Teoria da Computação: Introdução à Complexidade e à Lógica Computacional

Celina M. H. de Figueiredo, UFRJ

Luís C. Lamb, UFRGS

Jornada de Atualização de Informática, XXXV Congresso da SBC, Recife, Julho de 2015

Teoria da Computação

Ciência fundamental, assim como Biologia e Física

Por que alguns problemas são fáceis e outros difíceis?

Não estuda quão rápido os computadores são
- Astronomia não é o estudo dos telescópios

Estuda a estrutura matemática dos problemas
- como a estrutura ajuda a resolver ou impede a tentativa de resolver

parte 1

Uma Introdução à Complexidade

Celina M. H. de Figueiredo

parte 2

Lógica para Computação

Uma Introdução Curta

Luís C. Lamb

Teoria da Computação

Teoria A

algoritmos, complexidade, ferramentas de combinatória

Teoria B

métodos formais, lógica, programação em lógica parte 1

Uma Introdução à Complexidade

O Problema do Milênio

O Guia para Problemas Desafiadores

Notas Bibliográficas

A dicotomia polinomial versus NP-completo de problemas desafiadores em teoria dos grafos

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

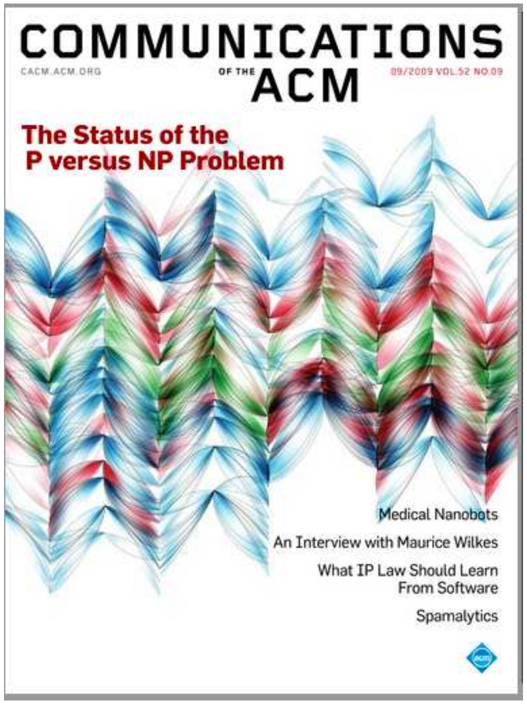
COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Outubro 2011

O Problema do Milênio

Problema central em Teoria da Computação: P versus NP

Existe pergunta cuja resposta pode ser verificada rapidamente, mas cuja resposta requer muito tempo para ser encontrada?



setembro 2009

RESOLVER ou VERIFICAR?

UMA PERGUNTA QUE VALE UM MILHÃO DE DÓLARES

RESOLVER É MAIS FÁCIL QUE VERIFICAR?

Em 1903, em um congresso da Sociedade Norte-americana de Matemática, o matemático Frank Cole (1861-1926) provou que o número $2^{67} - 1$ = 147.573.952.589.676.412.927 não é primo, exibindo a fatora-ção 193.707.721 x 761.838.257.287. Quando apresentou essa fatoração, Cole fez a multiplicação desses dois números enormes no quadro e em silêncio, sendo ao final aplaudido de pé. É simples – embora tedioso, se feito manualmente – calcular $2^{67} - 1$, multiplicar 193.707.721 por 761.838.257.287 e verificar que dão o mesmo número. Já encontrar essa fatoração é difícil. Cole disse que ele levou três anos trabalhando aos domingos.

O problema P versus NP: Resolver ou Verificar?

Em 1903, o matemático americano Frank Cole provou que o número

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927$$

não é primo exibindo a fatoração $193707721 \times 761838257287$.

É simples (embora tedioso se feito manualmente) calcular $2^{67} - 1$, calcular o produto $193707721 \times 761838257287$ e verificar que dão o mesmo número. Já encontrar essa fatoração é difícil. Cole disse que ele levou três anos trabalhando aos domingos.

