, sempre temos $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$, obtendo:

Limite superior: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Todo grafo planar é 6-colorível

Sempre vértice com grau no máximo 5

Algoritmo guloso dá limite superior $\chi(G) \leq 6$:

- ordem especial $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nos vértices de G
- v_i tem grau no máximo 5 no grafo $G[v_1, v_2, \ldots, v_i]$
- função c tal que $c(v_1) = 1$ e, para $2 \leq i \leq n$, $c(v_i)$ menor inteiro não usado em $Adj(v_i) \cap \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$

Algoritmo guloso sempre produz coloração válida

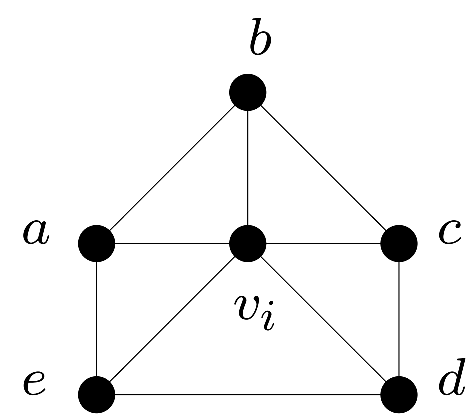
Agora, $|Adj(v_i)| \leq 5$, obtendo: $\chi(G) \leq 6$

Todo grafo planar é 5-colorível

Se, no algoritmo anterior, seguindo a ordem especial, aparecer um vértice v_i, adjacente a 5 vértices já coloridos com cores diferentes a, b, c, d, e, então use cadeias de Kempe

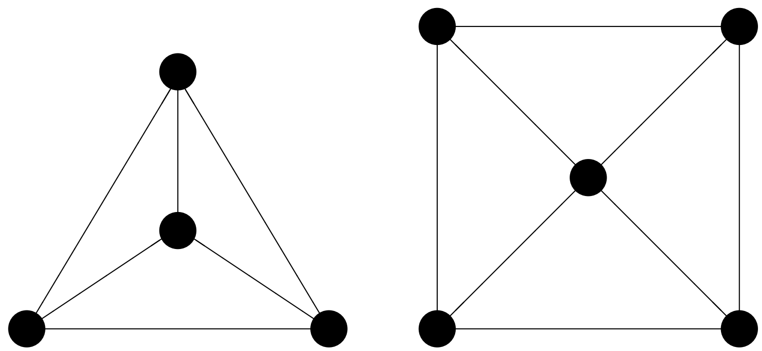
- subgrafos $H(a, c)$ e $H(b, d)$, cada um definido por duas cores
- grafo planar: troque as cores em $H(a, c)$
- colora vértice v_i com a cor a

Kempe (1879) propôs fazer uma dupla troca para 4-colorir,
mas nem sempre funciona

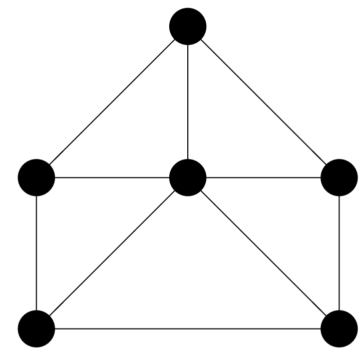


Inevitável vs redutível

O conjunto inevitável de configurações de Euler



redutíveis

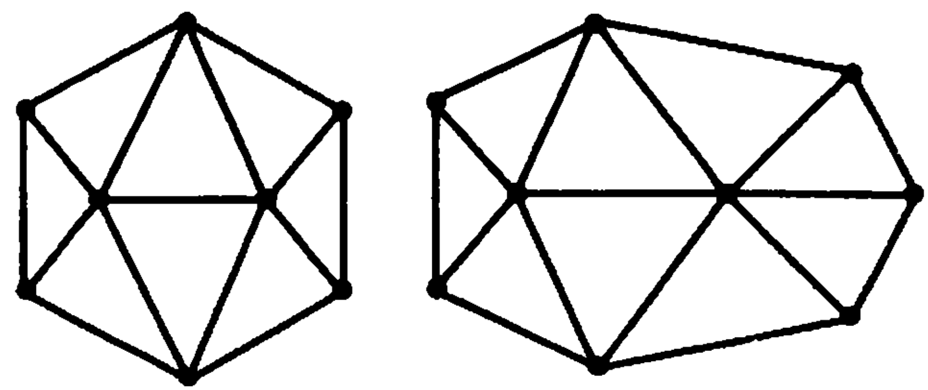


não é redutível

Appel e Haken conseguiram um conjunto inevitável de configurações redutíveis

Encontrando conjunto inevitável de configurações

Toda triangulação satisfaz: $\sum_i (6-i)n(i) = 12$



Vértice de grau 5 adjacente a vértice de grau no máximo 6

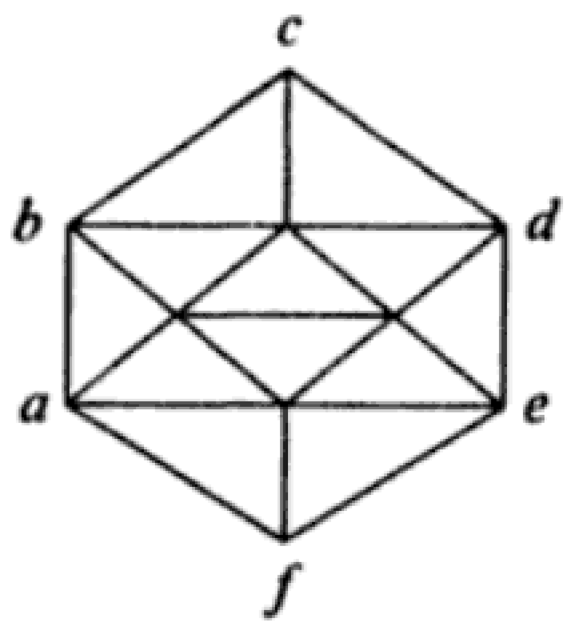
Franklin: todo grafo planar com no máximo 25 vértices é 4-colorível

