Urnas de Pólya, a Luta do mais Hábil, e o Surgimento de Caminhos Mínimos por Passeios Aleatórios

Daniel R. Figueiredo
LAND – PESC/COPPE/UFRJ

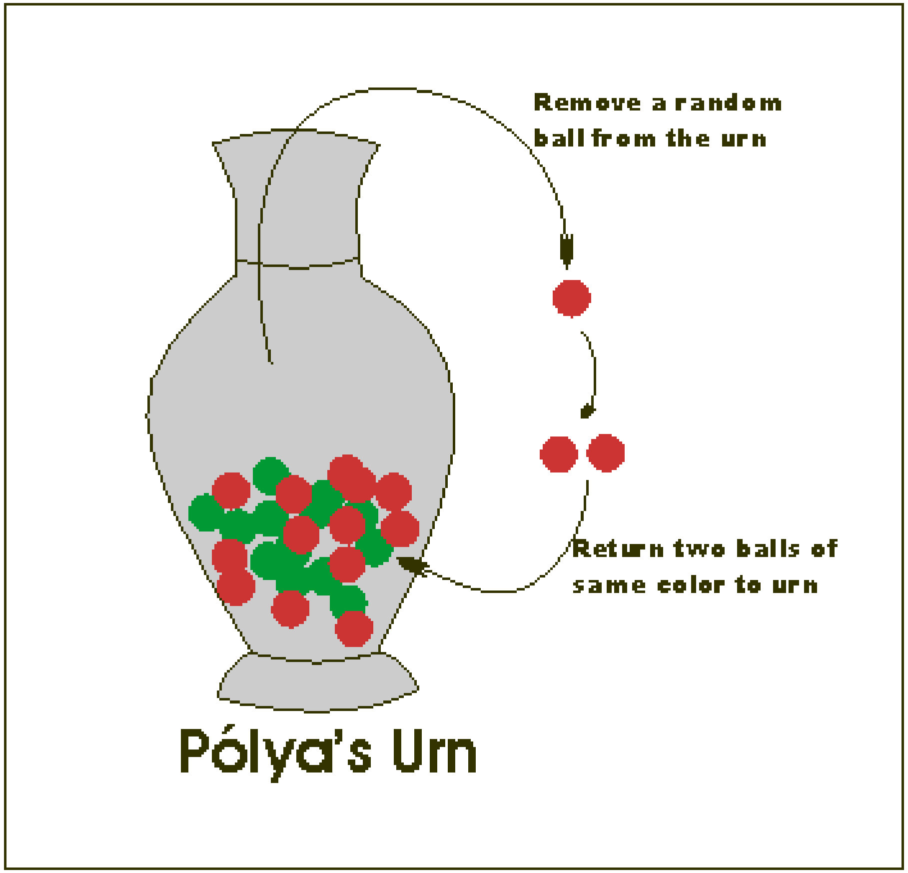
Ciclo de Seminários PESC

5 de abril de 2017

Colaboradores: B. Jiang, L. Sun, D. Towsley (UMass), B. Ribeiro (Purdue), M. Garetto (Torino)

Urna de Pólya

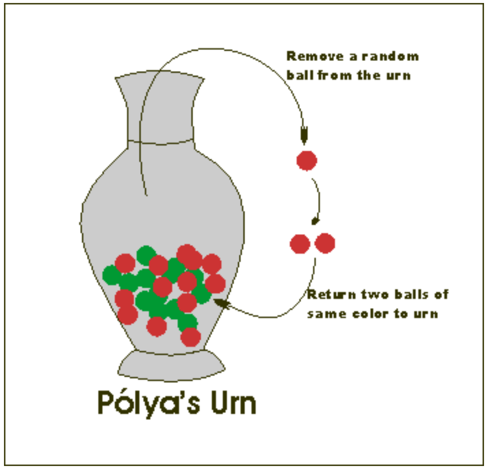
- Esquema de urna com bolas de diferentes cores e escolhas sequenciais
- Escolher bola ao acaso, adicionar bolas em função da cor observada