Resolver ou Verificar? é uma pergunta que vale um milhão de dólares

Clay Mathematics Institute Millennium problems

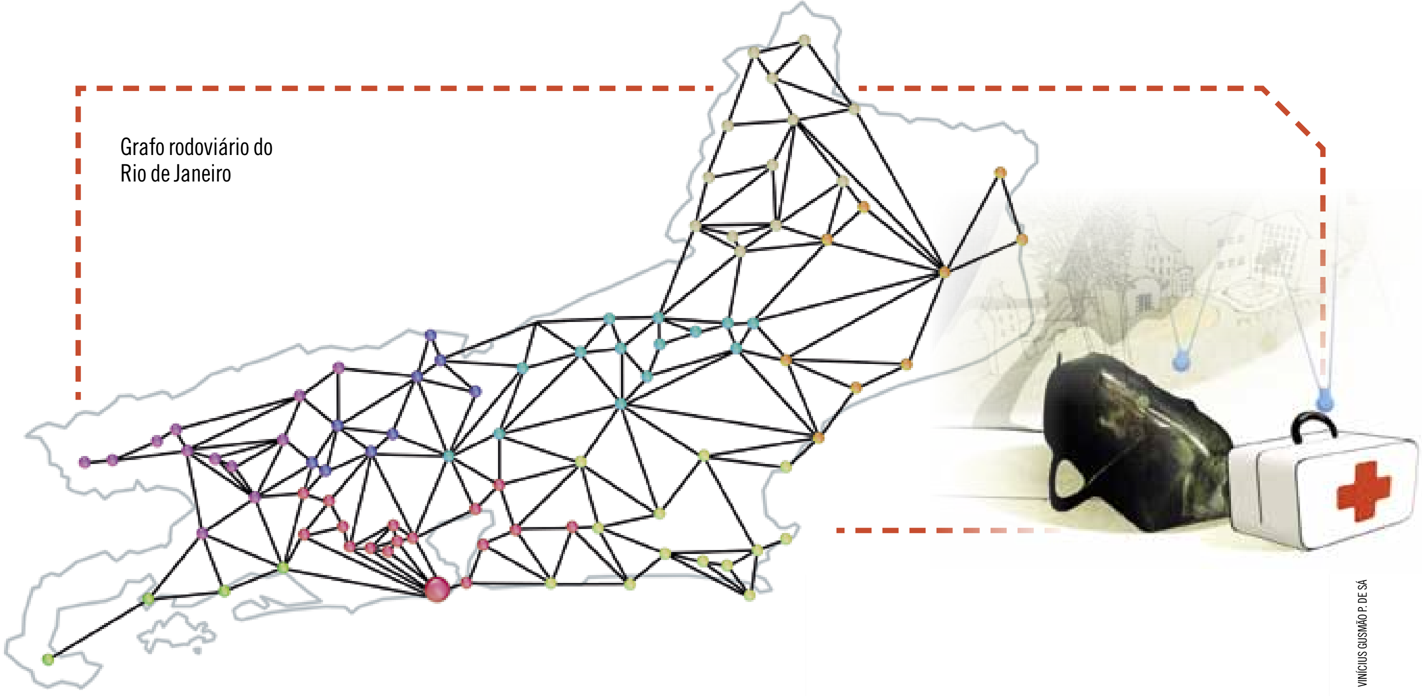
The Millennium Prize Problems

In order to celebrate mathematics in the new millennium, The Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) established seven *Prize Problems*. The Prizes were conceived to record some of the most difficult problems with which mathematicians were grappling at the turn of the second millennium; to elevate in the consciousness of the general public the fact that in mathematics, the frontier is still open and abounds in important unsolved problems; to emphasize the importance of working towards a solution of the deepest, most difficult problems; and to recognize achievement in mathematics of historical magnitude.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit (by car), how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily (given the methods I know) find a solution.

Grafo rodoviário do
Rio de Janeiro



VINÍCIUS GUSMÃO P. DE SÁ

Teoria dos Grafos

A matemática da conectividade, um dos ramos da matemática discreta

O artigo de Euler de 1736 é o nascimento da Teoria dos Grafos

- O circuito de Euler corresponde ao percurso do Pavimentador
- O ciclo de Hamilton corresponde ao percurso do Vacinador

Euler em seu artigo sobre as pontes de Konigsberg estuda como a dificuldade do problema cresce ou escala em função do número de pontes

Euler apresenta uma caracterização

- prova de que a cidade admite o circuito de Euler
- prova de que a cidade não admite o circuito de Euler

Complexidade computacional

A maioria dos problemas computacionais pertence à classe NP,
admitem um certificado polinomial

Em várias e diferentes áreas, procuramos objetos matemáticos:
percurso de um caixeiro viajante, atribuição de verdade,
emparelhamento máximo, coloração mínima de um grafo

O objeto matemático procurado é o certificado,
a prova de que o problema está em NP

O estudo da complexidade computacional de problemas considera principalmente problemas em NP e tenta distinguir os solúveis em tempo polinomial dos não através da classe dos problemas NP-completos