“The four-colour problem”, American Journal of Mathematics 44 (1922) 225–236

Encontrando configurações redutíveis

O diamante de Birkhoff:

qualquer 4-coloração de $G - B$ estende



Cada uma das 31 4-colorações do anel da fronteira estende

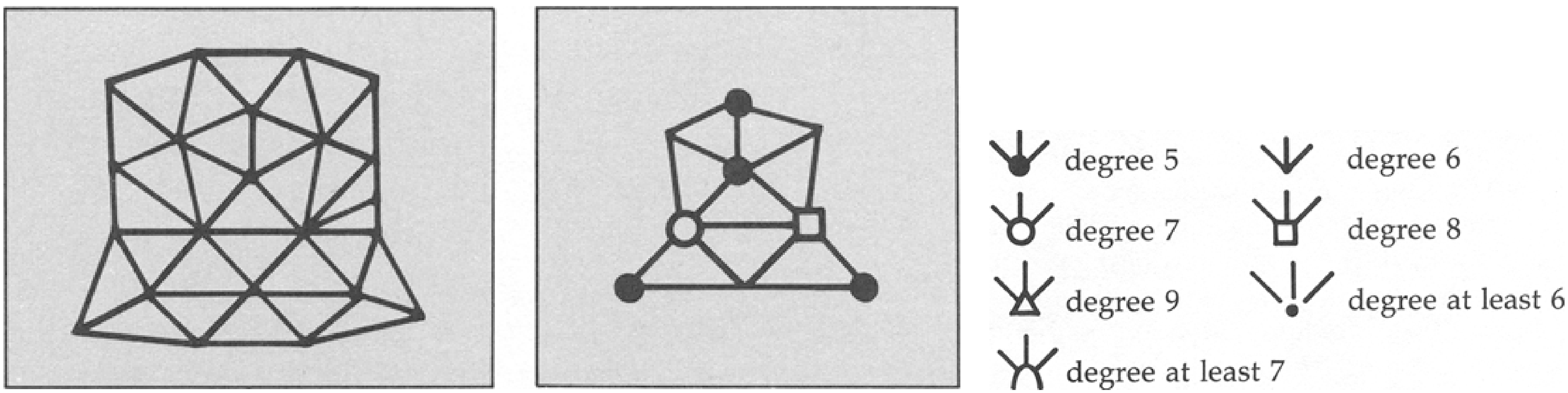
“The reducibility of maps”, American Journal of Mathematics 35 (1913) 115–128

Appel e Haken

1977, prova do Teorema das Quatro Cores

conjunto inevitável de 1476 configurações redutíveis

tamanho máximo permitido para o anel da fronteira é 14



“Every planar map is four colorable”, Illinois Journal of Mathematics 21 (1977) 429–490, 491–567

Inevitável vs redutível

Discharging: conjunto inevitável de configurações

Computador: se configuração do conjunto inevitável demanda 30 minutos para provar redutível, então modifique através de Discharging o conjunto inevitável de configurações, e volte para Computador

Appel e Haken trabalharam entre Discharging e Computador, buscando o conjunto inevitável de configurações, onde cada configuração fosse redutível, até fechar o conjunto e a demonstração

Kenneth Appel

1972, Haken deu seminário:

> The computer experts have told me that it is not possible to go on like that. But right now I am quitting. I consider this to be the point beyond which one cannot go without a computer

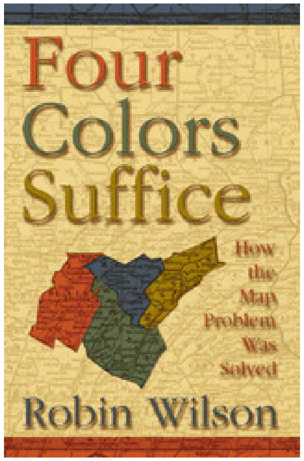
Após o seminário, Appel ofereceu ajuda dizendo:

> I do not know of anything involving computers that can't be done, some things just take longer than others

Bibliografia

Graph Coloring Problems
Tommy R. Jensen, Bjarne Toft. Wiley, 1995
`http://www.imada.sdu.dk/Research/Graphcol/`

Four Colors Suffice. How the map problem was solved
Robin Wilson. Princeton University Press, 2002



Coloração em Grafos
Celina M. Herrera de Figueiredo, João Meidanis, Célia Picinin de Mello. XVI JAI, SBC, 1997
`http://www.cos.ufrj.br/~celina/ftp/jai97.pdf`

The P vs. NP-complete dichotomy of some challenging problems in graph theory, Discrete Applied Mathematics (2012)

Bastam Quatro Cores

Kenneth Appel
1932 – 2013