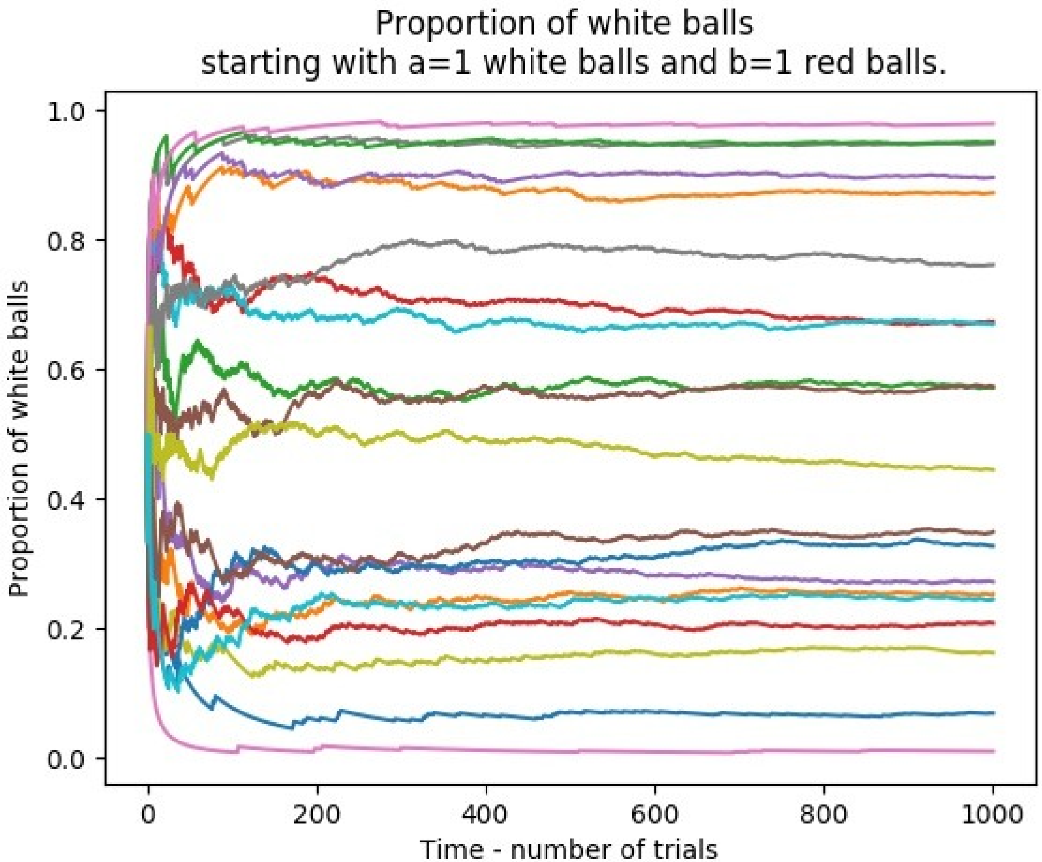


- Duas cores, 1 bola de cada cor
- Adiciona 1 nova bola da mesma cor
- B_n, P_n : número de bolas brancas e pretas depois de n rodadas

Urna de Pólya

- Comportamento das bolas na urna?
- Fração de bolas brancas: $B_n \,/\, (B_n + P_n)$?

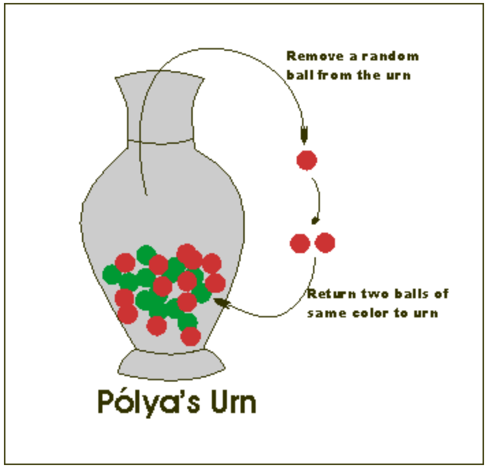




lar intuição!

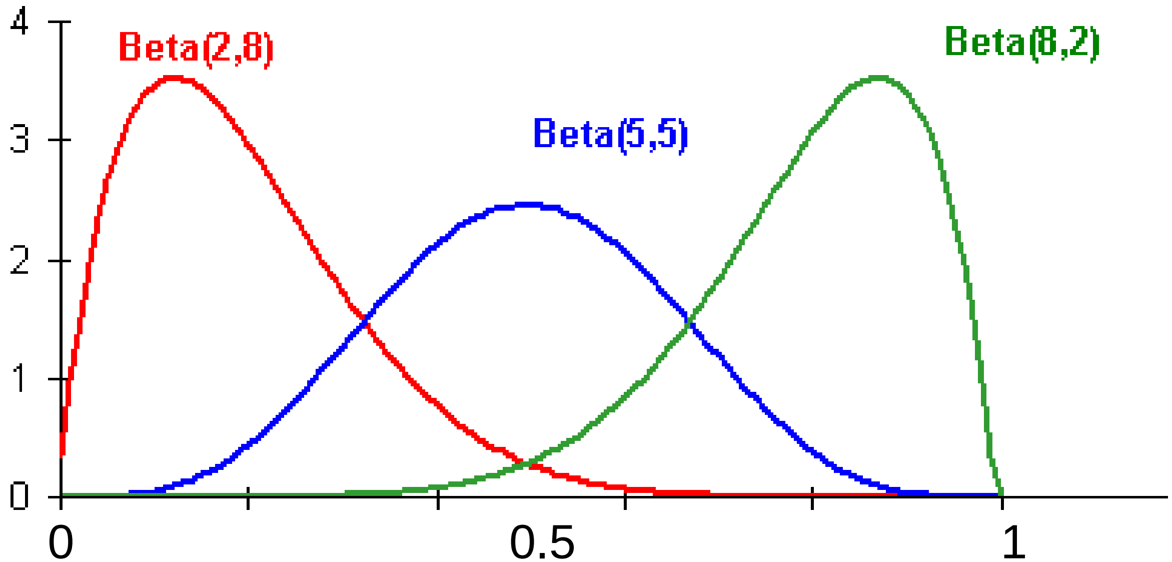
- Fração sempre converge
- Valor depende da rodada

Resultado da Urna de Pólya



- Fração de bolas brancas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_n + P_n} = Z \sim Beta\left(B_o, P_o\right)$$



- Limite depende da condição inicial
- Começar bem é importante!
- Resultado generaliza para mais cores (*Dirichlet*)

George Pólya

- Influente matemático húngaro, 1887-1985 (ETH, Stanford)
- Resultado em artigos 1923 e 1931 (aplicação a difusão de doenças contagiosas

“We need heuristic reasoning when we construct a strict proof as we need scaffolding when we erect a building”