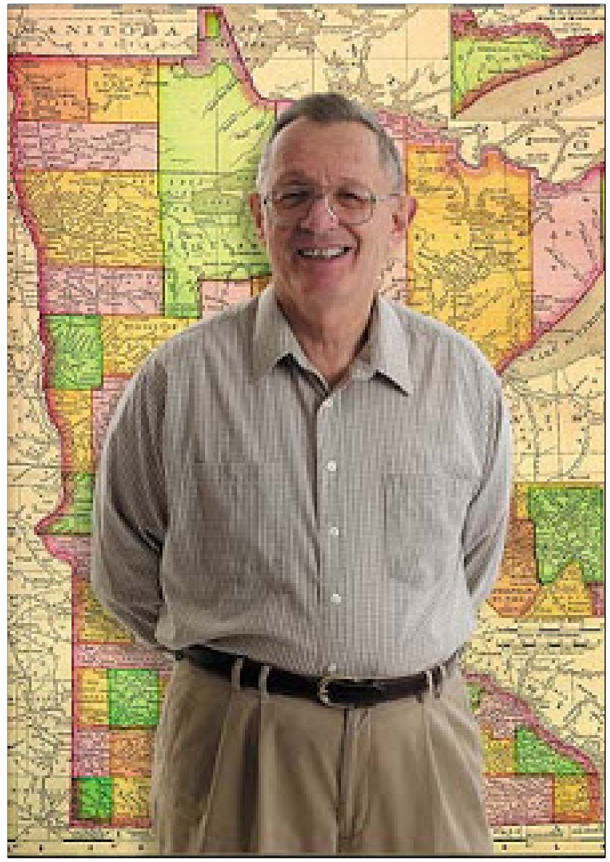
C. Papadimitriou – *Computational Complexity* 1994

Bastam Quatro Cores

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

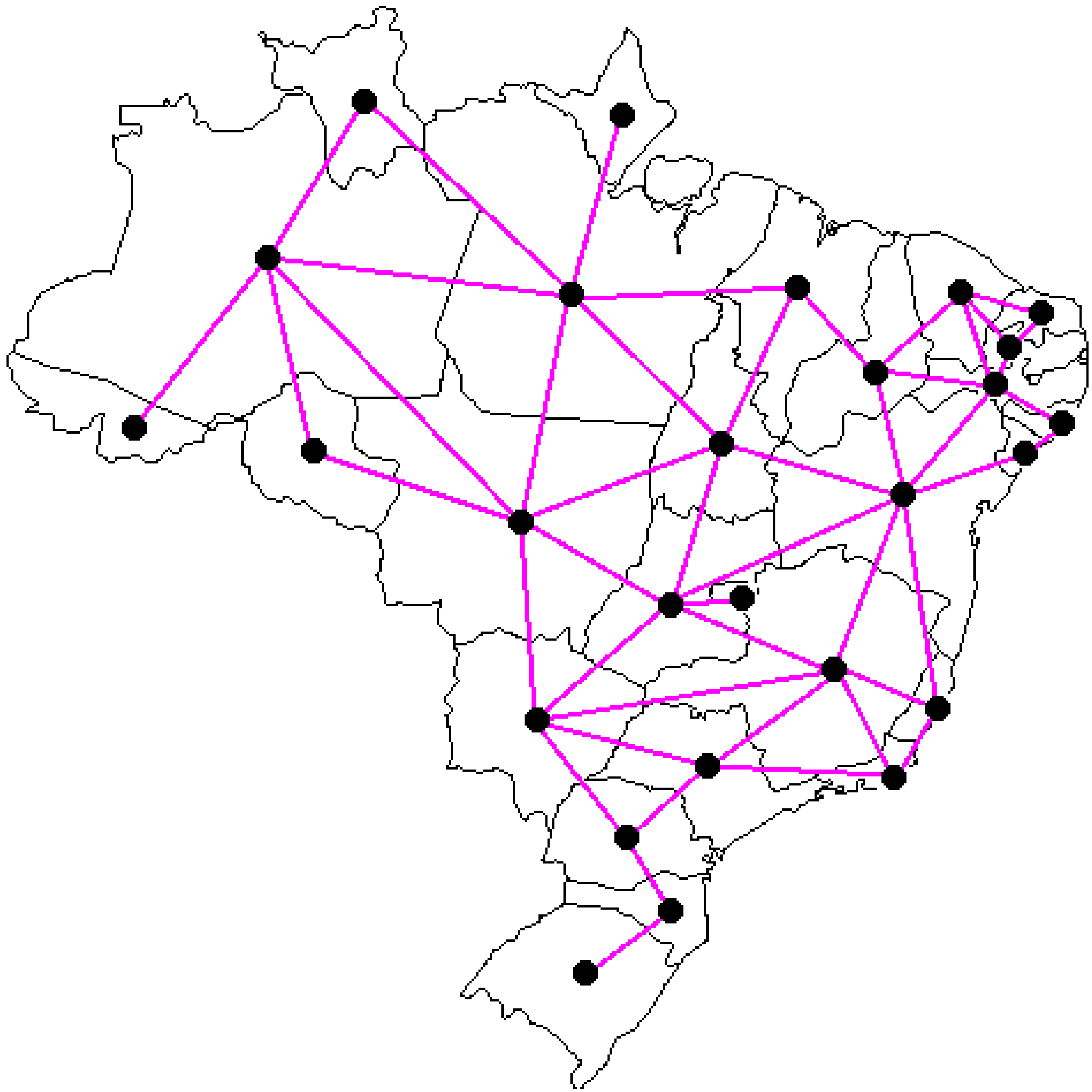
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

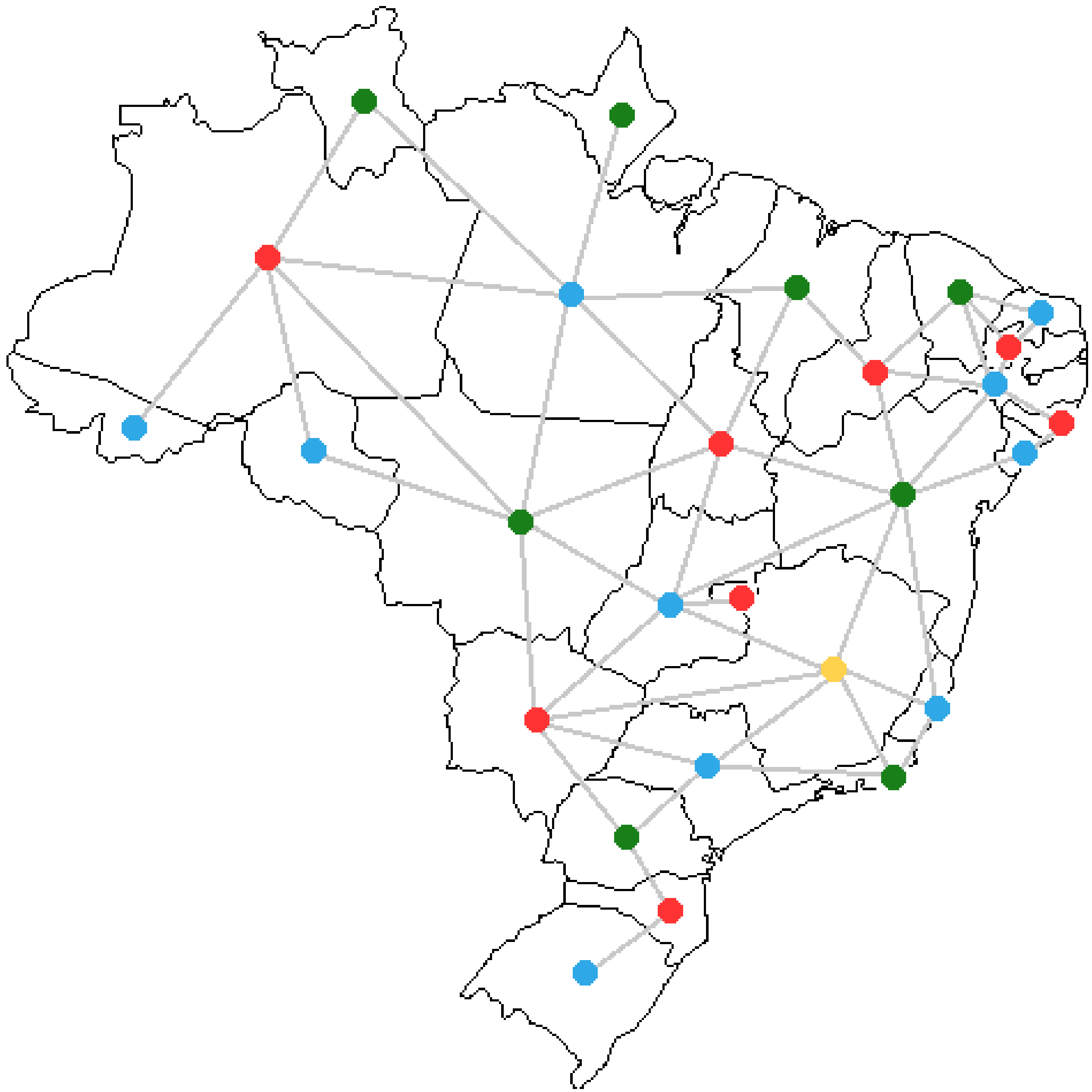
COPPE
UFRJ



Kenneth Appel

1932 – 2013



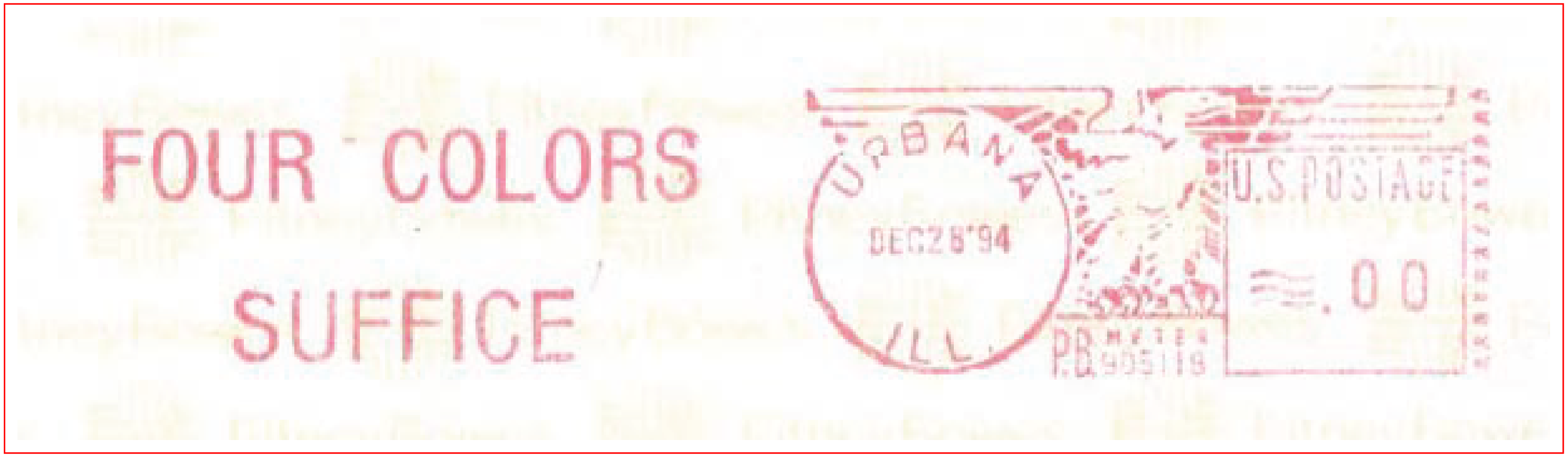


Appel e Haken (1977):

Sim! (prova usando computador)

conjunto inevitável de 1476 configurações redutíveis

algoritmo colore grafo planar com quatro cores em tempo $O(n^4)$



O Teorema das Quatro Cores

Appel e Haken (1977):

Sim! (prova usando computador)

conjunto inevitável de 1476 configurações redutíveis

algoritmo colore grafo planar com quatro cores em tempo $O(n^4)$

Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1997):

Sim!! (prova também usando computador)