– George Pólya

PARTE I

A Luta do Mais Hábil

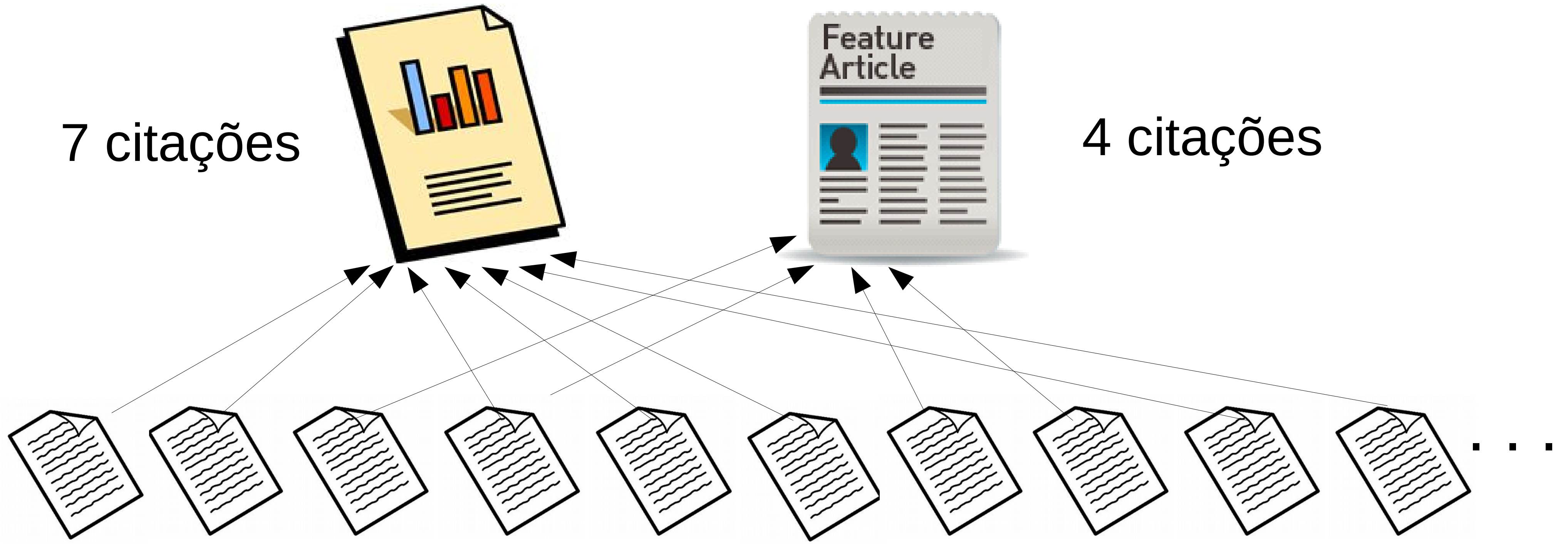
Competição por Recursos

- Dinâmica fundamental na natureza e sociedade
  - restaurantes por clientes
  - páginas web por hyperlinks
  - artigos por citações
  - usuário twitter por *seguidores*
  - palavras por uso
  - produtos por avaliações
  - publicidade por atenção
  - etc

Agentes competindo por recursos

Competindo por Citações

- Dois artigos publicados na mesma edição de uma revista



O que governa dinâmica de competição?

Aspectos da Competição

- Dois aspectos fundamentais de competições?

- **Habilidade**: característica inerente do agente, atemporal, aptidão, *fitness*

- **Aleatoriedade**: inerente ao ambiente de competição, ex. ruído, imprecisão

***Força motriz* na dinâmica de muitas competições**

Vantagem Cumulativa

5 pessoas

50 pessoas

6 pessoas

- Dois restaurantes, sem conhecimento
- Em qual você entra?

- **VC**: Recursos acumulados promovem acúmulo de mais recursos
  - *preferential attachment, rich-gets-richer, Mathew effect, network effect*

Presente na dinâmica de muitas competições

Compreendendo VC

- Qual o papel de VC em competições?
  - com habilidade e aleatoriedade
- Contribui para o sucesso do mais hábil?
- Reduz o efeito da aleatoriedade?

**Questões de grande debate,
na teoria e na prática!**

- Estudo teórico deste problema
- Modelos e métricas simples
  - resultados surpreendentes

Modelo com Habilidade e Aleatoriedade

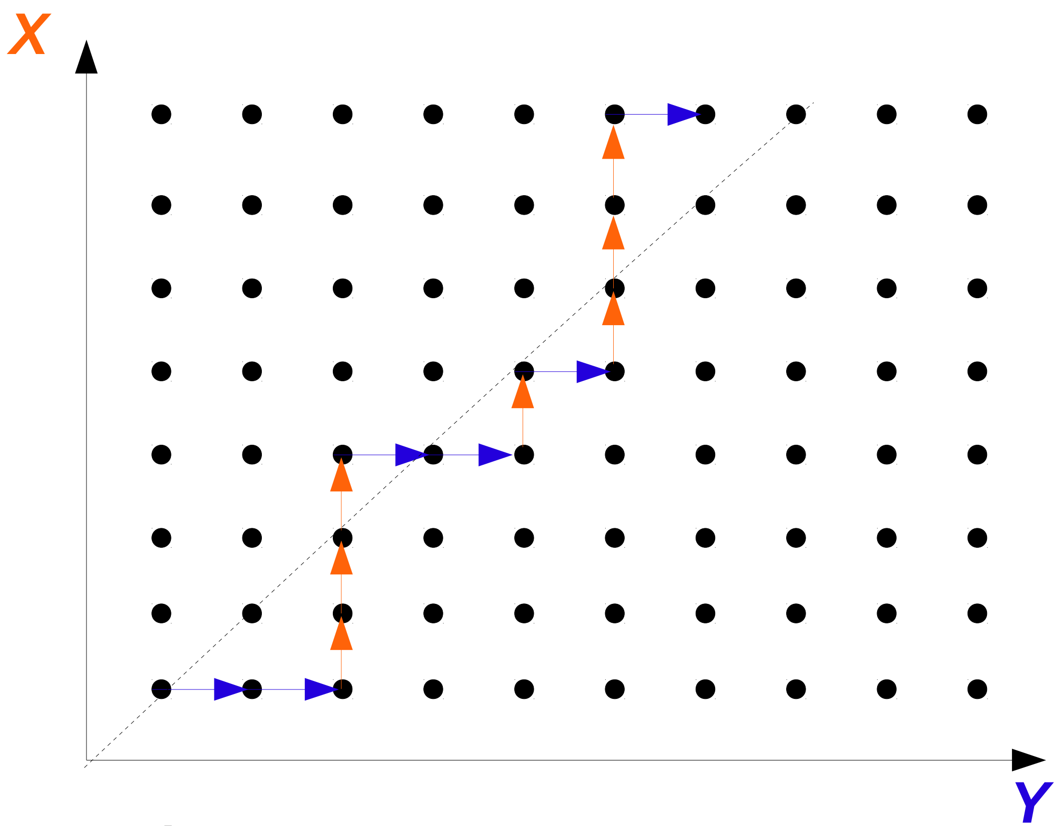
- Competição entre dois agentes (X e Y)
- Tempo discreto, um recurso por vez
  - X_t, Y_t : recursos acumulados por X e Y até t
- Habilidade
  - $r >= 1$: razão da habilidade entre X e Y
- Aleatoriedade: atribuição do recurso proporcional à habilidade
  - X ganha com prob. $p_x = r / (r+1)$
  - Y ganha com prob. $p_y = 1 – p_x = 1 / (r+1)$