conjunto inevitável de 633 configurações redutíveis

algoritmo colore grafo planar com quatro cores em tempo $O(n^2)$

Problema das quatro cores: coloração dos vértices

`http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html`

Minha contribuição

Que característica de um determinado problema o classifica como polinomial ou NP-completo?

Classificação em P ou NP-completo de dois problemas históricos em teoria dos grafos

Problema cuja complexidade separa classes de grafos
Classe de grafos que separa a complexidade de problemas

Três dicotomias cheias:

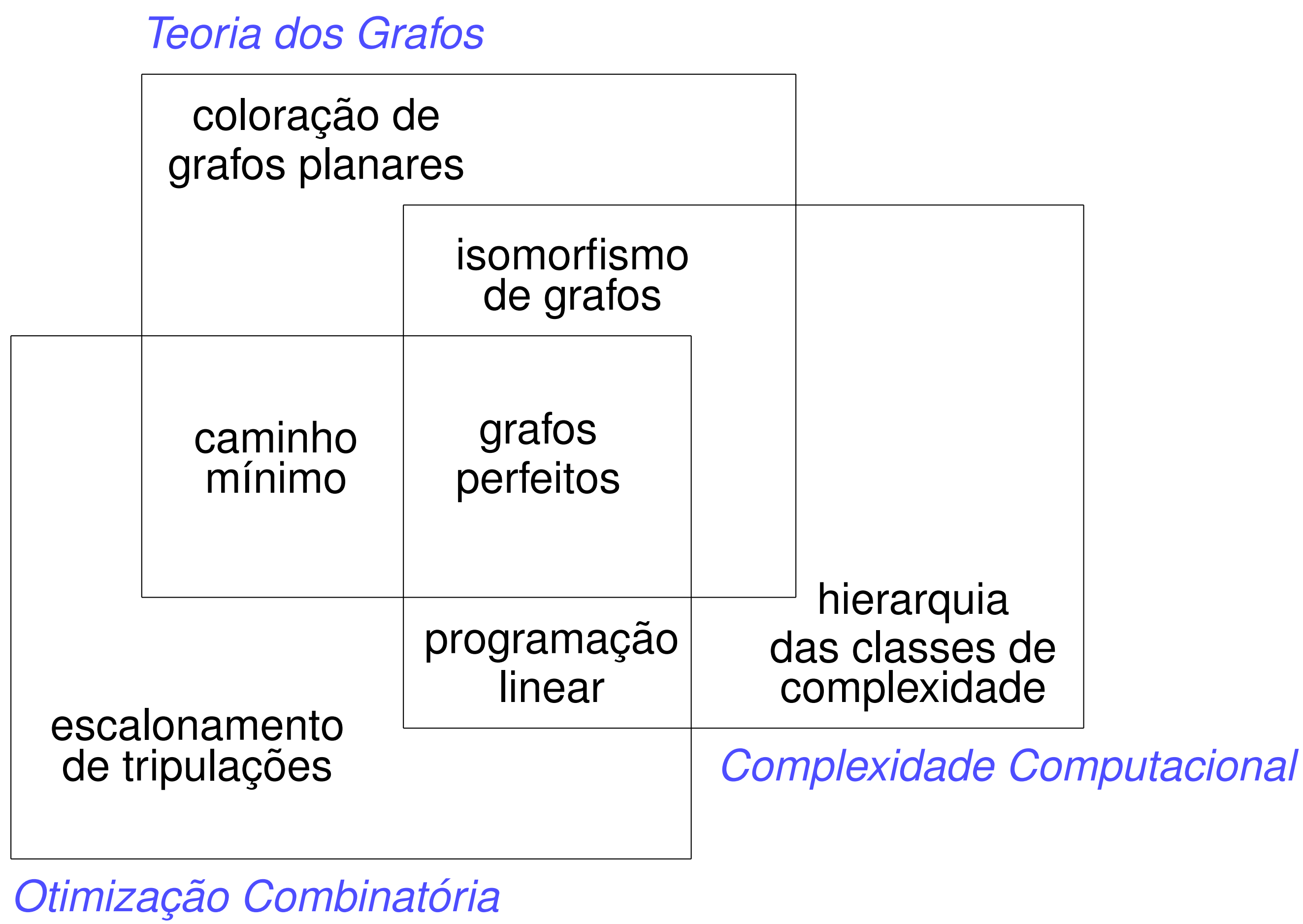
todo problema é classificado em P ou NP-completo

“The P vs. NP-complete dichotomy of some challenging problems in graph theory”

Discrete Appl. Math. 2011

(plenária no Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium 2009)

Origem e desenvolvimento da área de pesquisa



Dois problemas históricos em teoria dos grafos

Grafos perfeitos: SKEW PARTITION é polinomial

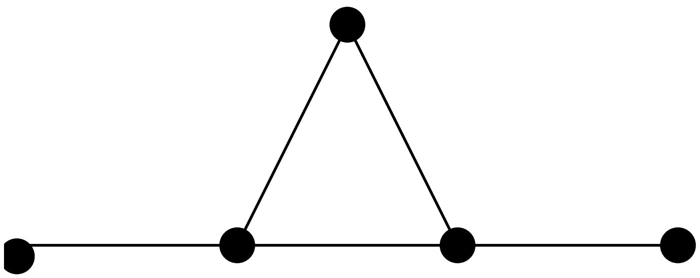
Grafos de interseção: CLIQUE GRAPH é NP-completo

Quando a classificação em P ou NP-completo foi proposta, ambos problemas foram provados em NP

V. Chvátal – *J. Combin. Theory Ser. B* 1985

F. Roberts, J. Spencer – *J. Combin. Theory Ser. B* 1971

Grafos perfeitos



Claude Berge, 1960: $\omega = 3$, $\chi = 3$

Teoria dos grafos: caracterização por subgrafos proibidos
Complexidade computacional: reconhecimento dos grafos perfeitos
Otimização combinatória: coloração dos vértices em tempo polinomial

D. Johnson – *J. Algorithms* 1981

M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas – *Ann. of Math.* 2006

M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, P. Seymour, K. Vušković – J. Combin. Theory B 2005

“Optimizing bull-free perfect graphs”

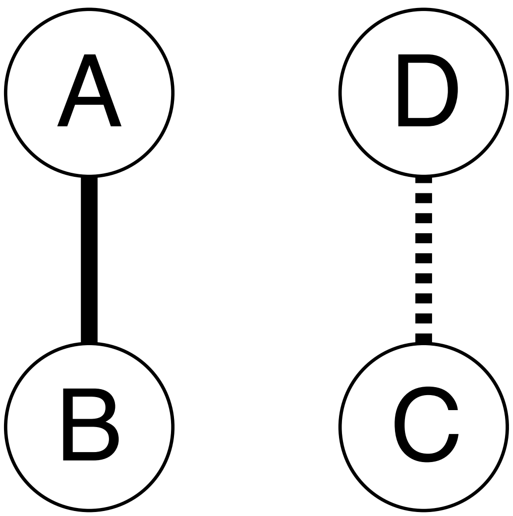
SIAM J. Discrete Math. 2004 (com Frédéric Maffray)

Partição assimétrica

SKEW PARTITION

Entrada: Grafo $G = (V, E)$

Pergunta: V admite uma partição em 4 partes não vazias A, B, C, D tal que cada vértice de A é adjacente a cada vértice de B e cada vértice de C não é adjacente a cada vértice de D ?