Adicionando VC

- **Ideia**: mais recursos acumulados, mais provável de ganhar próximo recurso
- X e Y ganham recursos com prob. proporcional aos recursos já acumulados
  - X ganha com prob. $p_{x,t} = r\,X_t / (r\,X_t + Y_t)$
  - Y ganha com prob. $p_{y,t} = Y_t / (r\,X_t + Y_t)$
- Atração pode ser não linear, fator $\beta > 0$
  - X ganha com prob. $p_{x,t} = r\,X_t^{\beta} / (r\,X_t^{\beta} + Y_t^{\beta})$
  - Y ganha com prob. $p_{y,t} = Y_t^{\beta} / (r\,X_t^{\beta} + Y_t^{\beta})$

Variação da urna de Pólya!

Exemplo e Empates



- X (laranja), Y (azul), r=1.2
- p_x= 0.55 p_y= 0.45
- Início: X_0 = 1, Y_0=1
- Evento de empate
  - o $X_t = Y_t$

- Número de empates: 4
- Tempo do último empate: 10
- Número de empates: 5

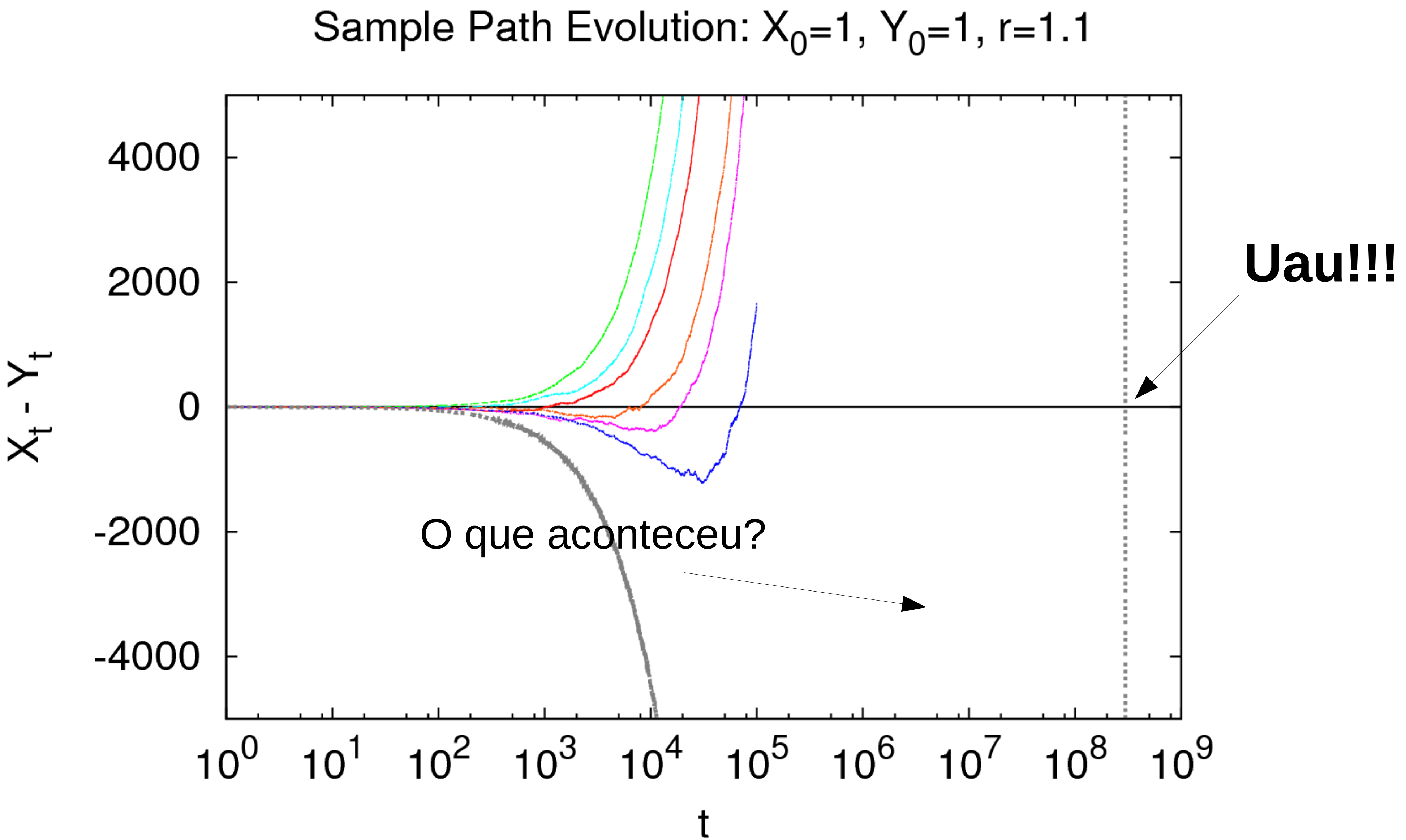
Duração e Intensidade

- Como medir uma competição?