$A \cup B$ é corte assimétrico

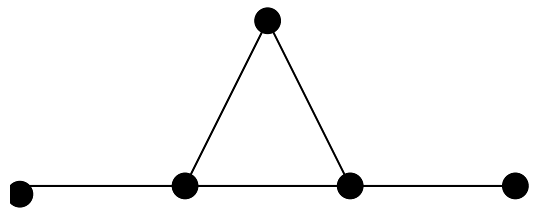
SKEW PARTITION generaliza

- STAR CUTSET
- CLIQUE CUTSET
- HOMOGENEOUS SET

V. Chvátal – *J. Combin. Theory Ser. B* 1985

Grafos de interseção

$G = (V, E)$ é grafo de interseção de família de conjuntos M: cada vértice corresponde a conjunto, dois vértices são adjacentes se os conjuntos têm interseção



Grafo de intervalos:
(0,5) (4,9) (6,11) (8,13) (12,17)

Grafo cordal, Grafo círculo, Grafo de linha

D. Johnson – *J. Algorithms* 1985

A. Brandstädt, V.B. Le, J.P. Spinrad – *Graph Classes: A survey* 1999

T. McKee, F. McMorris – *Topics in Intersection Graph Theory* 1999

M. Golumbic – *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs* 2004

Grafo clique: reflete a distribuição das cliques

E. Prisner – *Graph Dynamics* 1995

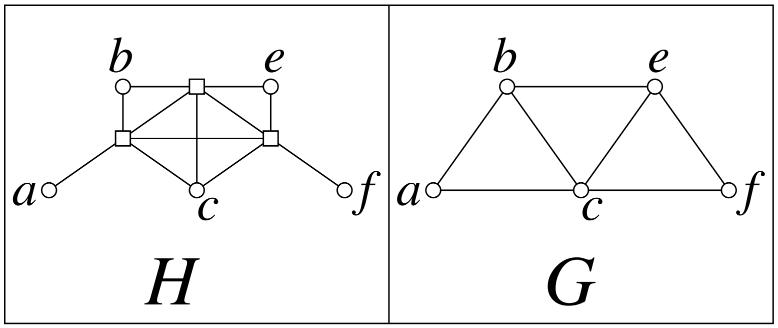
J. Szwarcfiter – *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics* 2002

Grafo clique

CLIQUE GRAPH

Entrada: Grafo G

Pergunta: Existe grafo H tq G é grafo de interseção das cliques de H ?



G é o grafo clique de H

Família-RS: G é grafo clique sse G admite cobertura das arestas por conjuntos completos que satisfazem a propriedade de Helly:

conjuntos mutuamente intersectantes tem interseção total não vazia

CLIQUE GRAPH é NP: família-RS de tamanho $\leq$ $|E(G)|$ dá H tal que

$$|V(H)| \leq |V(G)| + |E(G)|$$

F. Roberts, J. Spencer – *J. Combin. Theory Ser. B* 1971

Guia de NP-completude

Identificação de problema interessante, de classe de grafos interessante

Classificação da complexidade de um problema: P ou NP-completo

Problema que separa classes de grafos

Classe de grafos que separa problemas

D. Johnson – *J. Algorithms* 1985, *ACM Trans. Algorithms* 2005

M. Golumbic, H. Kaplan, R. Shamir – *J. Algorithms* 1995

J. Spinrad – *Efficient Graph Representations* 2003

Problemas separadores e Classes de grafos separadoras

	VERTEXCOL	EDGECOL	MAXCUT
perfect	P	N	N
chordal	P	O	N
split	P	O	N
strongly chordal	P	O	O
comparability	P	N	O
bipartite	P	P	P
permutation	P	O	O
cographs	P	O	P
indifference	P	O	O
split-indifference	P	P	P

N: NP-completo P: polinomial O: aberto

D. Johnson – *J. Algorithms* 1985

J. Spinrad – *Efficient Graph Representations* 2003

Candidato a problema separador

	VERTEXCOL	EDGECOL	MAXCUT
perfect	P	N	N
chordal	P	O	N
split	P	O	N
strongly chordal	P	O	O
comparability	P	N	O
bipartite	P	P	P
permutation	P	O	O
cographs	P	O	P
indifference	P	O	O
split-indifference	P	P	P

N: NP-completo P: polinomial O: aberto

C. Ortiz Z., N. Maculan, J. Szwarcfiter – *Discrete Appl. Math.* 1998

C. Simone, C. Mello – *Theoret. Comput. Sci.* 2006

Procura de problema separador

	VERTEXCOL	EDGECOL	MAXCUT
perfect	P	N	N
chordal	P	O	N
split	P	O	N
strongly chordal	P	O	O
comparability	P	N	O
bipartite	P	P	P
permutation	P	O	O
cographs	P	O	P
indifference	P	O	O
split-indifference	P	P	P

N: NP-completo P: polinomial O: aberto

D. Johnson – *J. Algorithms* 1985

J. Spinrad – *Efficient Graph Representations* 2003

Split vs. chordal

Split = chordal $\cap$ complement chordal

Guia de NP-Completude do Johnson:

> "Todo resultado de dificuldade para grafos cordais também vale para grafos split!"