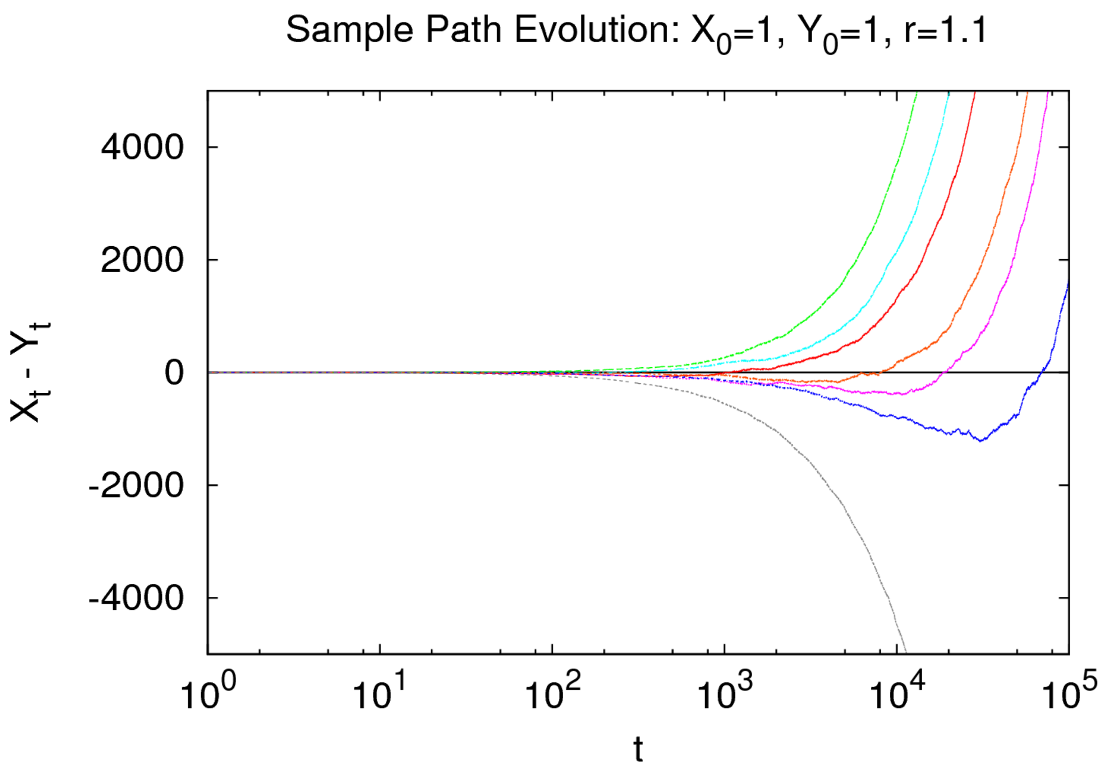
- *Fração de mercado*: fracão entre recursos
  - $M_t = X_t / (X_t + Y_t)$
- **Duração**: tempo do último empate (antes de t)
  - $D_t = \max_{t'<t} X_{t'} = Y_{t'}$
- **Intensidade**: número de empates (antes de t)
  - $N_t = |\{ 1(X_{t'} = Y_{t'}) : t' < t \}|$

M_t, D_t, N_t são variáveis aleatórias

Simulação do Modelo



Observações Empíricas



- Mais hábil sempre eventualmente vence
- Tempo até último empate pode ser muito longo

A luta do mais hábil ?

- Quanto tempo ele pode ter que lutar?
  - o depende de r (fitness) e β (atração)?

Resultados Teóricos $(\beta=1)$

- **Duração**
  - r > 1, D segue uma lei de potência

$$\mathbf{P[D > t] \sim t^{-(r\,-\,1)X_0}}$$

  - Maior *r* → decaimento mais rápido
  - X_0 tem papel fundamental, mas não Y_0

- **Intensidade**
  - r > 1, N tem cauda exponencial

$$\mathbf{P[N > n] \sim (1/r)^n}$$

  - intensidade nunca é alta, decresce com r

Mais Rigor, por favor!

Theorem 2. *The tail distribution of the duration of a $CA_{\neq}$ competition has the following asymptotic bounds,*

$$\varphi_1 t^{-(r-1)x_0} \lesssim \mathbb{P}^{(x_0,y_0)}_{\mathrm{CA},r}[T \geq t] \lesssim \varphi_2 t^{-(r-1)(x_0-1/r)},$$

where

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma(rx_0+y_0)}{(r+1)x_0 2^{x_0+y_0-1}\Gamma(x_0)\Gamma(y_0)},$$

and

$$\varphi_2 = \frac{2^{(r-1)(x_0-r^{-1})}\Gamma(r^{-1})\Gamma(rx_0+y_0)}{(r+1)(x_0-r^{-1})\Gamma(x_0)\Gamma(y_0)}$$

Theorem 4. *The tail distribution of the intensity of a $CA_{\neq}$ competition has the following upper bound,*

$$\mathbb{P}^{(x_0,y_0)}_{\mathrm{CA},r}[N \geq n] \leq C\left(\frac{2}{1+r}\right)^{n-1},$$

with

$$C = \begin{cases} 1, & x_0 \leq y_0, \\ \frac{(y_0)_{x_0-y_0}}{(rx_0+y_0)_{x_0-y_0}}\left(1+\frac{1}{r}\right)^{x_0-y_0}, & x_0 > y_0, \end{cases}$$

- Teoremas para caso r>1, β=1

Figura Completa

	Duração		Intensidade	
	$\mathbb{P}[T(\beta, r, \mathbf{x}_0) \geq t]$		$\mathbb{P}[N(\beta, r, \mathbf{x}_0) \geq n]$	
	$r = 1$	$r > 1$	$r = 1$	$r > 1$
$0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$	1	$e^{-\Omega(t^{1-\beta})}$	1	$O(a^n)$
$\frac{1}{2} < \beta < 1$	$\Theta(t^{\frac{1}{2}-\beta})$	$e^{-\Omega(t^{1-\beta})}$	$\Omega(n^{-\beta})$	$O(a^n)$
$\beta = 1$	$\Theta(t^{-\frac{1}{2}})$	$\Omega(t^{(1-r)x_{01}})$	$\Theta(n^{-1})$	$O(a^n)$
$\beta > 1$	$\Theta(t^{\frac{1}{2}-\beta})$	$\Theta(t^{1-\beta})$	$O(n^{-\beta})$	$O(a^n)$

- Com β != 1, fitness (r) não influencia duração
- Com β > 1, duração é maior quando r>1

A luta do mais hábil!

PARTE II

Surgimento de Caminhos Mínimos por Passeios Aleatórios

- Boa hora para acordar!

Motivação

- Evolução de redes
  - **Estrutura**: vértices, arestas, pesos
  - **Função**: propriedades de alto nível
- Atividade na rede
  - Restringida por estrutura e função
- **Co-evolução**
  - estrutura e função co-evoluem através da atividade

Co-evolução de Redes

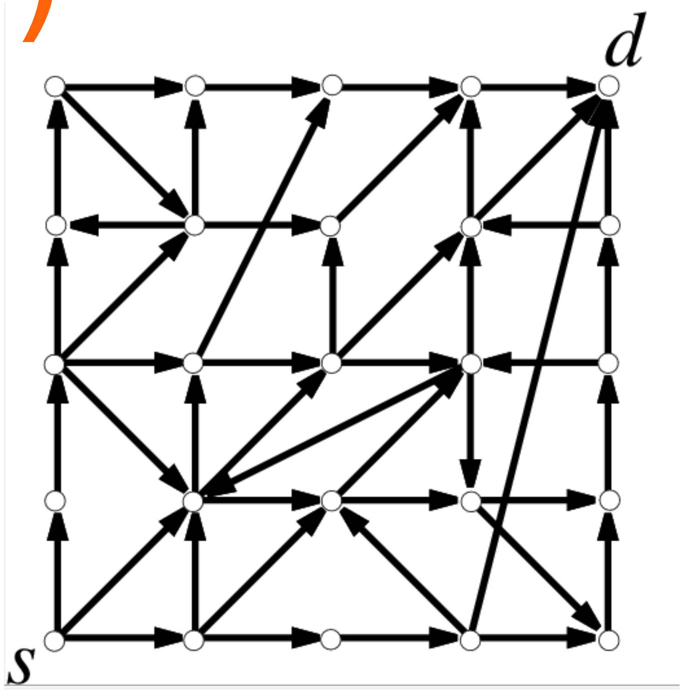
Estudo de Caso

= Grafo arbitrário direcionado com pesos nas arestas

= Passeios aleatórios com reforço nas arestas

= Caminhos de comprimento mínimo entre origem/destino

Modelo (1/2)



- Dado par origem (s) e destino (d), arestas com peso da rede

- Rodar sequência de passeios aleatórios **enviesados** começando em s parando em d, indexados por n=1,2,...

- **Após** término do passeio n, por um caminho de comprimento L_n, arestas do caminho **reforçadas** com valor fixo (que depende de L_n)

Modelo (2/2)

- Regra para atualização dos pesos

new weight
on edge *i,j*

previous weight
on edge *i,j*

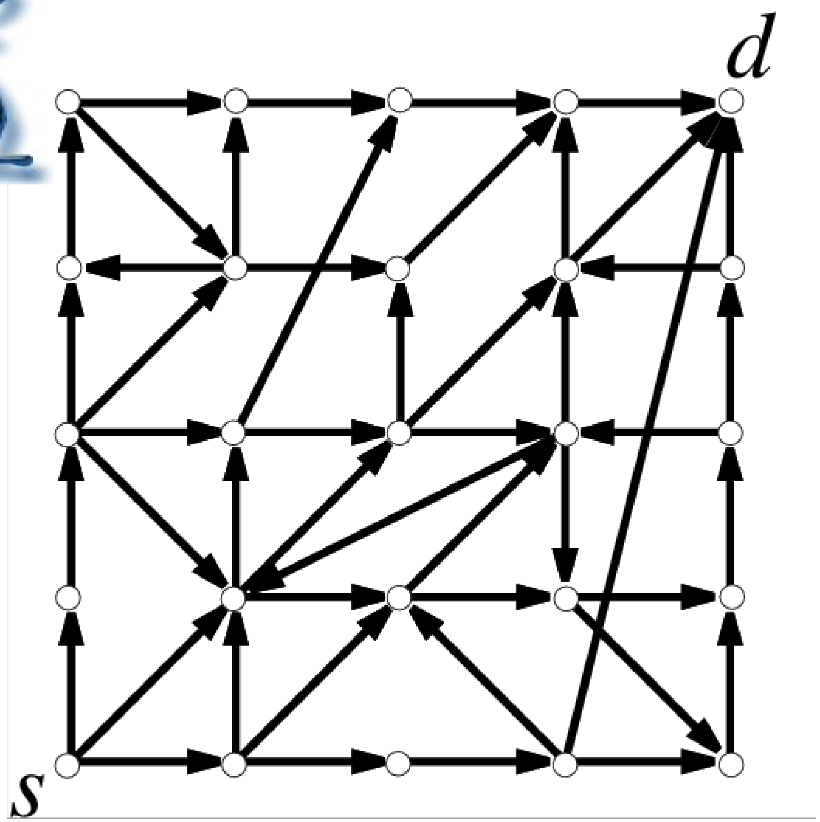
deterministic function
of path length

$$w_{i,j}[n] = w_{i,j}[n-1] + u_{i,j}(\mathcal{P}) \cdot f(L_n)$$

"single-reward model"

"multiple-reward model"