Livro do Spinrad:

> "Grafos split são a base dos algoritmos e dos resultados de dificuldade para grafos cordais."

Igual complexidade:

- CLIQUE, VERTEX COLORING são tempo linear
- DOMINATING SET, MAXCUT, HAMILTON CYCLE são NP-completo

Separados pela complexidade:

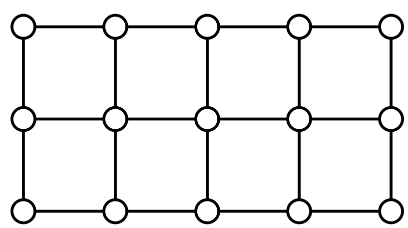
- TRIANGLE PACKING, PATHWIDTH

"Split clique graph complexity"
WG 2011, Lecture Notes in Comput. Sci. (com Liliana Alcon, Luerbio Faria, Marisa Gutierrez)

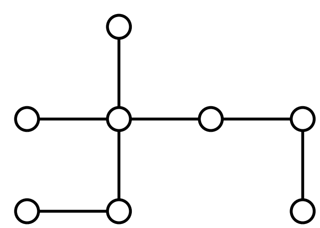
Imersão em grades

Teoria dos grafos: Reconhecimento das grades parciais é problema aberto

Desenho de grafos: Decidir se um grafo admite um VLSI layout com arestas unitárias é NP-completo



a grade $G_{3,5}$



imersão para $\{1, 2, 4\}$-árvore

A. Brandstädt, V.B. Le, et al. – Information system on graph class inclusions.
http://wwwteo.informatik.uni-rostock.de/isgci/, 2002, atualizado 2010

S. N. Bhatt, S. S. Cosmadakis – *Inform. Process. Lett.* 1987

P vs. N dicotomia para grades parciais restritas por graus

D	D-grafos	D-árvores
{1}	P	P
{2}	P	—
{3}	P	—
{4}	P	—
{1,2}	P	P
{1,3}	N	N
{1,4}	P	P
{2,3}	N	—

D	D-grafos	D-árvores
{2,4}	N	—
{3,4}	P	—
{1,2,3}	N [G89]	N [G89]
{1,2,4}	N [BC87]	N [BC87]
{1,3,4}	N	N
{2,3,4}	N	—
{1,2,3,4}	N [BC87]	N [BC87]

Não há conjunto D que defina problema separador

S. N. Bhatt, S. S. Cosmadakis – *Inform. Process. Lett.* 1987
A. Gregori – *Inform. Process. Lett.* 1989

"Complexity dichotomy on partial grid recognition"
Theoret. Comput. Sci. 2011 (com Vinícius Sá, Guilherme Fonseca, Raphael Machado)

Referências

“On edge-colouring indifference graphs”
Theoret. Comput. Sci. 1997 (com João Meidanis, Célia Mello)

“Finding skew partitions efficiently”
J. Algorithms 2000 (com Sulamita Klein, Yoshiharu Kohayakawa, Bruce Reed)

“Optimizing bull-free perfect graphs”
SIAM J. Discrete Math. 2004 (com Frédéric Maffray)

“The complexity of clique graph recognition”
Theoret. Comput. Sci. 2009 (com Liliana Alcon, Luerbio Faria, Marisa Gutierrez)

“The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems”
Discrete Appl. Math. 2009 (com Rafael Teixeira, Simone Dantas)

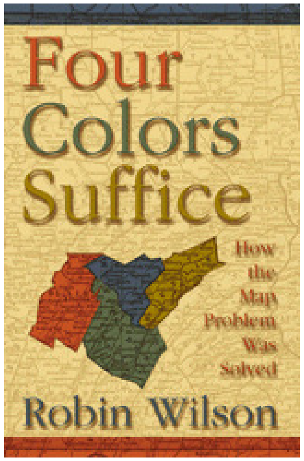
“Chromatic index of graphs with no cycle with a unique chord”
Theoret. Comput. Sci. 2010 (com Raphael Machado, Kristina Vušković)

“Complexity dichotomy on partial grid recognition”
Theoret. Comput. Sci. 2011 (com Vinícius Sá, Guilherme Fonseca, Raphael Machado)

Bibliografia

Graph Coloring Problems
Tommy R. Jensen, Bjarne Toft. Wiley, 1995
`http://www.imada.sdu.dk/Research/Graphcol/`

Four Colors Suffice. How the map problem was solved
Robin Wilson. Princeton University Press, 2002



Coloração em Grafos
Celina M. Herrera de Figueiredo, João Meidanis, Célia Picinin de Mello. XVI JAI, SBC, 1997
`http://www.cos.ufrj.br/~celina/ftp/jai97.pdf`

The P vs. NP-complete dichotomy of some challenging problems in graph theory, Discrete Applied Mathematics (2012)