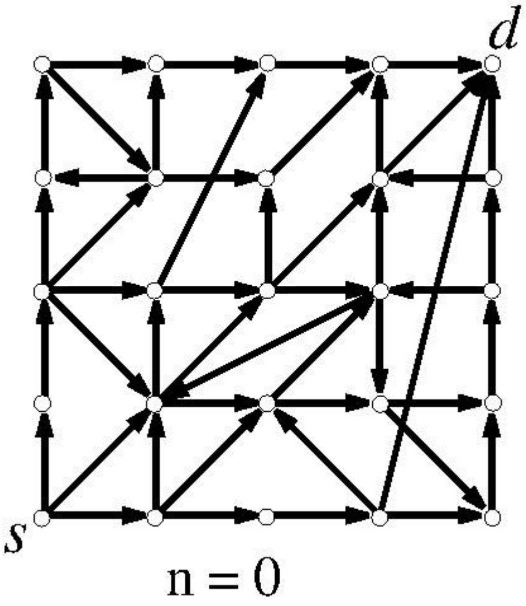
O que vai acontecer?



- Comportamento deve depender de f(Ln)
- f(L) = cte → não há preferência por caminho
- f(L) = 1/L → caminhos mais curtos são preferidos

Simulação de Uma Rodada

- Peso inicial 1, f(L) = 1/L



- Passeio aleatório toma caminhos mínimos (dois neste caso)
- Outros caminhos desaparecem

Surgimento de Caminhos Mínimos!

Resultado Principal (1/2)

- Caminhos mínimoa sempre surgem, desde que f seja decrescente
  - o independe da rede, pesos iniciais

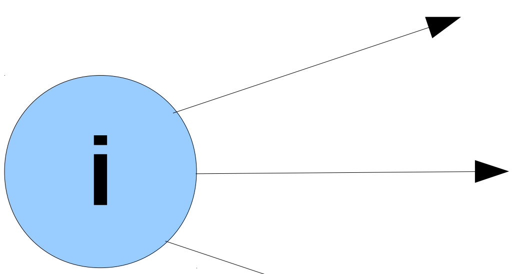
Theorem 1. (random walk asymptotics) *Let $L_{\min}$ be the length of the shortest path in graph $\mathcal{G}$ connecting source node s to destination node d. Consider an arbitrary path $\mathcal{P}$ from s to d, of length $L_{\mathcal{P}}$. Provided that $f(\cdot)$ is a strictly decreasing function of the path length, as the number n of random walks performed on the graph tends to infinite, we have:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\mathcal{W}_n = \mathcal{P}\} = \begin{cases} c(\mathcal{P}), & \text{if } L_{\mathcal{P}} = L_{\min} \\ 0, & \text{if } L_{\mathcal{P}} > L_{\min} \end{cases}$$

where $c(\mathcal{P})$ is a random variable taking values in $(0,1]$, that depends on the specific shortest path $\mathcal{P}$.

Ferramenta: Urna de Pólya

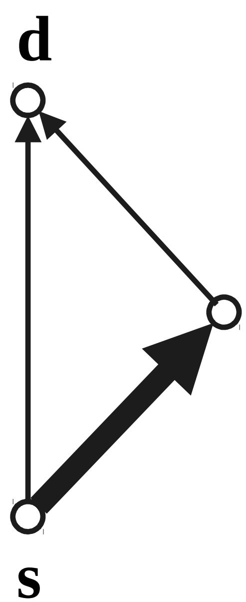
- Cada nó modelado como uma urna de Pólya
  - arestas de saída: cores das bolas na urna
  - peso das arestas: número de bolas



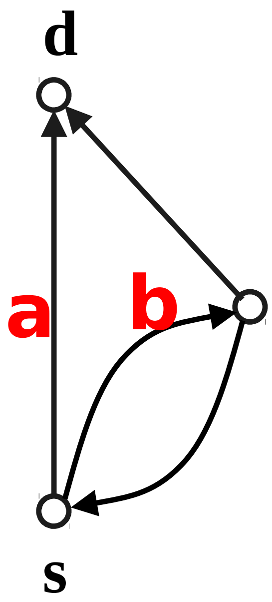
- Passeio aleatório escolhe aresta proporcional ao peso
- Adiciona peso na aresta escolhida (ao final)

Casos Quebra-Cuca

- Resulado é razoável, mas não muito trivial



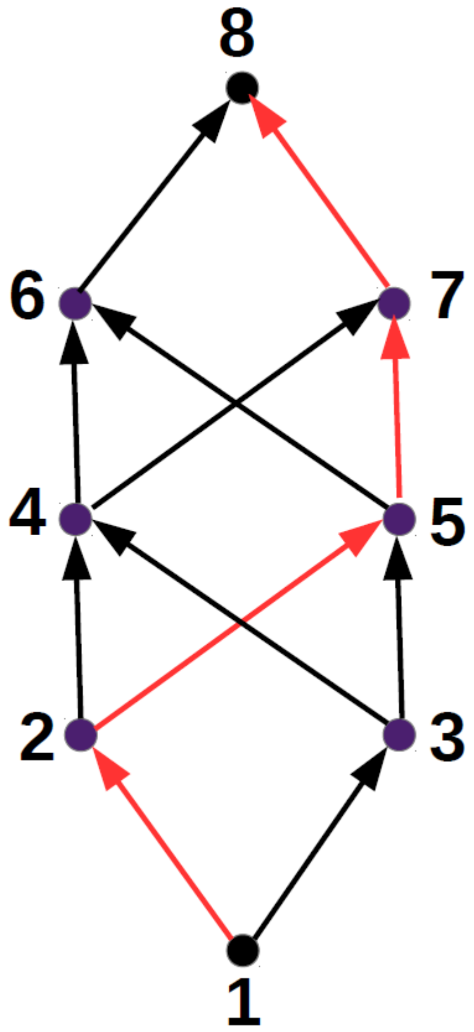
Peso inicial muito desbalanceado



Modelo com recompensa múltipla: média na aresta **b** pode ser maior que média da aresta **a**

Validação

- Probabilidade assintótica de tomar um caminho converge para valor aleatório



Resultado Principal (2/2)

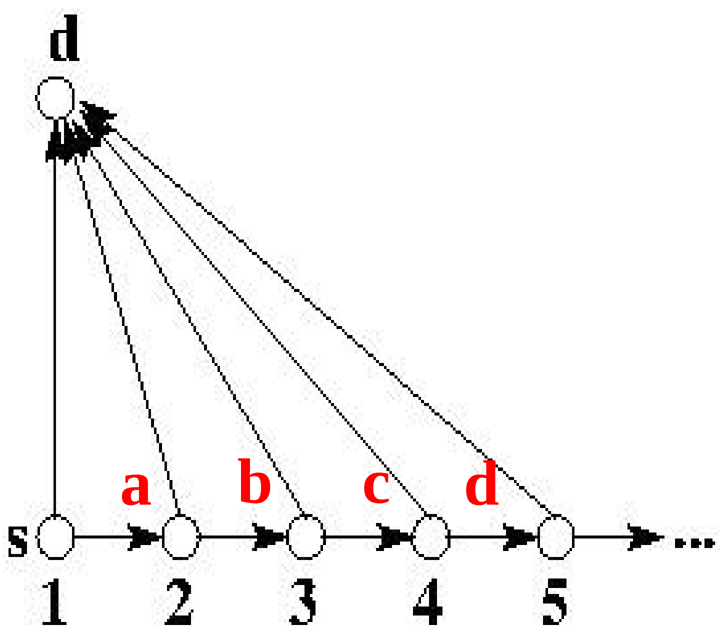
- Caracterização do transiente do comportamento médio do sistema
  - **método recursivo** prevê a evolução passo-a-passo do peso médio de cada aresta
  - **método analítico** prevê o expoente do decaimento em lei de potência dos pesos normalizados

$$E\left[\frac{w_{i,j}[n]}{\sum_k w_{i,k}[n]}\right] \sim n^{-\gamma}$$

calculamos γ para todas as aresas evanescentes (i,j)

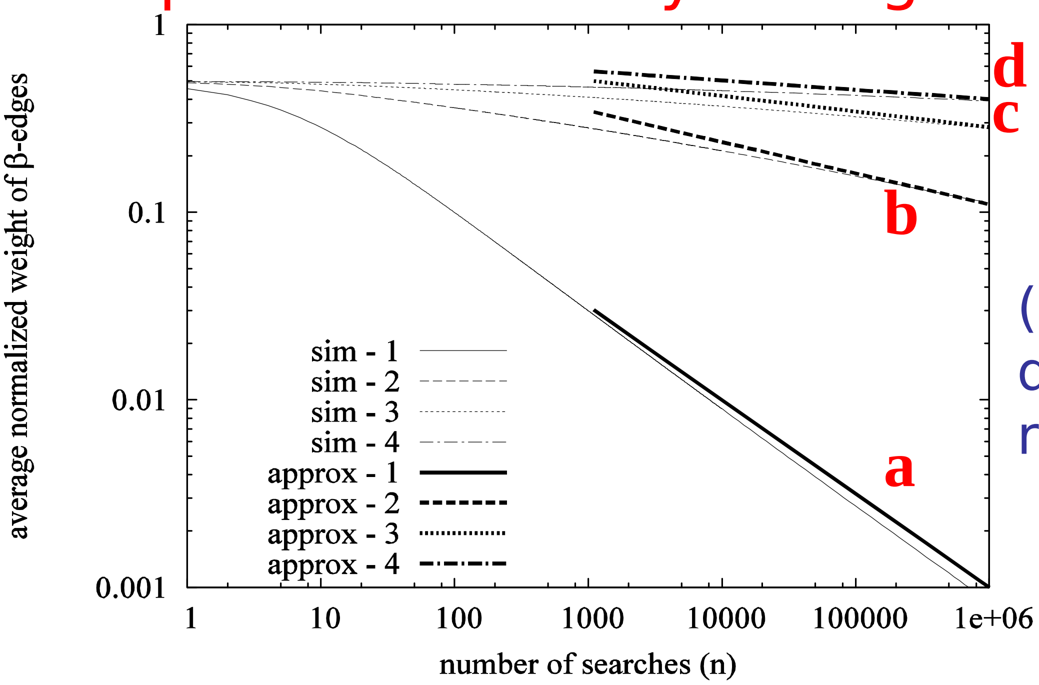
Decaimento Lento

- Decaimento depende do local da aresta
- Arestas longe de caminhos mínimos decaem muito mais lentamente



$f(L) = L^{-1}$

power-law decay of edges



(média de várias rodadas)

Conclusão

- Urnas de Pólya: modelo simples e antigo para capturar dinâmicas com reforço
- VC pode levar a competições muito longas
  - azar inicial pode ofuscar habilidade
  - *luta do mais hábil*
- Caminhos mínimos surgem através de passeios aleatórios com reforço
  - robustez à rede, pesos e função de reforço

Reforço para Sempre!!

- muitos problemas usam reforço

Obrigado!

- Perguntas ou comentários?

1) B Jiang, D Figueiredo, B Ribeiro, D Towsley, *On the Duration and Intensity of Competitions in Nonlinear Polya Urn Processes with Fitness.* SIGMETRICS Perform. Eval. Rev. 44(1) 2016 (best paper award)

2) B Jiang, L Sun, D Figueiredo, B Ribeiro, D Towsley, *On the duration and intensity of cumulative advantage competitions*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2015(11) 2015

3) D Figueiredo, M Garetto, *On the Emergence of Shortest Paths by Reinforced Random Walks*, IEEE Trans. on Network Science and Engineering, 2017.